Fachabitur 2012 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und deren Vielfachheit.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunkts von G_f.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Wendepunkte.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-4 \le x \le 2$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem.

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Zeigen Sie, dass die Gerade G_t , beschrieben durch die Funktion $t: x \mapsto -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ mit $D_t = \mathbb{R}$, Tangente an G_f im Punkt $P(-2|y_p)$ ist.
Zeichnen Sie die Tangente in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)

Die Tangente G_t, der Graph G_f und die y-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.

Gegeben sind die reellen Funktionen

$g_a: x \mapsto \frac{1}{24}\left(x^4 + (6a-4)x^3 + \left(12a^2 - 12a\right)x^2\right)$ mit $D_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a das Symmetrieverhalten von G_{g_a} bzgl. des Koordinatensystems.

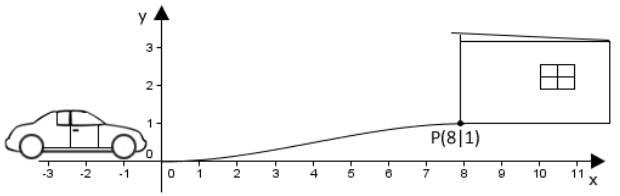
Teilaufgabe 2.2 (7 BE)

Berechnen Sie, für welche Werte von a die Funktion g_a genau eine Nullstelle besitzt.

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph G_{g_a} unabhängig von a bei $x = 0$ die x-Achse als Tangente besitzt.

Eine Garage liegt 1m über dem Straßenniveau. Die Zufahrt soll so gestaltet werden, dass sie „glatt“ (d.h. ohne Knick) an die Straße und die Garage anschließt (siehe Skizze). Alle Angaben sind in Meter. Bei den folgenden Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.



Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Der Querschnitt der Auffahrtsrampe wird durch eine ganzrationale Funktion r dritten Grades, eingeschränkt auf den Bereich $0 \le x \le 8$, beschrieben.
Ermitteln Sie den Funktionsterm $r(x)$.

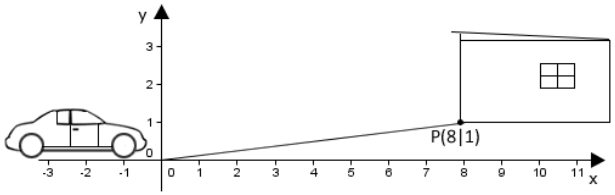
[Ergebnis: $r(x) = -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2$]

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

Die Rampe soll eine Breite von 3 m bekommen. Berechnen Sie das Volumen des Materials, das hierfür aufgeschüttet werden muss.

© Abiturloesung.de

Ein Nachbar behauptet, dass die Auffahrt gemäß Teilaufgabe 3.1 ungünstig, weil „zu steil“ , sei. Die unten skizzierte Variante sei besser.



Teilaufgabe 3.3.1 (6 BE)

Bestimmen Sie denjenigen Bereich der Auffahrt (x-Werte), in dem die Behauptung des Nachbarn richtig ist, d.h. die Rampe aus Teilaufgabe 3.1 steiler ist als beim Vorschlag des Nachbarn. Runden Sie dabei auf eine Nachkommastelle.

Teilaufgabe 3.3.2 (2 BE)

Zeigen Sie, dass beim Vorschlag des Nachbarn genauso viel Material aufgeschüttet werden müsste wie bei der ursprünglichen Idee (Teilaufg. 3.2).

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und deren Vielfachheit.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 = 0$

$x^2 \left(\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{3}x + 1\right) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Jeder Faktor wird untersucht.

$x^2 = 0$

$x_1^N = 0$ (doppelte Nullstelle)

© Abiturloesung.de

$$\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$

$$x_{2,3}^N = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{24} \cdot 1}}{2 \cdot \frac{1}{24}} = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{1}{18}}}{\frac{1}{12}}$$

Unter der Wurzel darf keine negative Zahl stehen.

$\Rightarrow$ keine weiteren Nullstellen

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunkts von G_f.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$$

Erste Ableitung bilden:

$$f'(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 2x$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 2x = 0$$

$$x\left(\frac{1}{6}x^2 + x + 2\right) = 0$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

Alle Terme werden einzeln untersucht.

