Fachabitur 2012 Mathematik NT Stochastik S I

Bei den folgenden Aufgaben sollen relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.

Statistiken geben den Anteil der Linkshänder in der Bevölkerung mit 15 Prozent an. In einer Fußgängerzone werden Passanten nach deren bevorzugter Schreibhand befragt.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Bestimmen Sie zum Beispiel mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass man spätestens bei der dritten Befragung auf einen Linkshänder stößt.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 50 Befragten

a) genau 10 Linkshänder
b) mindestens 8 aber nicht mehr als 12 Linkshänder
c) höchstens 25 Linkshänder
d) genau zwei Linkshänder und diese in der Befragung nacheinander befinden.

In einer weiteren Befragung von 200 zufällig ausgewählten Personen wurden genau 30 Linkshänder (L) gezählt. Davon waren 9 Frauen (F). Die restlichen 51 Frauen in der Befragung waren Rechtshänder. Die Auswahl einer Person und die Ermittlung ihrer Schreibhand und ihres Geschlechts wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Ermitteln Sie mithilfe einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse des Zufallsexperiments.

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Beschreiben Sie das Ereignis $E = \overline{F \cup \overline{L}}$ möglichst einfach mit Worten und geben Sie dessen Wahrscheinlichkeit an.

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob die Ereignisse L und F stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

30 Linkshänder unterziehen sich einem Reaktionstest, bei welchem sie mit der rechten Hand beim Auftreten eines Ereignisses eine Taste betätigen. Folgende Tabelle zeigt, mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$, die gemessenen und auf Zehntelsekunden gerundeten Reaktionszeiten der Versuchspersonen:

Reaktionszeit in s	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Anzahl der Personen	a	6	b	a	3

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Berechnen Sie die Werte a und b, wenn bekannt ist, dass genau 21 Versuchspersonen höchstens $0,6\,\text{s}$ Reaktionszeit benötigten.

[Teilergebnis: $b = 9$]

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Die Zufallsgröße X gibt die Reaktionszeit einer zufällig herausgegriffenen Versuchsperson an.
Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und stellen Sie sie geeignet graphisch dar.

Teilaufgabe 3.3 (5 BE)

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Eine Versuchsperson vermutet, dass mindestens 80% der Linkshänder eine Reaktionszeit von maximal $0,6\,\text{s}$ haben, wenn beim Reaktionstest die Taste mit der linken Hand betätigt wird (= Testkriterium). Eine zweite Versuchsperson ist weniger optimistisch (Gegenhypothese). Dazu wird ein Test mit 30 Linkshändern durchgeführt.

Teilaufgabe 4.1 (6 BE)

Geben Sie für obigen Test die Testgröße sowie die Gegenhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn 70% der Versuchspersonen das Testkriterium erfüllen?

Teilaufgabe 4.2 (2 BE)

Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Bei den folgenden Aufgaben sollen relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.

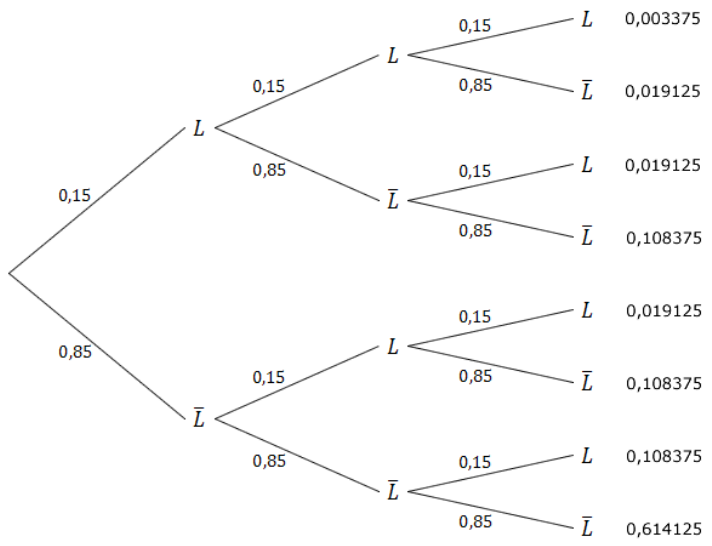
Statistiken geben den Anteil der Linkshänder in der Bevölkerung mit 15 Prozent an. In einer Fußgängerzone werden Passanten nach deren bevorzugter Schreibhand befragt.

