Abitur 2012 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Teilaufgabe Teil 1 1 (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+4x+3}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Bestimmen Sie D sowie die Nullstelle von f.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto x \cdot e^{-2x}$.

Teilaufgabe Teil 1 2a (5 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, in dem der Graph von g eine waagrechte Tangente hat.

Teilaufgabe Teil 1 2b (2 BE)

Geben Sie das Verhalten von g für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h : x \mapsto -\ln x + 3$.

Teilaufgabe Teil 1 3a (2 BE)

Geben Sie an, wie der Graph von h schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \mapsto \ln x$ hervorgeht.

Teilaufgabe Teil 1 3b (4 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(1|h(1))$.

Teilaufgabe Teil 1 4a (1 BE)

Warum hat jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle?

Teilaufgabe Teil 1 4b (3 BE)

Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f an, sodass die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F : x \mapsto \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ genau zwei Nullstellen besitzt. Geben Sie die Nullstellen von F an.

An einer Wand im Innenhof der von Antoni Gaudi gestalteten Casa Batllo in Barcelona findet man ein Keramikkunstwerk (vgl. Abbildung 1).

Der annähernd parabelförmige obere Rand des Kunstwerks soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion modellhaft dargestellt werden. Auf dem Graphen sollen bei Verwendung des eingezeichneten Koordinatensystems die Punkte $A(-2|0)$, $B(2|0)$ und $C(0|5)$ liegen (1 LE entspricht 1 m, d.h. das Kunstwerk ist 5 m hoch).

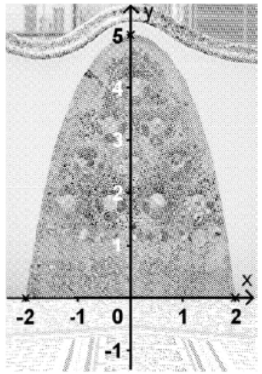


Abb. 1

Teilaufgabe Teil 2 1a (3 BE)

Ermitteln Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten quadratischen Funktion p, deren Graph durch die Punkte A, B und C verläuft.

(zur Kontrolle: $p(x) = -1,25x^2 + 5$)

Ein den oberen Rand des Kunstwerks genauer darstellendes Modell liefert der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion q vierten Grades mit $q(x) = -0,11x^4 - 0,81x^2 + 5$. Der Graph von q wird mit G_q bezeichnet.

Teilaufgabe Teil 2 1b (7 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_q symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, durch die Punkte A und B verläuft und genau einen Extrempunkt besitzt.

Abbildung 2 zeigt die Graphen von p und q.

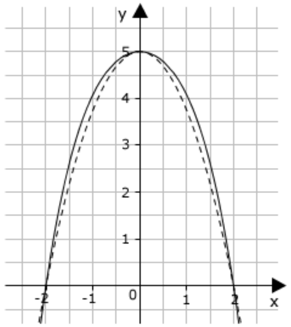


Abb.2

Teilaufgabe Teil 2 1c (2 BE)

Welcher der beiden dargestellten Graphen ist G_q ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Teilaufgabe Teil 2 1d (5 BE)

Im Intervall $]0;2[$ gibt es eine Stelle x_0, an der der Wert der Differenz $d(x) = q(x) - p(x)$ maximal wird. Berechnen Sie x_0 sowie den Wert der zugehörigen Differenz.

Teilaufgabe Teil 2 1e (4 BE)

Berechnen Sie mithilfe der Funktion q einen Näherungswert für den Flächeninhalt A des vom Kunstwerk eingenommenen Teils der Wand.

Teilaufgabe Teil 2 1f (4 BE)

Die Gerade mit der Gleichung $y = 1,1$ teilt im Modell den vom Kunstwerk eingenommenen Teil der Wand in zwei unterschiedlich gestaltete Bereiche. Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Funktion q das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Bereiche näherungsweise bestimmen kann. Geben Sie dazu geeignete Ansätze an und kommentieren Sie diese.

Unter dem Wasserdurchfluss eines Bachs an einer bestimmten Stelle versteht man das Volumen des Wassers, das an dieser Stelle in einer bestimmten Zeit vorbeifließt. Die Funktion f beschreibt die zeitliche Entwicklung des Wasserdurchflusses eines Bachs an einer Messstelle, nachdem zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bachaufwärts gelegene Schleuse geöffnet wurde. Abbildung 3 zeigt den Graphen G_f von f.

