

Fachabitur 2012 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

f sei eine ganzrationale Funktion mit der Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{1}{2}(x-6)(x-2)$ und $D_{f'} = D_f = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Geben Sie die Nullstellen der Funktion f' an, skizzieren Sie den Graphen von f' und ermitteln Sie die max. Monotonieintervalle der Funktion f .

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen G_f .

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Der Graph G_f enthält den Punkt $A(3|0)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ der Funktion f .

[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 36x - 27)$]

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheit. Runden Sie gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

[Teilergebnis: $x_3 \approx 7,85$]

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen G_f .

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $0 \leq x \leq 8$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem.

Teilaufgabe 1.7 (5 BE)

Der Graph G_f und die x -Achse begrenzen im vierten Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Gegeben sind die Funktionen $g_a : x \mapsto \frac{1}{6}x(x-a)^2$ mit $D_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Geben Sie in Abhängigkeit von a Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion g_a an.

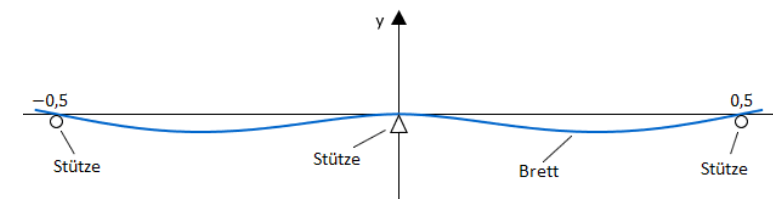
Teilaufgabe 2.2 (8 BE)

Berechnen Sie in Abhängigkeit von a diejenigen Stellen, an denen die Graphen der Funktionen f (aus 1.3) und g_a gleiche Steigung besitzen.

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)

Erläutern Sie für $a = 6$ den Zusammenhang der Graphen von f und g_6 .

Das Brett eines Bücherregals liegt auf drei Stützen, die jeweils einen Abstand von 0,5m haben und sich auf gleicher Höhe befinden. Belastet man das Brett gleichmäßig mit Büchern, so biegt es sich durch (vgl. Skizze).



Die Unterkante des Brettes kann im Bereich $D_{u_k} = [0; 0,5]$ als Graph der Funktion

$$u_k : x \mapsto k(10x^3 - 8x^4 - 3x^2)$$

aufgefasst werden, wobei $k \in \mathbb{R}^+$ vom Brett und der Belastung abhängt. $u_k(x)$ und x werden in Meter gemessen.

Runden Sie bei den folgenden Berechnungen der Aufgabengruppe 3 die Ergebnisse auf 4 Stellen nach dem Komma. Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Ermitteln Sie die Stelle x_E , für die die größte Durchbiegung des Brettes im Bereich D_{u_k} vorliegt.

[Ergebnis: $x_E \approx 0,2892$]

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Berechnen Sie den Wert für k so, dass die größte Durchbiegung zwei Millimeter beträgt.

Nun wird das Brett aus Aufgabe 3 im Bereich $-0,5 \leq x \leq 0,5$ betrachtet. Die Unterkante des Regalbretts wird jetzt durch den Graphen einer abschnittsweise definierten Funktion h beschrieben mit

$$h(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } -0,5 \leq x < 0 \\ 0,1 \cdot (10x^3 - 8x^4 - 3x^2) & \text{für } 0 \leq x \leq 0,5 \end{cases}$$

Wenn das Brett gleichmäßig belastet ist, ist der Graph der Funktion h symmetrisch zur y -Achse und ferner ist h an der Stelle $x_0 = 0$ stetig.

Teilaufgabe 4.1 (3 BE)

Ermitteln Sie unter obigen Bedingungen $v(x)$. Ihre Vorgehensweise muss durch Rechnung erkennbar sein oder verbal begründet werden.

Teilaufgabe 4.2 (4 BE)

Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x)$ und begründen Sie, ob die Funktion h an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

Lösung**Teilaufgabe 1.1** (4 BE)

f sei eine ganzrationale Funktion mit der Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{1}{2}(x-6)(x-2)$ und $D_{f'} = D_f = \mathbb{R}$.