Bestimmen Sie zum Beispiel mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass man spätestens bei der dritten Befragung auf einen Linkshänder stößt.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Baumdiagramm erstellen

Baumdiagramm:



Für das Ereignis E: „spätestens beim dritten Befragten wird auf einen Linkshänder gestoßen“ gibt es drei Pfade im Baum:

Erster Befragter ist Linkshänder: $P(L) = 0,15$

Zweiter Befragter ist Linkshänder: $P(\overline{L}\,L) = 0,85 \cdot 0,15 = 0,1275$

Dritter Befragter ist Linkshänder: $P(\overline{L}\,\overline{L}\,L) = 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,15 \approx 0,1084$

$$P(E) = P(L) + P(\overline{L}\,L) + P(\overline{L}\,\overline{L}\,L) = 0,15 + 0,1275 + 0,1084 = 0,3859$$

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 50 Befragten

a) genau 10 Linkshänder
b) mindestens 8 aber nicht mehr als 12 Linkshänder
c) höchstens 25 Linkshänder
d) genau zwei Linkshänder und diese in der Befragung nacheinander befinden.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Binomialverteilung

Interpretation als Bernoulli-Kette:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

E_a: „Es befinden sich genau 10 Linkshänder unter den Befragten.“

$n = 50$ (50 Personen werden befragt)
$p = 0,15$ (Wahrscheinlichkeit für einen Linkshänder)
$k = 10$ (10 Linkshänder sollen sich unter den Befragten befinden)

$$P(E_a) = P_{0,15}^{50}(Z = 10) = \binom{50}{10} \cdot 0,15^{10} \cdot 0,85^{40} \approx 0,08899$$

E_b: „Es befinden sich mindestens 8 aber nicht mehr als 12 Linkshänder unter den Befragten.“

$n = 50$ (50 Personen werden befragt)
$p = 0,15$ (Wahrscheinlichkeit für einen Linkshänder)
$8 \leq k \leq 12$ (mindestens 8 aber nicht mehr als 12 Linkshänder sollen sich unter den Befragten befinden)

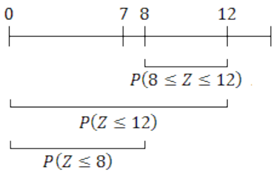
$$P(E_b) = P(8 \leq Z \leq 12)$$

Erläuterung:

Wenn die Zufallsvariable Z zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a-1)$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“



$= P_{0,15}^{50}(Z \leq 12) - P_{0,15}^{50}(Z \leq 7) \overset{TW}{=} 0,96994 - 0,51875 = 0,45119$

E_c: „Es befinden sich höchstens 25 Linkshänder unter den Befragten.“

$n = 50$ (50 Personen werden befragt)
$p = 0,15$ (Wahrscheinlichkeit für einen Linkshänder)
$k \leq 25$ (höchstens 25 Linkshänder sollen sich unter den Befragten befinden)

$P(E_c) = P_{0,15}^{50}(Z \leq 25) \overset{TW}{=} 1$

Hinweis:
Der Wert $P_{0,15}^{50}(Z \leq 25)$ kann aus dem Tafelwerk nicht direkt abgelesen werden.
Im Tafelwerk wird aber bereits $P_{0,15}^{50}(Z \leq 20) = 1$ angeben.
Da also bereits die Wahrscheinlichkeiten $k = 0$ bis $k = 20$ laut Tafelwerk 100% ergeben, ist auch $P_{0,15}^{50}(Z \leq 25) = 100\%$.

E_d: „Es befinden sich genau 2 Linkshänder unter den Befragten und diese direkt hintereinander.“

$n = 50$ (50 Personen werden befragt)

$p = 0,15$ (Wahrscheinlichkeit für einen Linkshänder)
$k = 2$ (2 Linkshänder sollen sich unter den Befragten befinden)

Anordnung:

Erläuterung:

Wieviele Möglichkeiten gibt es 2 Linkshänder auf 50 Befragte zu verteilen, wenn diese direkt hintereinander vorkommen sollen?

Da die Position des zweiten Linkshänders direkt die hinter dem ersten ist, genügt es die Platzierung des ersten Linkshänders zu betrachten.
Der erste Linkshänder kann an erster, zweiter dritter usw. Stelle stehen, jedoch nicht an letzter, da sonst kein Platz mehr für den zweiten übrig wäre.