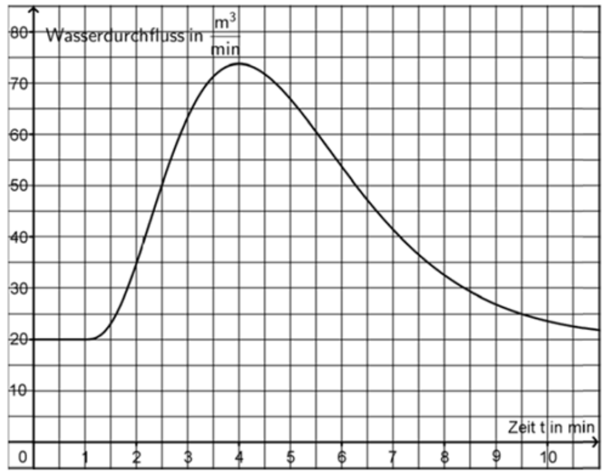


Abb.3

Teilaufgabe Teil 2 2a (5 BE)

Entnehmen Sie Abbildung 3 im Bereich $t > 1$ Näherungswerte für die Koordinaten des Hochpunkts sowie für die t-Koordinaten der beiden Wendepunkte von G_f und geben Sie unter Berücksichtigung dieser Näherungswerte die jeweilige Bedeutung der genannten Punkte im Sachzusammenhang an.

Teilaufgabe Teil 2 2b (5 BE)

Bestimmen Sie $\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t$ näherungsweise mithilfe von Abbildung 3. Deuten Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil 2 2c (5 BE)

Bestimmen Sie mithilfe von G_f für $t = 4$ und $t = 3$ jeweils einen Näherungswert für die mittlere Änderungsrate von f im Zeitintervall $[2; t]$. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abbildung 3 durch geeignete Steigungsdreiecke. Welche Bedeutung hat der Grenzwert der mittleren Änderungsraten für $t \to 2$ im Sachzusammenhang?

Lösung

Teilaufgabe Teil 1 1 (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+4x+3}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Bestimmen Sie D sowie die Nullstelle von f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 1

Definitionsbereich bestimmen

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+4x+3}$$

Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*

$f(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $x^2 + 4x + 3$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$x_1 = -1 \;\; ; \;\; x_2 = -3$$

$$\Rightarrow \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\}$$

Nullstellen einer Funktion

Nullstelle bestimmen:

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2x+3}{x^2+4x+3} = 0$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$2x + 3 = 0$

$$\Rightarrow \qquad x = -\frac{3}{2}$$

Teilaufgabe Teil 1 2a (5 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto x \cdot e^{-2x}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, in dem der Graph von g eine waagrechte Tangente hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 2a

Waagerechte Tangenten

$g(x) = x \cdot e^{-2x}$

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m einer Tangente t an dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S\ (x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

In diesem Fall ist $u(x) = x$ und $v(x) = e^{-2x}$.

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$$f(x) = e^{g(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

In diesem Fall ist $g(x) = -2x$.

$g'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$

$g'(x) = e^{-2x} - 2x \cdot e^{-2x}$

$g'(x) = e^{-2x} \cdot (1 - 2x)$

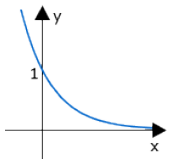
Erläuterung: *Waagerechte Tangente*

Die Steigung einer waagerechten Tangente ist gleich Null.

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*

Die Exponentialfunktion e^{-2x} ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.



$$g'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{e^{-2x}}_{>0} \cdot (1 - 2x) = 0$$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$$

Da $e^{-2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, muss nur der Term $1 - 2x$ untersucht werden.

$$1 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

G_g hat an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ eine waagerechte Tangente.

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2e}$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{1}{2} \Big| \frac{1}{2e}\right)$$

Teilaufgabe Teil 1 2b (2 BE)

Geben Sie das Verhalten von g für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

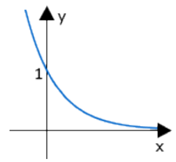
Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 2b

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$$g(x) = x \cdot e^{-2x}$$

Erläuterung: *Eigenschaften der Exponentialfunktion*

Die Exponentialfunktion e^{-2x} ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.
Der Graph fällt streng monoton.