$x_1^E = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1(0|0)$ (doppelte Nullstelle von $f(x)$; siehe Aufgabe 1.1)

$$\frac{1}{6}x^2 + x + 2 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2}}{2 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{-1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}$$

Unter der Wurzel darf keine negative Zahl stehen.

$\Rightarrow$ keine weiteren (möglichen) Extremstellen

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bestimmen:

$$f''(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$$

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right)=0$ und $f''\left(x^E\right)>0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right)=0$ und $f''\left(x^E\right)<0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

Wert der zweiten Ableitung an der Extremstelle $x^E=0$ untersuchen:

$f''\left(x^E\right)=\frac{1}{2}\cdot 0^2+2\cdot 0+2=2>0$

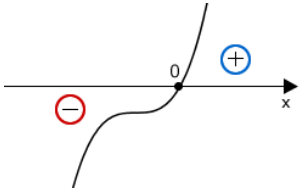
$\Rightarrow$ relativer Tiefpunkt TIP $(0|0)$

Monotonieverhalten einer Funktion

Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung mit Hilfe einer Skizze von $f\prime$ bestimmen:

Erläuterung: *Charakteristischer Verlauf ganzrationaler Funktionen*

Die Funktion $\frac{1}{6}x^3+x^2+2x$ ist eine Polynomfunktion dritten Grades mit positiven Leitkoeffizienten $\frac{1}{6}$. Ihr charakteristischer Verlauf ist „von links unten nach rechts oben“. Sie verläuft durch den Ursprung und schneidet die x-Achse an keiner weiteren Stelle.



Erläuterung: *Funktionswert*

Dort wo der Graph oberhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion, also in diesem Fall die erste Ableitung, positive Funktionswerte und somit positives Vorzeichen.

Dort wo der Graph unterhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion negative Funktionswerte und somit negatives Vorzeichen.

$f'(x)<0$ für $x\in\,]-\infty;0[$

$f'(x)>0$ für $x\in]0;\infty[$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

Ist $f'(x)>0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x\in[a;b]$ streng monoton steigend.

Ist $f'(x)<0$ in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f für $x\in[a;b]$ streng monoton fallend.

$\Rightarrow$ G_f ist streng monoton fallend für $x\in\,]-\infty;0]$

$\Rightarrow$ G_f ist streng monoton steigend für $x\in[0;\infty[$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Wendepunkte.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Wendepunkt ermitteln

$f(x)=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2$

$f'(x)=\frac{1}{6}x^3+x^2+2x$ (siehe Aufgabe 1.2)

© Abiturloesung.de

$f''(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ (siehe Aufgabe 1.2)

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^{WP} erfüllt sein:

$f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 0$

$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$

$x_{1,2}^W = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{1} = -2$ (doppelte Nullstelle von f'')

Funktionswert an der Stelle $x^W = -2$ bestimmen:

$f(-2) = \frac{1}{24} \cdot (-2)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + (-2)^2 = 2$

Erläuterung: *Flachpunkt*

Hat die zweite Ableitung einer Funktion f eine doppelte Nullstelle x_0, so liegt an der Stelle x_0 ein Flachpunkt vor.

Da x_0 doppelt ist, hat die zweite Ableitung f'' dort ein Extrempunkt, da kein Vorzeichenwechsel von f'' bei x_0 stattfindet.
Somit ändert sich auch nicht das Krümmungsverhalten von f und somit ist ein Flachpunkt auch kein Wendepunkt.

$\Rightarrow$ Flachpunkt $F\,P(-2|2)$ (kein Wendepunkt)

Alternative Lösung

Überprüfung der möglichen Wendestelle über die dritte Ableitung:

$f'''(x) = x + 2$

Erläuterung: *Wendepunkt*

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** ist die dritte Ableitung ungleich Null an dieser Stelle, d.h. $f'''\left(x^{\text{WP}}\right) \neq 0$, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

Wert der dritten Ableitung an der Stelle $x^W = -2$ bestimmen:

$f'''(-2) = -2 + 2 = 0$

$\Rightarrow$ kein Wendepunkt an der Stelle $x = -2$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-4 \leq x \leq 2$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Skizze

$f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$

Nullstellen: (siehe Aufgabe 1.1)

$x_1^N = 0$ (doppelte Nullstelle)

Extrempunkte: (siehe Aufgabe 1.2)