Geben Sie die Nullstellen der Funktion f' an, skizzieren Sie den Graphen von f' und ermitteln Sie die max. Monotonieintervalle der Funktion f .

Lösung zu Teilaufgabe 1.1**Nullstellen einer Funktion**

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-6)(x-2)$$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x -Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$$f(x) = 0$$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}(x-6)(x-2) = 0$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Jeder Faktor wird untersucht.

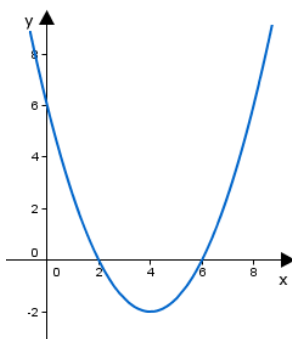
$$\begin{aligned} x-6 &= 0 \\ x_1^E &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-2 &= 0 \\ x_2^E &= 2 \end{aligned}$$

Monotonieverhalten einer Funktion

Skizze von f' :

Der Graph von f' ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Nullstellen bei $x_1^E = 6$ und $x_2^E = 2$:



Erläuterung: *Funktionswert*

Dort wo der Graph oberhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion, also in diesem Fall die erste Ableitung, positive Funktionswerte und somit positives Vorzeichen.

Dort wo der Graph unterhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion negative Funktionswerte und somit negatives Vorzeichen.

$$f'(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in]2; 6[$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]-\infty; 2[\cup]6; \infty[$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

Ist $f'(x) > 0$ in einem Intervall $]a; b[$, so ist G_f für $x \in [a; b]$ streng monoton steigend.

Ist $f'(x) < 0$ in einem Intervall $]a; b[$, so ist G_f für $x \in [a; b]$ streng monoton fallend.

$$\Rightarrow G_f \text{ ist für } x \in [2; 6] \text{ streng monoton fallend}$$

$$\Rightarrow G_f \text{ ist für } x \in]-\infty; 2[\cup]6; \infty[\text{ streng monoton steigend}$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen G_f .

Lösung zu Teilaufgabe 1.2**Krümmungsverhalten einer Funktion**

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-6)(x-2) = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 12)$$

Zweite Ableitung bilden:

$$f''(x) = \frac{1}{2}(2x - 8) = x - 4$$

Vorzeichen der zweiten Ableitung untersuchen:

$$f''(x) > 0: \quad x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 4$$

$$f''(x) < 0: \quad x - 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 4$$

Erläuterung: Krümmungsverhalten einer Funktion

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a; b]$ rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a; b]$ linksgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP} , d.h. $f''(x^{\text{WP}}) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

$\Rightarrow G_f$ ist linksgekrümmt für $x \in [4; \infty[$

$\Rightarrow G_f$ ist rechtsgekrümmt für $x \in]-\infty; 4]$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Der Graph G_f enthält den Punkt $A(3|0)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ der Funktion f .

[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 36x - 27)$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.3**Parameterwerte ermitteln**

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-6)(x-2) = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 12)$$

Stammfunktion bilden:

Erläuterung: Stammfunktion

Ist F eine Stammfunktion von f , dann gilt: $F' = f$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x \right) + c = \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x) + c$$

Bestimmen der Integrationskonstante c :

Der Graph von f verläuft durch den Punkt $A(3|0)$. Die Koordinaten des Punkts A erfüllen also die Funktionsgleichung.

$$f(3) = 0$$

$$\frac{1}{6} (3^3 - 12 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3) + c = 0$$

$$\frac{1}{6} \cdot 27 + c = 0$$

$$4,5 + c = 0$$

$$c = -4,5$$

Einsetzen von $c = -4,5$ in die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x) - 4,5 = \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x - 27)$$

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheit. Runden Sie gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