Es gibt also 49 Möglichkeiten den ersten Linkshänder zu platzieren.

Es gibt 49 Möglichkeiten die zwei Linkshänder so anzuordnen, dass sie direkt aufeinander folgen.

$P(E_d) = 49 \cdot P_{0,15}^{50}(Z = 2) = 49 \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^{48} \approx 0,00045$

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

In einer weiteren Befragung von 200 zufällig ausgewählten Personen wurden genau 30 Linkshänder (L) gezählt. Davon waren 9 Frauen (F). Die restlichen 51 Frauen in der Befragung waren Rechtshänder. Die Auswahl einer Person und die Ermittlung ihrer Schreibhand und ihres Geschlechts wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

Ermitteln Sie mithilfe einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse des Zufallsexperiments.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

L: „Befragter ist Linkshänder“

F: „Befragter ist eine Frau“

30 Linkshänder unter 200 Befragten:

$$P(L) = \frac{30}{200} = 0,15$$

9 Befragte sind Linkshänder und Frauen:

$$P(L \cap F) = \frac{9}{200} = 0,045$$

51 Befragte sind keine Linkshänder und Frauen:

$$P(\overline{L} \cap F) = \frac{51}{200} = 0,255$$

Vierfeldertafel:

	L	$\overline{L}$	
F	**0,045**	**0,255**	
$\overline{F}$			
	0,15		**1**

Tafel vervollständigen:

	L	$\overline{L}$	Σ
F	**0,045**	**0,255**	0,3
$\overline{F}$	0,105	0,595	0,7
Σ	**0,15**	0,85	**1**

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Beschreiben Sie das Ereignis $E = \overline{F \cup \overline{L}}$ möglichst einfach mit Worten und geben Sie dessen Wahrscheinlichkeit an.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Ereignis beschreiben

$$E = \overline{F \cup \overline{L}}$$

Vereinfachen mithilfe der De Morganschen Gesetze:

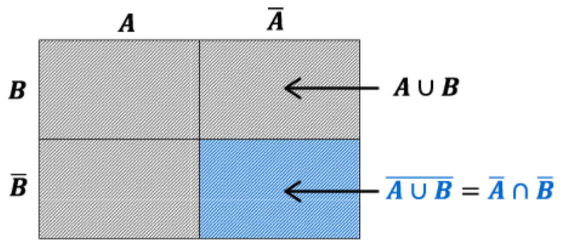
Erläuterung: *De Morgansche Gesetze*

Wird das Gegenereignis einer Verknüpfung mehrerer Ereignisse (z.B. $\overline{A \cup B}$) gebildet, ist die Bedeutung im Sachzusammenhang oft nicht mehr klar ersichtlich.

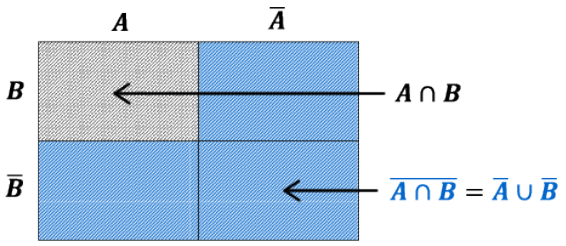
Die Gesetze von De Morgan helfen solche Ausdrücke zu vereinfachen.

Diese lauten wie folgt:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



$E = \overline{F \cup \overline{L}} = \overline{F} \cap \overline{\overline{L}} = \overline{F} \cap L$

Ereignis E in Worten:

Bei einem Befragten handelt es sich nicht um eine Frau und um einen Linkshänder.

Oder:

Bei einem Befragten handelt es sich um einen männlichen Linkshänder.

Berechnen der Wahrscheinlichkeit:

$P(E) = P\left(\overline{F \cup \overline{L}}\right) = P\left(\overline{F} \cap L\right) = 0,105$

(siehe Vierfeldertafel aus Aufgabe 2.1)

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)

Untersuchen Sie, ob die Ereignisse L und F stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Stochastische Unabhängigkeit

Prüfen auf stochastische Unabhängigkeit:

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse E_1 und E_2 heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$P(L \cap F) = 0,045$ (siehe Vierfeldertafel aus Aufgabe 2.1)

$P(L) \cdot P(F) = 0,15 \cdot 0,3 = 0,045$ (siehe Vierfeldertafel aus Aufgabe 2.1)

$\Rightarrow \quad P(L \cap F) = P(L) \cdot P(F)$

Die Ereignisse L und F sind stochastisch unabhängig.