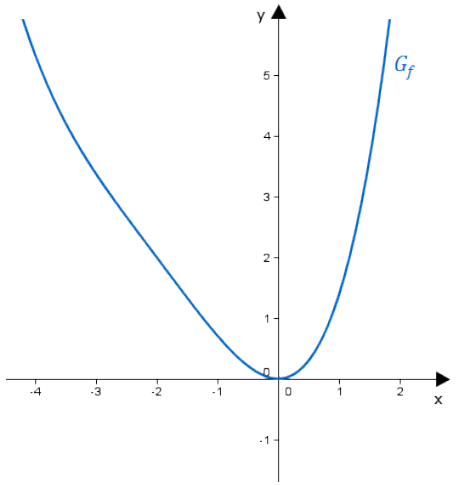
relativer Tiefpunkt TIP $(0|0)$

Flachpunkt: (siehe Aufgabe 1.3)

© Abiturloesung.de

FP $(-2|2)$

Skizze:



Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Zeigen Sie, dass die Gerade G_t , beschrieben durch die Funktion $t : x \mapsto -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ mit $D_t = \mathbb{R}$, Tangente an G_f im Punkt $P(-2|y_p)$ ist.
Zeichnen Sie die Tangente in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Lösung zu Teilaufgabe 1.5

Nachweis einer Tangente

$f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$

$f'(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 2x$ (siehe Aufgabe 1.2)

$P(-2|2)$ ist Flachpunkt (siehe Aufgabe 1.3)

Erläuterung: *Eigenschaften einer Tangente*

Damit t Tangente zu f in P ist, muss gelten:

1. t und f schneiden sich in P
   $\Rightarrow \quad t(-2) = f(-2)$

2. t und f besitzen in P die gleiche Steigung
   $\Rightarrow \quad t'(-2) = f'(-2)$

Prüfen, ob Funktionswerte übereinstimmen:

$f(-2) = 2 \quad$ (da $P(-2|2)$ auf G_f)

$t(-2) = -\frac{4}{3} \cdot (-2) - \frac{2}{3} = 2$

$\Rightarrow \quad t(-2) = f(-2)$

Prüfen, ob die Werte für die Steigung ünereinstimmen:

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m der Tangente t an dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

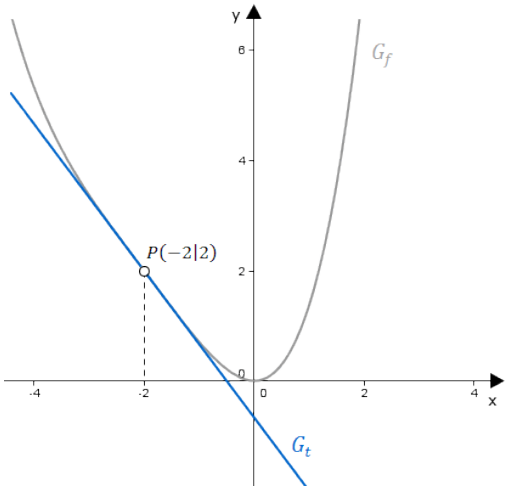
$m = t'(x) = -\frac{4}{3}$

$f'(-2) = \frac{1}{6} \cdot (-2)^3 + \cdot(-2)^2 + 2 \cdot (-2) = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \quad t'(-2) = f'(-2)$

$\Rightarrow t$ ist Tangente zu f in P

© Abiturloesung.de



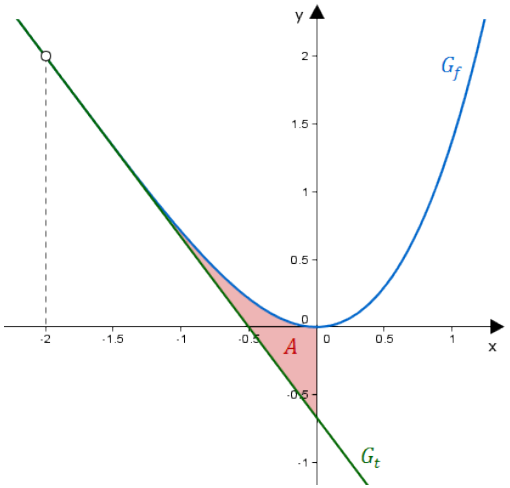
Teilaufgabe 1.6 (5 BE)

Die Tangente G_t, der Graph G_f und die y-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.