[Teilergebnis: $x_3 \approx 7,85$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.4**Nullstellen einer Funktion**

$$f(x) = \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x - 27)$$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x -Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$$f(x) = 0$$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x - 27) = 0$$

$$x^3 - 12x^2 + 36x - 27 = 0$$

Der Graph von f verläuft durch den Punkt $A(3|0)$. (siehe Aufgabe 1.3)

$$\Rightarrow f(3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1^N = 3$$

Bestimmen weiterer Nullstellen durch Polynomdivision:

Erläuterung: *Polynomdivision*

Polynome lassen sich in Summenschreibweise oder auch faktorisiert schreiben. Das Polynom $x^2 + x - 2$ beispielsweise lässt sich in Faktoren folgendermaßen schreiben:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

$x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ sind dabei die Nullstellen des Polynoms.

Bei einer Polynomdivision ist bereits eine Nullstelle bekannt. Wir haben zum Beispiel durch Rechnung oder durch Ausprobieren herausgefunden, dass $x = 1$ eine Nullstelle dieses Polynoms ist. Die zweite noch nicht bekannte Lösung, erhalten wir durch Polynomdivision.

$$\begin{array}{r} (x^2 + x - 2) : (x - 1) = x + 2 \\ -(x^2 - x) \\ \hline 2x - 2 \\ -(2x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (x^3 - 12x^2 + 36x - 27) : (x - 3) = x^2 - 9x + 9 \\ -(x^3 - 3x^2) \\ \hline -9x^2 + 36x \\ -(-9x^2 + 27x) \\ \hline 9x - 27 \\ -(9x - 27) \\ \hline 0 \end{array}$$

Bestimmen der Nullstellen des Ergebnisses der Polynomdivision:

$$x^2 - 9x + 9 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a x^2 + b x + c = 0$ lauten stets:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{2,3}^N = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{45}}{2}$$

$$x_2^N = \frac{9 + \sqrt{45}}{2} \approx 7,85$$

$$x_3^N = \frac{9 - \sqrt{45}}{2} \approx 1,15$$

Vielfachheit der Nullstellen:

$x_1^N = 3$ ist einfache Nullstelle

$x_2^N \approx 7,85$ ist einfache Nullstelle

$x_3^N \approx 1,15$ ist einfache Nullstelle

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen G_f .

Lösung zu Teilaufgabe 1.5

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f(x) = \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x - 27)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 8x + 12)$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$$f'(x^E) = 0, \quad \text{daher immer der Ansatz: } f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$x_1^E = 6 \quad (\text{siehe Aufgabe 1.1})$$

$$x_2^E = 2 \quad (\text{siehe Aufgabe 1.1})$$

Funktionswerte an den Extremstellen bestimmen:

$$f(x_1^E) = \frac{1}{6} (6^3 - 12 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 - 27) = -4,5$$

$$\Rightarrow E_1(6 | -4,5)$$

$$f(x_2^E) = \frac{1}{6} (2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 - 27) = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow E_2\left(2 \middle| \frac{5}{6}\right)$$

Art von Extrempunkten ermitteln

Art der Extrempunkte aus dem Monotonieverhalten (siehe Aufgabe 1.1) bestimmen:

G_f ist für $x \in [2; 6]$ streng monoton fallend

G_f ist für $x \in]-\infty; 2] \cup [6; \infty[$ streng monoton steigend

Erläuterung: Art eines Extremums

Die Art eines Extrempunkts kann durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt werden:

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von (+) nach (-) an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von (-) nach (+) an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

f' hat an der Stelle $x_1^E = 6$ einen Vorzeichenwechsel von (-) nach (+)

$\Rightarrow$ relativer Tiefpunkt TIP $(6 | -4,5)$

f' hat an der Stelle $x_2^E = 2$ einen Vorzeichenwechsel von (+) nach (-)

$\Rightarrow$ relativer Hochpunkt HOP $\left(2 | \frac{5}{6}\right)$

Wendepunkt ermitteln

Wendestelle aus dem Krümmungsverhalten (siehe Aufgabe 1.2) bestimmen:

G_f ist für $x \in]-\infty; 4]$ rechtsgekrümmt

G_f ist für $x \in [4; \infty[$ linksgekrümmt

Erläuterung: Wendepunkt ermitteln

Wendepunkte sind Punkte eines Funktionsgraphen, an denen sich die Krümmungsrichtung ändert. Die 2. Ableitung hat an solchen Stellen einen Vorzeichenwechsel, sie ist also zum Beispiel links des Wendepunkts positiv und rechts davon negativ. An der Wendestelle x_W selbst ist die 2. Ableitung Null.

$$f''(x_W) = 0$$

f'' hat an der Stelle $x_W = 4$ einen Vorzeichenwechsel von (-) nach (+)

$\Rightarrow$ Wendestelle bei $x_W = 4$

Funktionswert bei $x_W = 4$ bestimmen:

$$f(x_W) = \frac{1}{6} (4^3 - 12 \cdot 4^2 + 36 \cdot 4 - 27) = -\frac{11}{6}$$

$$\Rightarrow \text{Wendepunkt } WP \left(4 | -\frac{11}{6}\right)$$

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $0 \leq x \leq 8$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe 1.6**Skizze**

$$f(x) = \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x - 27)$$

Nullstellen: (siehe Aufgabe 1.4)

$$x_1^N = 3$$

$$x_2^N \approx 7,85$$

$$x_3^N \approx 1,15$$

Extremwerte: (siehe Aufgabe 1.5)

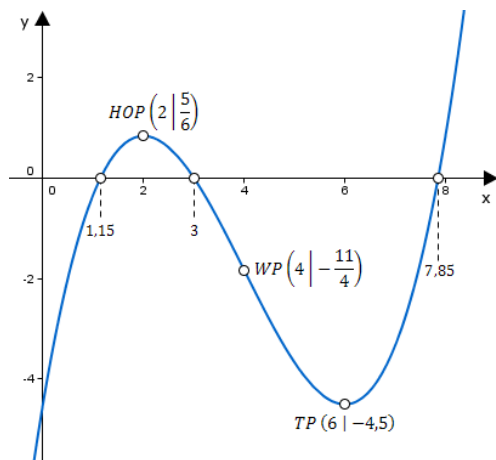
relativer Tiefpunkt TIP $(6 | -4,5)$

relativer Hochpunkt HOP $\left(2 | \frac{5}{6}\right)$

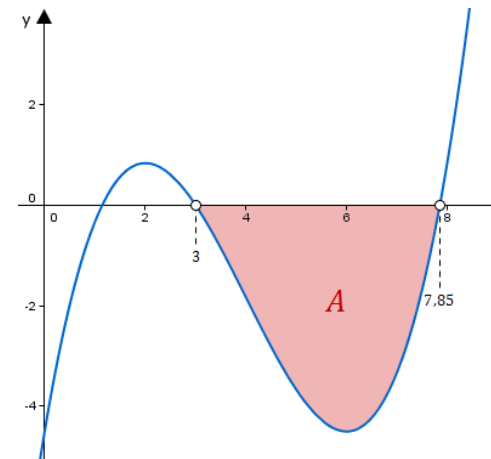
Wendepunkt: (siehe Aufgabe 1.5)

$$WP \left(4 | -\frac{11}{6}\right)$$

Skizze:

**Teilaufgabe 1.7** (5 BE)

Der Graph G_f und die x -Achse begrenzen im vierten Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Teilaufgabe 1.7**Flächenberechnung**