Interpretation:

Die Eigenschaft „Linkshänder“ ist nicht vom Geschlecht abhängig.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

30 Linkshänder unterziehen sich einem Reaktionstest, bei welchem sie mit der rechten Hand beim Auftreten eines Ereignisses eine Taste betätigen. Folgende Tabelle zeigt, mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$, die gemessenen und auf Zehntelsekunden gerundeten Reaktionszeiten der Versuchspersonen:

Reaktionszeit in s	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Anzahl der Personen	a	6	b	a	3

Berechnen Sie die Werte a und b, wenn bekannt ist, dass genau 21 Versuchspersonen höchstens $0,6\,\text{s}$ Reaktionszeit benötigten.

[Teilergebnis: $b = 9$]

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Parameterwerte ermitteln

Bedingungen analysieren:

Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*

Über die gegebenen Bedingungen lassen sich Gleichungen aufstellen, welche die Parameter a und b enthalten. Durch das Lösen des dadurch entstandenen Gleichungssystems erhält man die gesuchten Werte.

- Es gibt insgesamt 30 Versuchspersonen
  $\Rightarrow \quad a + 6 + b + a + 3 = 30$
  $2a + b + 9 = 30 \quad \text{(I)}$

- 21 Personen benötigen höchstens $0,6\,\text{s}$, also entweder $0,4\,\text{s}$, $0,5\,\text{s}$ oder $0,6\,\text{s}$.
  $\Rightarrow \quad a + 6 + b = 21 \quad \text{(II)}$

Gleichungssystem:

(I) $\quad 2a + b + 9 = 30$
(II) $\quad a + 6 + b = 21$

(I) - (II): $a + 3 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 6$

$a = 6$ in (II) einsetzen:

$6 + 6 + b = 21 \quad \Rightarrow \quad b = 9$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Die Zufallsgröße X gibt die Reaktionszeit einer zufällig herausgegriffenen Versuchsperson an.
Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und stellen Sie sie geeignet graphisch dar.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Reaktionszeit in s	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Anzahl der Personen	6	6	9	6	3

$$P(X = 0,4) = \frac{6}{30} = 0,2$$

$$P(X = 0,5) = \frac{6}{30} = 0,2$$

$$P(X = 0,6) = \frac{9}{30} = 0,3$$

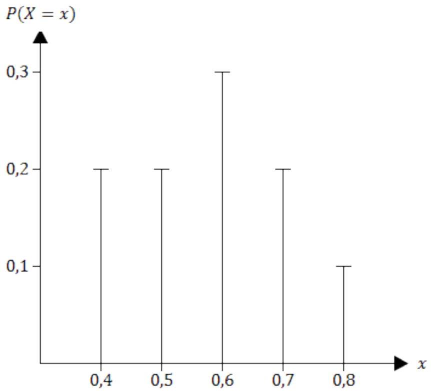
$P(X=0,7)=\frac{6}{30}=0,2$

$P(X=0,8)=\frac{3}{30}=0,1$

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x in s	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$P(X=x)$	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Graphische Darstellung mittels Stabdiagramm:



Teilaufgabe 3.3 (5 BE)

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3

Erwartungswert und Standardabweichung

Erwartungswert bestimmen:

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X bei n möglich eintretenden Ereignissen ist definiert als:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot \underbrace{P(X=x_i)}_{p_i}=x_1\,p_1+x_2\,p_2+\cdots+x_n\,p_n$$

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$\mu=E(X)=0,4\cdot 0,2+0,5\cdot 0,2+0,6\cdot 0,3+0,7\cdot 0,2+0,8\cdot 0,1=0,58$

Varianz bestimmen:

Erläuterung: *Varianz einer Zufallsgröße*

Die Varianz einer Zufallsgröße X bei n möglich eintretenden Ereignissen ist definiert als:

$$Var(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2\cdot p_i=E\left(X^2\right)-E^2(X)$$

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$Var(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)$

$E\left(X^2\right)=0,4^2\cdot 0,2+0,5^2\cdot 0,2+0,6^2\cdot 0,3+0,7^2\cdot 0,2+0,8^2\cdot 0,1=0,352$

$E^2(X)=0,58^2=0,3364$

$Var(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=0,352-0,3364=0,0156$

Standardabweichung bestimmen:

Erläuterung: *Standardabweichung einer Zufallsgröße*

Die Standardabweichung σ einer Zufallsgröße X ist definiert als:

$\sigma = \sqrt{Var(X)}$

$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0{,}0156} \approx 0{,}125$

Wahrscheinlichkeit

Gesucht: $P(|X-\mu| < \sigma)$

Erläuterung:

„innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert“ = $|X-\mu| < \sigma$

Die Ungleichung $|X-\mu| < \sigma$ ist gleichbedeutend zu $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$.