Lösung zu Teilaufgabe 1.6

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

$$f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$$
$$t(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$



Flächeninhalt A bestimmen:

Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Der Inhalt eines Flächenstücks zwischen zwei Funktionsgraphen G_f und G_g ist gegeben durch:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_g.

$$A = \int_{-2}^{0} (f(x) - t(x))\ \mathrm{dx}$$
$$A = \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \left(-\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\right)\right)\ \mathrm{dx}$$
$$A = \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right)\ \mathrm{dx}$$

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r \,\mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1}+C \qquad (r \neq -1)$$

Allgemein gelten folgende Rechenregeln für Integrale:

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,\mathrm{dx} \quad = \quad c\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{dx} \quad = \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}+\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$$

$$A=\left[\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right]_{-2}^{0}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F'=f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)d\,x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

$$A=0-\left(\frac{1}{120}\cdot(-2)^5+\frac{1}{12}\cdot(-2)^4+\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+\frac{2}{3}\cdot(-2)^2+\frac{2}{3}\cdot(-2)\right)$$

$$A=0-\left(-\frac{4}{15}\right)=\frac{4}{15}$$

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen

$g_a : x \mapsto \frac{1}{24}\left(x^4+(6a-4)x^3+\left(12a^2-12a\right)x^2\right)$ mit $D_{g_a}=\mathbb{R}$ und $a\in\mathbb{R}^+$.

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a das Symmetrieverhalten von G_{g_a} bzgl. des Koordinatensystems.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Symmetrieverhalten einer Funktion

$$g_a(x)=\frac{1}{24}\left(x^4+(6a-4)x^3+\left(12a^2-12a\right)x^2\right)$$

1. Fall: $\quad 6a-4=0 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{2}{3}$

$g_{\frac{2}{3}}(x)=\frac{1}{24}\left(x^4+(...)\,x^2\right)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da nur gerade Potenzen von x vorkommen.

2. Fall: $\quad a\in\mathbb{R}^+\setminus\{\frac{2}{3}\}$

$g_a(x)$ hat keine uns bekannte Symmetrie, da gerade und ungerade Potenzen von x vorkommen.

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)

Berechnen Sie, für welche Werte von a die Funktion g_a genau eine Nullstelle besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Parameterwerte ermitteln

$$g_a(x)=\frac{1}{24}\left(x^4+(6a-4)x^3+\left(12a^2-12a\right)x^2\right)$$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x)=0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$g_a(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{24}\left(x^4+(6a-4)x^3+\left(12a^2-12a\right)x^2\right)=0$$

© Abiturloesung.de

$x^2 \left(x^2 + (6a-4)x + 12a^2 - 12a\right) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Jeder Faktor wird untersucht.

$x^2 = 0$

$x^N = 0$ (doppelte Nullstelle)

$x^2 + (6a-4)x + 12a^2 - 12a = 0$

Fallunterscheidung:

Erläuterung: *Fallunterscheidung, Diskriminante*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$

Der Ausdruck unter Wurzel heißt Diskriminante D.

$D = b^2 - 4a\,c$

Man unterscheidet drei Fälle:

1. Die Diskriminante ist negativ: $D < 0$
   $\Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung

2. Die Diskriminante ist Null: $D = 0$
   $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau eine Lösung

3. Die Diskriminante ist positiv: $D > 0$
   $\Rightarrow$ Die Gleichung hat genau zwei Lösungen

Damit $x = 0$ die einzige Nullstelle von g_a ist, muss bei der Funktion $x^2 + (6a-4)x + 12a^2 - 12a = 0$ diese Fallunterscheidung durchgeführt werden.

1. Fall: genau eine Nullstelle

$\Rightarrow$ Diskriminante gleich Null setzen: $D = 0$

$(6a-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(12a^2 - 12a\right) = 0$

$36a^2 - 48a + 16 - 48a^2 + 48a = 0$

$-12a^2 + 16 = 0$

$-12a^2 = -16$

$a^2 = \dfrac{4}{3}$

$a = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$ (negative Lösung ausgeschlossen, da $a \in \mathbb{R}^+$)

Für $a = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$ besitzt die Gleichung genau eine Lösung.