Flächeninhalt A bestimmen:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche, die G_f mit der x -Achse zwischen 3 und 7,85 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \left| \int_3^{7,85} f(x) dx \right|$$

$$A = \left| \int_3^{7,85} f(x) dx \right|$$

$$A = \left| \int_3^{7,85} \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x - 27) dx \right|$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f , dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \frac{1}{6} \left[\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 27x \right]_3^{7,85} \right| \\ A &= \left| \frac{1}{6} \left(\left(\frac{1}{4} \cdot (7,85)^4 - 4 \cdot (7,85)^3 + 18 \cdot (7,85)^2 - 27 \cdot (7,85) \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3^2 - 27 \cdot 3 \right) \right) \right| \\ A &\approx \left| \frac{1}{6} (-88,36 - (-6,75)) \right| \\ A &\approx \left| \frac{1}{6} \cdot (-81,61) \right| \approx 13,60 \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt ca. 13,60.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Gegeben sind die Funktionen $g_a : x \mapsto \frac{1}{6}x(x-a)^2$ mit $D_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Geben Sie in Abhängigkeit von a Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion g_a an.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Nullstellen einer Funktion

$$g_a(x) = \frac{1}{6}x(x-a)^2$$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$$f(x) = 0$$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$g_a(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{6}x(x-a)^2 = 0$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Jeder Faktor wird untersucht.

$$x = 0$$

$$x_1^N = 0$$

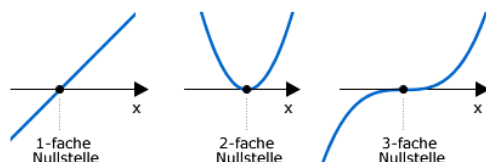
$$(x-a)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x-a = 0$$

$$x_2^N = a$$

Vielfachheit der Nullstellen:

Erläuterung: Vielfachheit von Nullstellen

Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x -Achse in einem Punkt „berührt“ oder „schneidet“.



1-fache Nullstelle: Schnittstelle mit der x -Achse.

2-fache (doppelte) Nullstelle: Berührstelle mit der x -Achse.

3-fache Nullstelle: Nullstelle ist ein Sattelpunkt/Terrassenpunkt.

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= (x-2)(x-2) \Rightarrow x=2 \text{ ist doppelte Nullstelle} \\ (x+5)^3 &= (x+5)(x+5)(x+5) \Rightarrow x=-5 \text{ ist dreifache Nullstelle}\end{aligned}$$

In diesem Fall berührt der Graph G_{f-p} die x -Achse an der Stelle $x_1 = 0$ und schneidet sie an der Stelle $x_2 = 5$.

Fallunterscheidung:**Erläuterung: Fallunterscheidung**

Der Faktor $(x-a)$ verändert sich für verschiedene Werte von a .

Spezialfall ist $a = 0$.

Hier nimmt der Faktor die Form eines anderen Faktors an, der in der Funktionsgleichung vorkommt.

$$\begin{aligned}1. \text{ Fall: } a &= 0 \Rightarrow g_0(x) = \frac{1}{6}x(x-0)^2 = \frac{1}{6}x^3 \\ x &= 0 \text{ ist dreifache Nullstelle}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \text{ Fall: } a &\neq 0 \Rightarrow g_a(x) = \frac{1}{6}x(x-a)^2 \\ x &= 0 \text{ ist einfache Nullstelle} \\ x &= a \text{ ist doppelte Nullstelle}\end{aligned}$$

Teilaufgabe 2.2 (8 BE)

Berechnen Sie in Abhängigkeit von a diejenigen Stellen, an denen die Graphen der Funktionen f (aus 1.3) und g_a gleiche Steigung besitzen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2**Parameterwerte ermitteln**

$$f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 36x - 27)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-6)(x-2)$$

$$g_a(x) = \frac{1}{6}x(x-a)^2 = \frac{1}{6}x(x^2 - 2ax + a^2) = \frac{1}{6}(x^3 - 2ax^2 + a^2x)$$

Erste Ableitung von $g_a(x)$ bilden:

$$g'_a(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 4ax + a^2)$$

Gleichsetzen der Ableitungen:

Erläuterung: Gleichsetzen

Gesucht ist der x -Wert, für den die Funktionen f und g_a die gleiche Steigung besitzen.