$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x}_{x \to -\infty} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{x \to \infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \underbrace{x}_{x \to \infty} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{x \to 0}$$

Erläuterung: *Grenzwert*

Der Ausdruck " $0 \cdot \infty$" ist unbestimmt, d.h. es kann keine Aussage über das Grenzverhalten der Funktion getroffen werden.

Durch umformen des Produkts in einem Bruch, wird das Grenzverhalten auf das einer bekannten Funktion zurückgeführt.

Aus der Merkhilfe für das G8 Abitur: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^r}{e^x} = 0 \qquad (r > 0)$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$$

Teilaufgabe Teil 1 3a (2 BE)

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h : x \mapsto -\ln x + 3$.

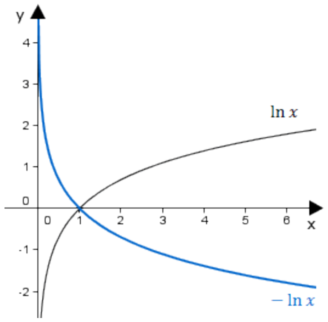
Geben Sie an, wie der Graph von h schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \mapsto \ln x$ hervorgeht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3a

Verschiebung von Funktionsgraphen

1. Spiegelung an der x-Achse:

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

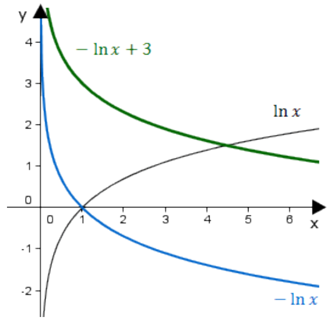


Wenn eine Funktion mit (-1) multipliziert wird, dann wird ihr Graph an der x-Achse gespiegelt.

$\ln x \mapsto -\ln x$

2. Verschiebung nach oben entlang der y-Achse um 3 Einheiten:

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

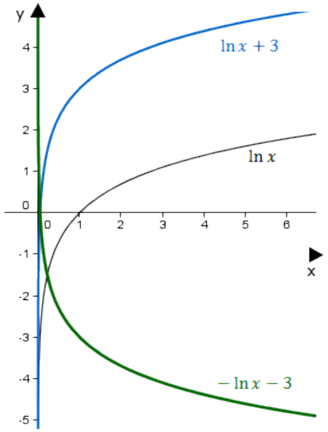


$-\ln x \mapsto -\ln x + 3$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*

Ändert man die Reihenfolge der Verschiebungen, so ensteht eine andere Funktion:

$\ln x \mapsto \ln x + 3 \mapsto -(\ln x + 3)$



(Bemerkung: Reihenfolge der Verschiebungen beachten!)

Teilaufgabe Teil 1 3b (4 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(1|h(1))$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3b

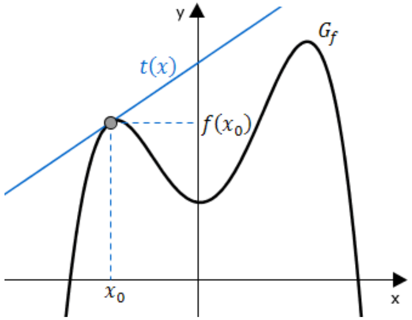
Tangentengleichung ermitteln

$h(x) = -\ln x + 3$

Tangentengleichung t im Punkt $(1|h(1))$:

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung: $t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



$t : y = (x - x_0) \cdot h'\,(x_0) + h\,(x_0)$

$t : y = (x - 1) \cdot h'\,(1) + h\,(1)$

Nebenrechnungen:

$h'(x) = -\dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad h'(1) = -1$

$h(1) = \underbrace{-\ln 1}_{0} + 3 = 3$

$t : y = (x - 1) \cdot (-1) + 3$

$t : y = -x + 4$

Teilaufgabe Teil 1 4a (1 BE)

Warum hat jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle?