Berechnen dieser Lösung:

$$x = \frac{-\left(6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} - 4\right) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} + 4}{2} \approx -1,46 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Der 1. Fall ist nicht möglich

2. Fall: keine Nullstelle

$\Rightarrow$ Diskriminante kleiner Null setzen: $D < 0$

$(6a-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(12a^2 - 12a\right) < 0$

$36a^2 - 48a + 16 - 48a^2 + 48a < 0$

$-12a^2 + 16 < 0$

$-12a^2 < -16$ (durch -12 teilen und Relationszeichen umdrehen)

$a^2 > \dfrac{4}{3}$

© Abiturloesung.de

$a > \sqrt{\frac{4}{3}}$ (negative Lösungen ausgeschlossen, da $a \in \mathbb{R}^+$)

$\Rightarrow$ Für $a \in \left]\sqrt{\frac{4}{3}}; \infty\right[$ hat g_a genau eine Nullstelle

3. Fall: weitere Nullstellen

Dieser Fall kann ausgeschlossen werden, da somit $x = 0$ nicht die einzige Nullstelle wäre.

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph G_{g_a} unabhängig von a bei $x = 0$ die x-Achse als Tangente besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

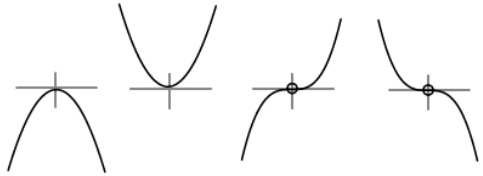
Waagerechte Tangenten

$g_a(x) = \frac{1}{24}\left(x^4 + (6a - 4)x^3 + \left(12a^2 - 12a\right)x^2\right)$

$x = 0$ ist für alle $a \in \mathbb{R}^+$ doppelte Nullstelle (siehe Aufgabe 2.2)

Erläuterung: *Vielfachheit von Nullstellen*

Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x-Achse in einem Punkt „berührt“ oder „schneidet“.



1-fache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse.
2-fache (doppelte) Nullstelle: Berührstelle mit der x-Achse.
3-fache Nullstelle: Nullstelle ist ein Sattelpunkt.

$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) \Rightarrow x = 2$ ist doppelte Nullstelle
$(x+5)^2 = (x+5)(x+5) \Rightarrow x = -5$ ist doppelte Nullstelle

$\Rightarrow x = 0$ ist Extremstelle von g_a

Der Graph von g_a besitzt also an der Stelle $x = 0$ eine waagrechte Tangente.

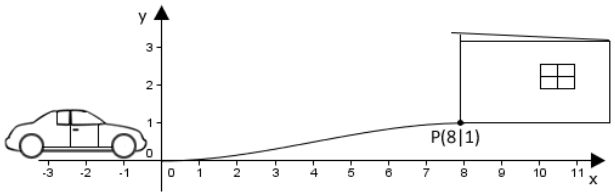
g_a verläuft durch den Punkt $(0|0)$.

Eine waagrechte Tangente durch den Punkt $(0|0)$ ist mit der x-Achse identisch.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Eine Garage liegt 1m über dem Straßenniveau. Die Zufahrt soll so gestaltet werden, dass sie „glatt“ (d.h. ohne Knick) an die Straße und die Garage anschließt (siehe Skizze). Alle Angaben sind in Meter. Bei den folgenden Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

© Abiturloesung.de



Der Querschnitt der Auffahrtsrampe wird durch eine ganzrationale Funktion r dritten Grades, eingeschränkt auf den Bereich $0 \le x \le 8$, beschrieben.
Ermitteln Sie den Funktionsterm $r(x)$.

[Ergebnis: $r(x) = -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2$]

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Funktionsgleichung ermitteln

Allgemeiner Funktionsterm:

$r(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

Erste Ableitung bilden:

$r'(x) = 3a\,x^2 + 2b\,x + c$

Bedingungen analysieren:

Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*

Über die gegebenen Bedingungen lassen sich Gleichungen aufstellen, welche die Parameter a, b, c und d enthalten. Durch das Lösen des dadurch entstandenen Gleichungssystems erhält man die gesuchten Werte.

- Der Beginn der Auffahrt liegt im Punkt $(0|0)$: $r(0) = 0$
  $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$
  $d = 0$

- Das Ende der Auffahrt liegt in Punkt $(8|1)$: $r(8) = 1$
  $a \cdot 8^3 + b \cdot 8^2 + c \cdot 8 = 1$

$512a + 64b + 8c = 1$ (I)

Erläuterung: *Waagerechte Tangente*

Die Steigung m der Tangente t an dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

Waagrechte Tangenten haben die Steigung $m = 0$.
Eine Funktion f hat also an genau den Stellen eine waagrechte Tangente, an denen die erste Ableitung gleich Null ist.