Da die Steigung einer Funktion durch die erste Ableitung gegeben ist, müssen die Ableitungen f' und g'_a an der gesuchten Stelle x den selben Wert ergeben.

$$f'(x) = g'_a(x)$$

Diese Gleichung löst man nach x auf.

$$f'(x) = g'_a(x)$$

$$\frac{1}{2}(x-6)(x-2) = \frac{1}{6}(3x^2 - 4ax + a^2) \mid \cdot 6$$

$$3(x-6)(x-2) = 3x^2 - 4ax + a^2$$

$$3(x^2 - 8x + 12) = 3x^2 - 4ax + a^2$$

$$3x^2 - 24x + 36 = 3x^2 - 4ax + a^2$$

$$-24x + 36 = -4ax + a^2$$

$$4ax - 24x = a^2 - 36$$

$$4x(a - 6) = (a + 6)(a - 6) \quad (3. \text{ Binomische Formel})$$

Fallunterscheidung:

Erläuterung:

Der Faktor $(a - 6)$ verändert sich für verschiedene Werte von a .
 Spezialfall ist $a = 6$.
 Hier nimmt der Faktor den Wert Null an.

1. Fall: $a = 6$

$$4x \cdot 0 = (a + 6) \cdot 0$$

$$0 = 0 \quad (\text{wahre Aussage})$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'_6(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ und g_6 besitzen überall die gleiche Steigung

2. Fall: $a \neq 6$

$$4x(a - 6) = (a + 6)(a - 6) : (a - 6)$$

$$4x = a + 6$$

$$x = \frac{a + 6}{4}$$

$\Rightarrow f$ und g_a besitzen für $x = \frac{a + 6}{4}$ die gleiche Steigung

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)

Erläutern Sie für $a = 6$ den Zusammenhang der Graphen von f und g_6 .

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Verschiebung von Funktionsgraphen

$$g_a(x) = \frac{1}{6} (x^3 - 2ax^2 + a^2x)$$

$$g_6(x) = \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x)$$

$$f(x) = \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x - 27) = \frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 36x) - 4,5$$

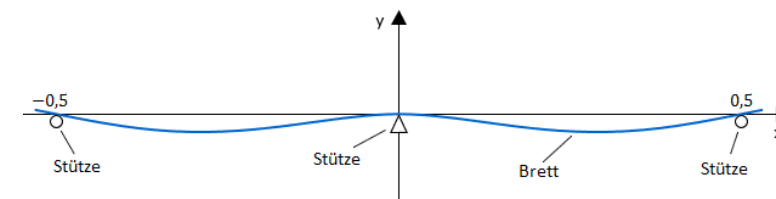
Vergleichen der Funktionsterme von g_6 mit f :

Die Funktionsterme sind bis auf eine additive Konstante identisch.

$\Rightarrow$ Der Graph von f ist gegenüber dem Graphen von g_a
 um 4,5 LE nach unten verschoben.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Das Brett eines Bücherregals liegt auf drei Stützen, die jeweils einen Abstand von 0,5m haben und sich auf gleicher Höhe befinden. Belastet man das Brett gleichmäßig mit Büchern, so biegt es sich durch (vgl. Skizze).



Die Unterkante des Brettes kann im Bereich $D_{u_k} = [0; 0,5]$ als Graph der Funktion

$$u_k : x \mapsto k (10x^3 - 8x^4 - 3x^2)$$

aufgefasst werden, wobei $k \in \mathbb{R}^+$ vom Brett und der Belastung abhängt. $u_k(x)$ und x werden in Meter gemessen.

Runden Sie bei den folgenden Berechnungen der Aufgabengruppe 3 die Ergebnisse auf 4 Stellen nach dem Komma. Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet.

Ermitteln Sie die Stelle x_E , für die die größte Durchbiegung des Brettes im Bereich D_{u_k} vorliegt.

[Ergebnis: $x_E \approx 0,2892$]

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Extremwertaufgabe

$$u_k(x) = k (10x^3 - 8x^4 - 3x^2) \quad D_{u_k} = [0; 0, 5]$$

Erste Ableitung bilden:

$$u'_k(x) = k (30x^2 - 32x^3 - 6x) \quad D_{u'_k} =]0; 0, 5[$$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$$f'(x^E) = 0, \quad \text{daher immer der Ansatz: } f'(x) = 0$$

$$u'_k(x) = 0$$

$$k (30x^2 - 32x^3 - 6x) = 0$$

$$30x^2 - 32x^3 - 6x = 0$$

$$2x (15x - 16x^2 - 3) = 0$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.
Jeder Faktor wird untersucht.