$P(|X-\mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

$P(|X-0{,}58| < 0{,}125) = P(0{,}455 < X < 0{,}705)$

Erläuterung:

Die Zufallsgröße X kann zwischen $0{,}455$ und $0{,}705$ nur die Werte $0{,}5$, $0{,}6$ und $0{,}7$ annehmen.

$P(|X-0{,}58| < 0{,}125) = P(X=0{,}5) + P(X=0{,}6) + P(X=0{,}7)$

$P(|X-0{,}58| < 0{,}125) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}7$

Teilaufgabe 4.1 (6 BE)

Eine Versuchsperson vermutet, dass mindestens 80% der Linkshänder eine Reaktionszeit von maximal $0{,}6\,\text{s}$ haben, wenn beim Reaktionstest die Taste mit der linken Hand betätigt wird (= Testkriterium). Eine zweite Versuchsperson ist weniger optimistisch (Gegenhypothese). Dazu wird ein Test mit 30 Linkshändern durchgeführt.

Geben Sie für obigen Test die Testgröße sowie die Gegenhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn 70% der Versuchspersonen das Testkriterium erfüllen?

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Signifikanztest

Testgröße: Anzahl der Linkshänder mit Reaktionszeit von max. $0{,}6\,\text{s}$ unter 30

Nullhypothese $H_0:\ p_0 \geq 0{,}8$

Gegenhypothese $H_1:\ p_1 < 0{,}8$

H_1 in Worten: weniger als 80% der Linkshänder haben eine Reaktionszeit von maximal $0{,}6\,\text{s}$.

Stichprobenumfang: $n = 30$

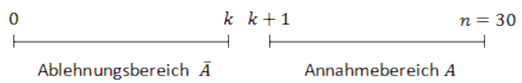
Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$

Annahmebereich von $H_0:\ A = [k+1\ ;\ 30]$

Ablehnungsbereich von $H_0:\ \overline{A} = [0\ ;\ k]$

Erläuterung: *Nullhypothese*

Die Nullhypothese $H_0 : p_0 \geq 0{,}8$ bedeutet, dass **mindestens** 80% der Linkshänder eine Reaktionszeit von maximal $0{,}6\,\text{s}$ haben. Somit liegt der Annahmebereich rechts und der Ablehnungsbereich links.



Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ wenn, die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird (s. auch Merkhilfe Mathematik).

Das ist der Fall wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \leq k$).

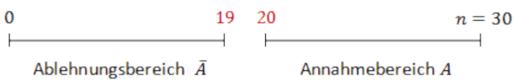
$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,8}^{30}(Z \leq k) \leq 0,05$

$P_{0,8}^{30}(Z \leq k) \leq 0,05$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \leq 19$

$\Rightarrow$ bis einschließlich $k = 19$ wird die Nullhypothese abgelehnt.

Entscheidungsregel:



Maximaler Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0; 1; 2; \ldots; 19\}$

70% der Versuchspersonen erfüllen das Testkriterium.

$0,7 \cdot 30 = 21 \in A$

$\Rightarrow$ In diesem Fall wird die Gegenhypothese abgelehnt.

Teilaufgabe 4.2 (2 BE)

Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Hypothesentest - Fehler zweiter Art

Fehler zweiter Art:

Erläuterung: *Fehler zweiter Art*

Der Fehler zweiter Art besteht in der Annahme der Nullhypothese, obwohl diese nicht zutrifft (s. auch Merkhilfe Mathematik).

Der Fehler zweiter Art besteht darin, dass die Nullhypothese beibehalten wird, obwohl sie falsch ist, d.h. man nimmt weiterhin an, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Reaktionszeit von maximal $0,6\,\mathrm{s}$ 80% beträgt, obwohl dieser Anteil geringer ist.