$f'(x) = 0$

- Der Beginn der Auffahrt soll glatt (horizontal) sein: $r'(0) = 0$
  $3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$
  $c = 0$

- Das Ende der Auffahrt soll glatt (horizontal) sein: $r'(8) = 0$
  $3a \cdot 8^2 + 2b \cdot 8 = 0$
  $192a + 16b = 0$ (II)

Gleichungssystem:

(I) $512a + 64b = 1$
(II) $192a + 16b = 0$

(I)$-4\cdot$(II): $-256a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{256}$

$a = -\frac{1}{256}$ in (II) einsetzen:

$192 \cdot \left(-\frac{1}{256}\right) + 16b = 0$

$16b = \frac{3}{4}$

$b = \frac{3}{64}$

© Abiturloesung.de

Berechnete Werte für die Parameter a, b, c und d in $r(x)$ einsetzen:

$$r(x) = -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2$$

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

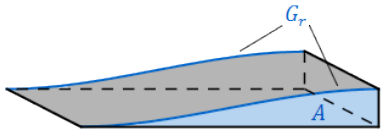
Die Rampe soll eine Breite von 3 m bekommen. Berechnen Sie das Volumen des Materials, das hierfür aufgeschüttet werden muss.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Flächenberechnung

$$r(x) = -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2$$

Die Auffahrt stellt ein Prisma dar. Die Grundfläche A des Prismas entspricht dabei der Fläche unter dem Funktionsgraphen G_r.



$$V = A \cdot l$$

Die Breite der Auffahrt ist 3 m:

$$V = A \cdot 3$$

Die Grundfläche A entspricht der Fläche unter dem Funktionsgraphen:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche, die G_r mit der x-Achse zwischen 0 und 8 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \int_0^8 r(x)\ \mathrm{dx}$$

$$A = \int_0^8 r(x)\mathrm{dx}$$

$$A = \int_0^8 \left(-\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2\right)\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion, Rechenregeln für Integrale*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion von $-\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2$ (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int x^r\ \mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(-\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2\right)\ \mathrm{dx} = -\frac{1}{256}\frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{3}{64}\frac{x^{2+1}}{2+1}$$

$$A = \left[-\frac{1}{1024}x^4 + \frac{1}{64}x^3\right]_0^8$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = -\frac{1}{1024} \cdot 8^4 + \frac{1}{64} \cdot 8^3 - 0 = 4$$

© Abiturloesung.de

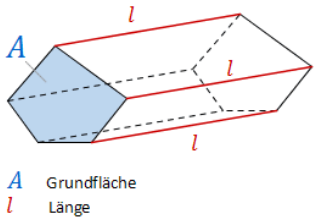
Volumen eines Prismas

Einsetzen der Grundfläche $A = 4$ in die Formel für das Prismavolumen:

Erläuterung:

Das Volumen eines Prismas berechnet sich aus dem Produkt aus Grundfläche und Länge:

$V_{\text{Prisma}} = A \cdot l$



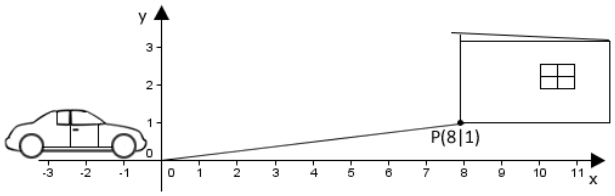
A Grundfläche
l Länge

$V = 4 \cdot 3 = 12$

Das Volumen des benötigten Materials beträgt $12\,\text{m}^3$.

Teilaufgabe 3.3.1 (6 BE)

Ein Nachbar behauptet, dass die Auffahrt gemäß Teilaufgabe 3.1 ungünstig, weil „zu steil“ , sei. Die unten skizzierte Variante sei besser.