$x = 0$ (Randwert $\Rightarrow$ keine Durchbiegung des Brettes)

$$15x - 16x^2 - 3 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ lauten stets:

$$x_{1,2}^E = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}^E = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-16)} = \frac{-15 \pm \sqrt{33}}{-32}$$

$$x_1^E = \frac{-15 + \sqrt{33}}{-32} \approx 0,2892$$

$$\left(x_2^E = \frac{-15 - \sqrt{33}}{-32} \approx 0,6483 \notin D_{u_k} \right)$$

Zweite Ableitung bilden:

$$u''_k(x) = k (60x - 96x^2 - 6) \quad D_{u''_k} =]0; 0, 5[$$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'(x^E) = 0$ und $f''(x^E) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'(x^E) = 0$ und $f''(x^E) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Stelle $x_1^E = 0,2892$ untersuchen:

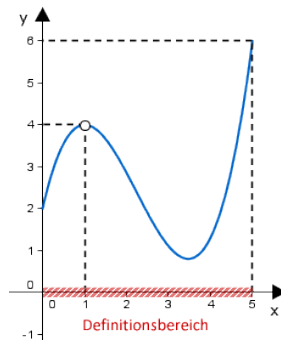
$$u''_k(0,2892) \approx \underbrace{k}_{>0} \cdot 3,3229 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rel. Minimum für } x^E = 0,2892$$

Erläuterung: Randbetrachtung

Bei Extremwertaufgaben ist der Definitionsbereich einer Funktion oft aufgrund realer Bedingungen eingeschränkt.

Die Funktionswerte können an den Rändern des Definitionsbereichs größer sein als das relative Maximum. Dies muss überprüft werden.

Beispiel:



Diese Funktion hat zwar ein relatives Maximum im Punkt $HOP(1|4)$, dies ist jedoch nicht der größte Wert, den die Funktion im gesamten Definitionsbereich annehmen kann.

Bei $(5|6)$ gibt es am Rand des Definitionsbereichs damit noch einen größeren Wert. Dies wäre dann hier das globale Maximum.

Randbetrachtung:

$$\begin{array}{l} u_k(0) = 0 \\ u_k(0, 5) = 0 \end{array} \quad \} > u_k(0, 2892) \approx \underbrace{-0,06 \cdot k}_{<0}$$

$\Rightarrow$ abs. Minimum $x^E = 0, 2892$

$\Rightarrow$ abs. max. Durchbiegung bei $x^E = 0, 2892$

Alternative Lösung

Alternative zur Randbetrachtung:

Die Funktion $u'_k(x)$ hat in $D_{u'_k} =]0; 0, 5[$ nur eine Nullstelle, somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf. Das relative Minimum ist ein absolutes Minimum der Funktion $u_k(x)$.

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Berechnen Sie den Wert für k so, dass die größte Durchbiegung zwei Millimeter beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2**Parameterwerte ermitteln**

$$u_k(x) = k (10x^3 - 8x^4 - 3x^2)$$

Maximale Durchbiegung bei $x^E \approx 0, 2892$ (siehe Aufgabe 3.1)

Gesucht ist der Wert k so, dass die Durchbiegung an der Stelle $x^E \approx 0, 2892$ gleich 2 mm beträgt.