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 4a

Eigenschaften der Integralfunktion

Jede Integralfunktion $I_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ hat mindestens eine Nullstelle, da die Integrationsgrenze a (Integrationsanfang) stets Nullstelle ist:

$$I_a(a) = \int\limits_a^a f(t)\mathrm{d}t = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

Teilaufgabe Teil 1 4b (3 BE)

Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f an, sodass die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F: x \mapsto \int\limits_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$ genau zwei Nullstellen besitzt. Geben Sie die Nullstellen von F an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 4b

Eigenschaften der Integralfunktion

Zum Beispiel: $f(t) = t$

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

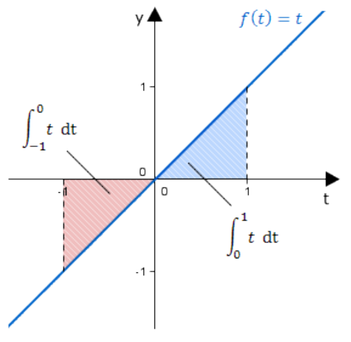
Jede Integralfunktion $I_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ hat mindestens eine Nullstelle, da die Integrationsgrenze a (Integrationsanfang) stets Nullstelle ist:

$$I_a(a) = \int\limits_a^a f(t)\mathrm{d}t = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

Die Integralfunktion hat dann die Nullstellen $x_1 = -1$ (Integrationsanfang) und $x_2 = 1$.

Probe: $F(1) = \int\limits_{-1}^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*



$$F(1) = \int\limits_{-1}^1 t\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^0 t\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t = 0$$

Das bestimmte Integral $\int\limits_{-1}^1 t\,\mathrm{d}t$ entspricht der Differenz (Fläche unterhalb der t-Achse ist negativ) der zwei Flächen die der Graph G_f mit der t-Achse zwischen -1 und 1 einschließt.

Da beide Flächen gleichen Inhalt haben, ist ihre Differenz gleich Null (Nullstelle der Ingralfunktion).

Teilaufgabe Teil 2 1a (3 BE)

An einer Wand im Innenhof der von Antoni Gaudi gestalteten Casa Batllo in Barcelona findet man ein Keramikkunstwerk (vgl. Abbildung 1).

Der annähernd parabelförmige obere Rand des Kunstwerks soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion modellhaft dargestellt werden. Auf dem Graphen sollen bei Verwendung des eingezeichneten Koordinatensystems die Punkte $A(-2|0)$, $B(2|0)$ und $C(0|5)$ liegen (1 LE entspricht 1 m, d.h. das Kunstwerk ist 5 m hoch).

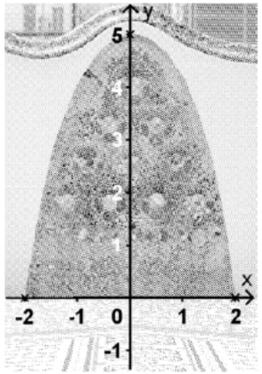


Abb.1

Ermitteln Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten quadratischen Funktion p, deren Graph durch die Punkte A, B und C verläuft.

(zur Kontrolle: $p(x) = -1,25x^2 + 5$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1a

Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben: $A(-2|0)$, $B(2|0)$ und $C(0|5)$

Erläuterung: *Linearfaktorzerlegung*

Die Linearfaktorzerlegung einer quadratischen Funktion p mit den Nullstellen x_1 und x_2 lautet:

$$p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \qquad , \qquad a \in \mathbb{R}$$

Da hier der Graph von p durch die Punkte A und B verläuft, hat die gesuchte Funktion p die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

Gesucht: $p(x) = a \cdot (x-2)(x+2) = a\left(x^2 - 4\right)$

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Graph der Funktion p verläuft durch den Punkt C. Die Koordinaten von C erfüllen somit die Funktionsgleichung von p.

$p(0) = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad a\left(0^2 - 4\right) = 5$

$-4a = 5$

$\Rightarrow \quad a = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow \quad p(x) = -\frac{5}{4}\left(x^2 - 4\right) = -1,25x^2 + 5$

Alternative Lösung

Ansatz: $p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{array}{lll} I. & p(-2) & = 0 \\ II. & p(2) & = 0 \\ III. & p(0) & = 5 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lll} I. & 4a - 2b + c & = 0 \\ II. & 4a + 2b + c & = 0 \\ III. & c & = 5 \end{array}$$

III. in I. und II. einsetzen:

$$\begin{array}{ll} I. & 4a - 2b + 5 = 0 \\ II. & 4a + 2b + 5 = 0 \end{array}$$

I. und II. addieren:

$$\begin{array}{ll} I. & 4a - 2b + 5 = 0 \\ II. & 8a + 10 = 0 \quad \Rightarrow a = -\frac{5}{4} \end{array}$$

II. in I. einsetzen:

$4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) - 2b + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

$a = -\frac{5}{4}$, $b = 0$ und $c = 5$ in p einsetzen:

$p(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 5$

Teilaufgabe Teil 2 1b (7 BE)

Ein den oberen Rand des Kunstwerks genauer darstellendes Modell liefert der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion q vierten Grades mit $q(x) = -0,11x^4 - 0,81x^2 + 5$. Der Graph von q wird mit G_q bezeichnet.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_q symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, durch die Punkte A und B verläuft und genau einen Extrempunkt besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1b

Symmetrieverhalten einer Funktion

$q(x) = -0,11x^4 - 0,81x^2 + 5$

> Erläuterung: *Symmetrieverhalten*
>
> G_q ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, wenn gilt: $\quad q(-x) = q(x)$

$q(-x) = -0,11(-x)^4 - 0,81(-x)^2 + 5 = -0,11x^4 - 0,81x^2 + 5 = q(x)$

$\Rightarrow \quad G_q$ it achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

Funktionswert berechnen

$A(-2|0), \; B(2|0)$

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> Wenn der Graph der Funktion q durch die Punkte A und B verläuft, dann erfüllen die Koordinaten dieser Punkte die Funktionsgleichung von q.

Es soll gelten: $q(-2) = 0$ und $q(2) = 0$

$q(-2) = -0,11(-2)^4 - 0,81(-2)^2 + 5 = 0$

$q(2) = -0,11(2)^4 - 0,81(2)^2 + 5 = 0$

(Bemerkung: Wegen der Achsensymmetrie gilt $q(-2) = q(2)$.)

Art von Extrempunkten ermitteln

Erste Ableitung bilden:

$q'(x) = -0,44x^3 - 1,62x$

$q'(x) = -x \cdot \left(0,44x^2 + 1,62\right)$

Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen:

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:
>
> $f'\left(x^E\right) = 0$, $\quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

$q'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -x \cdot \left(0,44x^2 + 1,62\right) = 0$

> Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*
>
> Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:
>
> $a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0$ $\quad$ und/oder $\quad b = 0$

$0,44x^2 + 1,62 = 0$

$0,44x^2 = -1,62 \quad \Rightarrow$ Keine Lösung/Nullstelle

$-x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^E = 0$

Der Graph der Funktion q hat nur an der Stelle $x = 0$ eine mögliche Extremstelle.

Zweite Ableitung bilden:

$q''(x) = -1,32x^2 - 1,62$

Prüfen, ob es sich um eine Extremstelle handelt:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$q''(0) = -1,62 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ Extrempunkt an der Stelle $x^E = 0$.

Teilaufgabe Teil 2 1c (2 BE)

Abbildung 2 zeigt die Graphen von p und q.

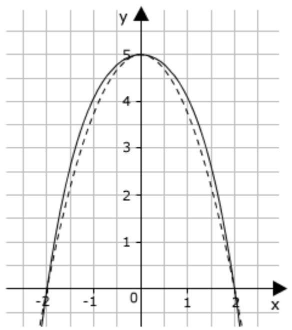


Abb.2

Welcher der beiden dargestellten Graphen ist G_q ? Begründen Sie Ihre Antwort.

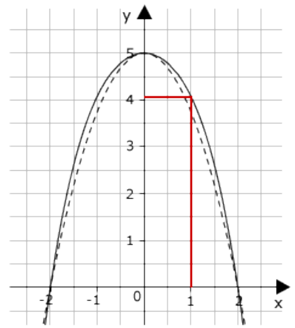
Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1c

Funktionswert berechnen

$p(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 5, \qquad q(x) = -0,11x^4 - 0,81x^2 + 5$

$p(1) = 3,75$

$q(1) = 4,08$



$\Rightarrow \quad G_q$ ist der obere Graph.

Teilaufgabe Teil 2 1d (5 BE)

Im Intervall $]0;2[$ gibt es eine Stelle x_0, an der der Wert der Differenz $d(x) = q(x) - p(x)$ maximal wird. Berechnen Sie x_0 sowie den Wert der zugehörigen Differenz.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1d

Extremwertaufgabe

$q(x) = -0,11x^4 - 0,81x^2 + 5$

$p(x) = -1,25x^2 + 5$

$\Rightarrow \quad d(x) = q(x) - p(x) = -0,11x^4 + 0,44x^2$

Erste Ableitung bilden:

$d'(x) = -0,44x^3 + 0,88x = -0,44x \cdot \left(x^2 - 2\right)$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

$d'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -0,44x \cdot \left(x^2 - 2\right) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad$ und/oder $\quad b = 0$

$x^2 - 2 = 0$

$x_0 = \sqrt{2} \quad$ (und $x_1 = -\sqrt{2} \notin]0;2[$)

$(-0,44x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0 \notin]0;2[)$

Prüfen, ob es sich um eine Extremstelle handelt:

Zweite Ableitung bilden:

$d''(x) = -1,32x^2 + 0,88$

$x_0 = \sqrt{2}$ in $d''(x)$ einsetzen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$d''\left(\sqrt{2}\right) = -1,76 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum an der Stelle $x_0 = \sqrt{2}$

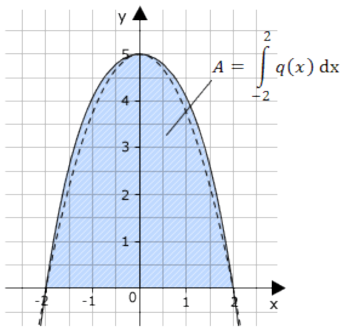
$\Rightarrow$ An der Stelle $x_0 = \sqrt{2}$ nimmt $d(x)$ den maximalen Wert $d\left(\sqrt{2}\right) = 0,44$ an.

Teilaufgabe Teil 2 1e (4 BE)

Berechnen Sie mithilfe der Funktion q einen Näherungswert für den Flächeninhalt A des vom Kunstwerk eingenommenen Teils der Wand.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1e

Flächenberechnung



$q(x) = -0,11x^4 - 0,81x^2 + 5$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche, die G_q mit der x-Achse einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral $A = \int\limits_{-2}^{2} q(x)\text{d}x$.

$$A = \int_{-2}^{2} q(x)\mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Achsensymmetrie*

Der Graph von q ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse (siehe Teilaufgabe Teil 2 1b).

$$A = 2 \cdot \int_{0}^{2} q(x)\mathrm{dx}$$

$$A = 2 \cdot \int_{0}^{2} \left(-0,11x^4 - 0,81x^2 + 5\right)\ \mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_{a}^{b} f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = 2 \cdot \left[-\frac{0,11}{5}x^5 - \frac{0,81}{3}x^3 + 5x\right]_0^2$$

$$A = 2 \cdot \left(-\frac{0,11}{5} \cdot 2^5 - \frac{0,81}{3} \cdot 2^3 + 5 \cdot 2\right) - 0$$

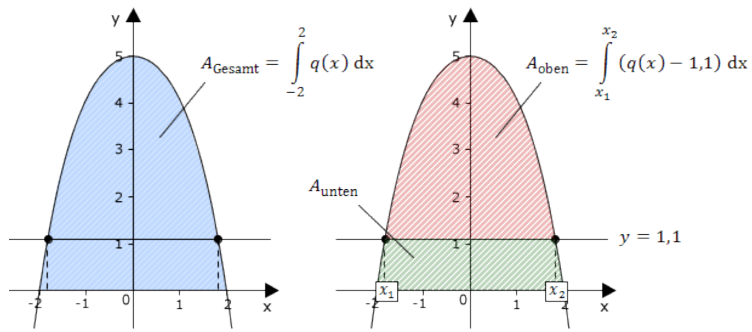
$$A = 14,272\ \text{FE}$$

Teilaufgabe Teil 2 1f (4 BE)

Die Gerade mit der Gleichung $y = 1,1$ teilt im Modell den vom Kunstwerk eingenommenen Teil der Wand in zwei unterschiedlich gestaltete Bereiche. Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Funktion q das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Bereiche näherungsweise bestimmen kann. Geben Sie dazu geeignete Ansätze an und kommentieren Sie diese.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1f

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



$$A_{\text{Gesamt}} = \int_{-2}^{2} q(x)\mathrm{dx}$$

Die Gesamtfläche entspricht der Fläche, die der Graph der Funktion $q(x)$ mit der x-Achse zwischen -2 und 2 einschließt.

$$A_{\text{oben}} = \int_{x_1}^{x_2} \left(q(x) - 1,1\right)\ \mathrm{dx} = 2\int_{0}^{x_2} \left(q(x) - 1,1\right)\ \mathrm{dx}$$

Die Fläche des oberen Bereichs entspricht der Fläche, die von den Graphen der Funktionen $q(x)$ und $y = 1,1$ eingeschlossen wird. Die Integrationsgrenzen x_1 und x_2 sind die x-Werte der Schnittpunkte der beiden Graphen $(q(x) \cap y)$. Wegen der Symmetrie von G_q gilt auch:

$$A_{\text{oben}} = 2\int_{0}^{x_2} \left(q(x) - 1,1\right)\ \mathrm{dx}$$

$$A_{\text{unten}} = A_{\text{Gesamt}} - A_{\text{oben}}$$

Die Fläche des unteren Bereichs entspricht der obigen Differenz.

Verhältnis der Flächeninhalte: $\dfrac{A_{\text{oben}}}{A_{\text{unten}}} = \dfrac{A_{\text{oben}}}{A_{\text{Gesamt}} - A_{\text{oben}}}$

Teilaufgabe Teil 2 2a (5 BE)

Unter dem Wasserdurchfluss eines Bachs an einer bestimmten Stelle versteht man das Volumen des Wassers, das an dieser Stelle in einer bestimmten Zeit vorbeifließt. Die Funktion f beschreibt die zeitliche Entwicklung des Wasserdurchflusses eines Bachs an einer Messstelle, nachdem zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bachaufwärts gelegene Schleuse geöffnet wurde. Abbildung 3 zeigt den Graphen G_f von f.

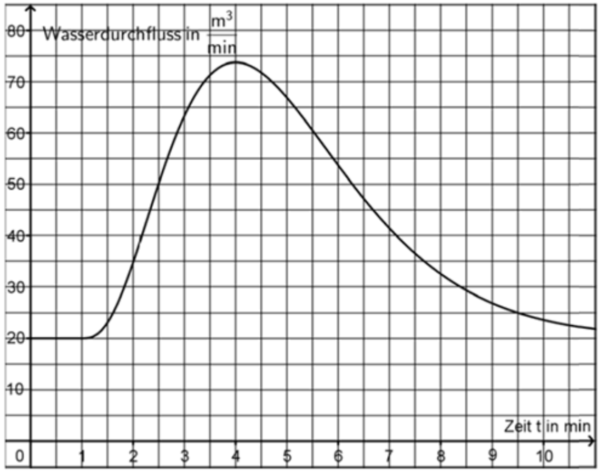
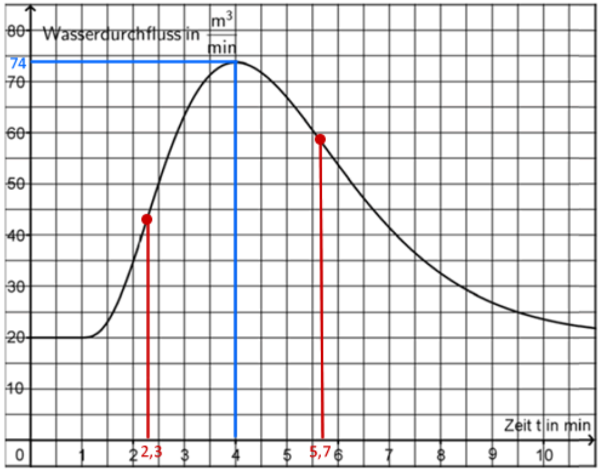


Abb.3

Entnehmen Sie Abbildung 3 im Bereich $t > 1$ Näherungswerte für die Koordinaten des Hochpunkts sowie für die t-Koordinaten der beiden Wendepunkte von G_f und geben Sie unter Berücksichtigung dieser Näherungswerte die jeweilige Bedeutung der genannten Punkte im Sachzusammenhang an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2a

Anwendungszusammenhang



Hochpunkt: $\quad HP(4|74)$

Etwa vier Minuten nach dem Öffnen der Schleuse erreicht der Wasserdurchfluss an der Messstelle mit etwa $74\,\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ seinen größten Wert.

Wendepunkte bei $t_1 \approx 2,3$ und $t_2 \approx 5,7$.

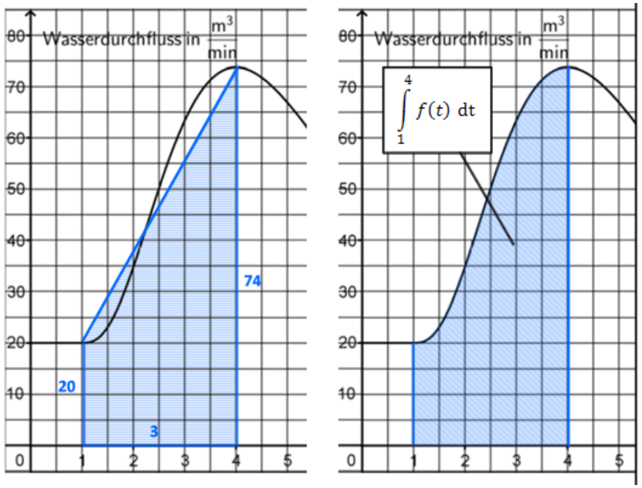
Etwa 2,3 Minuten nach dem Öffnen der Schleuse nimmt der Wasserdurchfluss an der Messstelle am stärksten zu, etwa 5,7 Minuten nach dem Öffnen der Schleuse am stärksten ab.

Teilaufgabe Teil 2 2b (5 BE)

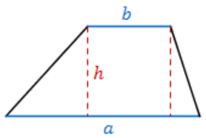
Bestimmen Sie $\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t$ näherungsweise mithilfe von Abbildung 3. Deuten Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2b

Bestimmtes Integral



Erläuterung: *Fläche eines Trapezes*



Ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

$$\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t \approx \frac{20+74}{2} \cdot 3 = 141$$

Anwendungszusammenhang

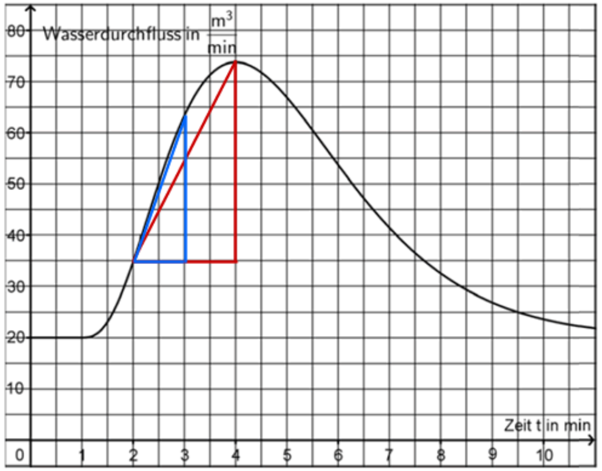
Der Wert des Integrals entspricht dem Wasservolumen in m^3, das zwischen den Zeitpunkten 1 min und 4 min nach dem Öffnen der Schleuse an der Messstelle vorbeifließt.

Teilaufgabe Teil 2 2c (5 BE)

Bestimmen Sie mithilfe von G_f für $t = 4$ und $t = 3$ jeweils einen Näherungswert für die mittlere Änderungsrate von f im Zeitintervall $[2; t]$. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abbildung 3 durch geeignete Steigungsdreiecke. Welche Bedeutung hat der Grenzwert der mittleren Änderungsraten für $t \to 2$ im Sachzusammenhang?

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2c

Anwendungszusammenhang: Mittlere Änderungsrate



$t = 4$: $\quad \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} \approx \dfrac{74 - 34}{2} = 20$

$t = 3$: $\quad \dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \approx \dfrac{63 - 34}{1} = 29$

Der Grenzwert entspricht der momentanen Änderungsrate des Wasserdurchflusses an der

Messstelle zwei Minuten nach dem Öffnen der Schleuse.