Bestimmen Sie denjenigen Bereich der Auffahrt (x-Werte), in dem die Behauptung des Nachbarn richtig ist, d.h. die Rampe aus Teilaufgabe 3.1 steiler ist als beim Vorschlag des Nachbarn. Runden Sie dabei auf eine Nachkommastelle.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3.1

Steigung eines Funktionsgraphen

$$r(x) = -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2$$

Erste Ableitung bestimmen:

$$r'(x) = -\frac{3}{256}x^2 + \frac{3}{32}x$$

Steigung der Geraden bestimmen:

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Die Steigung m einer Geraden, die durch die Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ verläuft, ist gegeben durch:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Hier sind die Punkte $O(0|0)$ und $P(8|1)$.

$$m = \frac{1-0}{8-0} = \frac{1}{8}$$

Bestimmen des Bereichs, in dem die Steigung des Graphen von r größer ist als $\frac{1}{8}$:

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Steigung eines Funktionsgraphen*

Die Steigung des Graphen einer Funktion f an der Stelle x ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x.

$$r'(x) > \frac{1}{8}$$
$$-\frac{3}{256}x^2 + \frac{3}{32}x > \frac{1}{8}$$
$$-\frac{3}{256}x^2 + \frac{3}{32}x - \frac{1}{8} > 0$$

Nullstellen bestimmen: $-\frac{3}{256}x^2 + \frac{3}{32}x - \frac{1}{8} = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

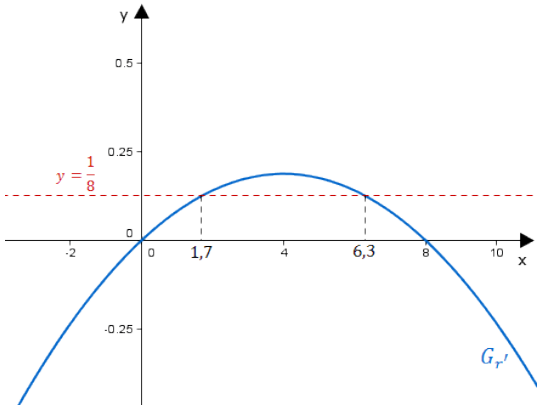
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{3}{32} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{32}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{256}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{256}\right)} = \frac{-\frac{3}{32} \pm \sqrt{\frac{3}{1024}}}{-\frac{3}{128}}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{3}{32} + \sqrt{\frac{3}{1024}}}{-\frac{3}{128}} = 1,7$$

$$x_2 = \frac{-\frac{3}{32} - \sqrt{\frac{3}{1024}}}{-\frac{3}{128}} = 6,3$$

Der Graph von $r'(x)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. An den Stellen $x_1 = 1,7$ und $x_2 = 6,3$ nimmt der Graph den Wert $\frac{1}{8}$ an.



r' ist für $x \in]1,7; 6,3[$ größer als $\frac{1}{8}$. In diesem Bereich stimmt die Behauptung des Nachbarn.

Teilaufgabe 3.3.2 (2 BE)

Zeigen Sie, dass beim Vorschlag des Nachbarn genauso viel Material aufgeschüttet werden müsste wie bei der ursprünglichen Idee (Teilaufg. 3.2).

Lösung zu Teilaufgabe 3.3.2

Volumen eines Prismas

Die Auffahrt stellt ein Prisma dar.

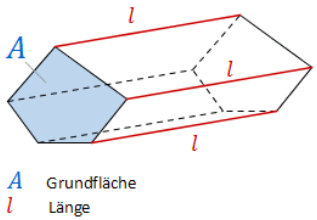
Berechnung des Prismavolumens:

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Volumen eines Prismas*

Das Volumen eines Prismas berechnet sich aus dem Produkt aus Grundfläche und Länge:

$V_{\text{Prisma}} = A \cdot l$



$V = A \cdot l$

Die Breite der Auffahrt ist $3\,\text{m}$:

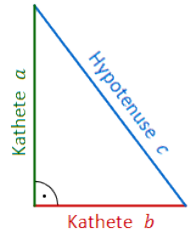
$V = A \cdot 3$

Die Grundfläche A ist ein rechtwinkliges Dreieck:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ABC berechnet sich aus der Hälfte des Produkts aus den beiden Katheten:

$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} a \cdot b$



$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 = 4$

Einsetzen der Grundfläche $A = 4$ in die Formel für das Prismavolumen:

$V = 4 \cdot 3 = 12$ (gleicher Wert wie in Aufgabe 3.2)

© Abiturloesung.de