Da $u_k(x)$ in Metern angegeben wird, müssen die 2 mm zunächst umgerechnet werden:

$$2 \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0, 002 \text{ m}$$

Ansatz:

$$u_k(0, 2892) = -0, 002$$

$$k (10 \cdot 0, 2892^3 - 8 \cdot 0, 2892^4 - 3 \cdot 0, 2892^2) = -0, 002$$

$$-0, 0650k = -0, 002$$

$$k \approx 0, 0308$$

Teilaufgabe 4.1 (3 BE)

Nun wird das Brett aus Aufgabe 3 im Bereich $-0, 5 \leq x \leq 0, 5$ betrachtet. Die Unterkante des Regalbretts wird jetzt durch den Graphen einer abschnittsweise definierten Funktion h beschrieben mit

$$h(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } -0,5 \leq x < 0 \\ 0,1 \cdot (10x^3 - 8x^4 - 3x^2) & \text{für } 0 \leq x \leq 0,5 \end{cases}$$

Wenn das Brett gleichmäßig belastet ist, ist der Graph der Funktion h symmetrisch zur y -Achse und ferner ist h an der Stelle $x_0 = 0$ stetig.

Ermitteln Sie unter obigen Bedingungen $v(x)$. Ihre Vorgehensweise muss durch Rechnung erkennbar sein oder verbal begründet werden.

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Funktionsgleichung ermitteln

$$u_{0,1}(x) = 0,1 \cdot (10x^3 - 8x^4 - 3x^2)$$

Der Graph von h soll symmetrisch zur y -Achse sein.

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

G_g ist achsensymmetrisch zur y -Achse wenn gilt: $g(-x) = g(x)$

G_g ist punktsymmetrisch zum Ursprung wenn gilt: $g(-x) = -g(x)$

Bestimme $v(x)$ so, dass $h(x) = h(-x)$

$$\Rightarrow v(x) = u_{0,1}(-x)$$

$$v(x) = u_{0,1}(-x) = 0,1 \cdot (10 \cdot (-x)^3 - 8 \cdot (-x)^4 - 3 \cdot (-x)^2)$$

$$= 0,1 \cdot (-10x^3 - 8x^4 - 3x^2)$$

Aufgrund der Symmetrie zur y -Achse ist h bei $x = 0$ stetig.

Teilaufgabe 4.2 (4 BE)

Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x)$ und begründen Sie, ob die Funktion h an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Differenzierbarkeit einer Funktion

$$h(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } -0,5 \leq x < 0 \\ 0,1 \cdot (10x^3 - 8x^4 - 3x^2) & \text{für } 0 \leq x \leq 0,5 \end{cases}$$

Erste Ableitung von h bestimmen:

Erläuterung:

Eine abschnittsweise definierte Funktion wird auch abschnittsweise abgeleitet. Man bildet die Ableitungen der Teilfunktionen:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x < x_0 \\ g(x) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{für } x < x_0 \\ g'(x) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$$

Ist h an der Stelle x_0 nicht differenzierbar oder ist nicht bekannt, ob h bei x_0 differenzierbar ist, so sollte x_0 bei der Ableitung ausgeschlossen werden.

Es ergibt sich:

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{für } x < x_0 \\ g'(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} 0,1 \cdot (-30x^2 - 32x^3 - 6x) & \text{für } -0,5 < x < 0 \\ 0,1 \cdot (30x^2 - 32x^3 - 6x) & \text{für } 0 < x \leq 0,5 \end{cases}$$

Berechnen des rechtsseitigen Grenzwertes.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0,1 \cdot (30x^2 - 32x^3 - 6x) = 0$$

Berechnen des linksseitigen Grenzwertes.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0,1 \cdot (-30x^2 - 32x^3 - 6x) = 0$$

Differenzierbarkeit:

Erläuterung: *Differenzierbarkeit einer Funktion*

Eine Funktion f ist genau dann bei x_0 differenzierbar, wenn es an dieser Stelle eine eindeutige Tangente an den Graphen gibt.

Dies ist nur der Fall, wenn der Graph an dieser Stelle weder einen Sprung noch einen Knick aufweist.

Die Funktion h ist bei $x_0 = 0$ stetig (siehe Aufgabe 4.1).
(kein Sprung im Graphen bei $x_0 = 0$)

Der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert der ersten Ableitung sind identisch.
(kein Knick im Graphen bei $x_0 = 0$)

Die Funktion h ist also an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar.