Abitur 2012 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Geben Sie zu den Funktionstermen jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie einen Term der Ableitungsfunktion an.

Teilaufgabe Teil 1 1a (2 BE)

$f(x) = \ln(x+3)$

Teilaufgabe Teil 1 1b (3 BE)

$g(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$

Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die die angegebene Eigenschaft besitzt.

Teilaufgabe Teil 1 2a (2 BE)

Der Graph der Funktion f hat den Hochpunkt $(0|5)$.

Teilaufgabe Teil 1 2b (2 BE)

Die Funktion g ist an der Stelle $x = 5$ nicht differenzierbar.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \sin(2x)$.

Teilaufgabe Teil 1 3a (2 BE)

Geben Sie zwei benachbarte Nullstellen von f an.

Teilaufgabe Teil 1 3b (5 BE)

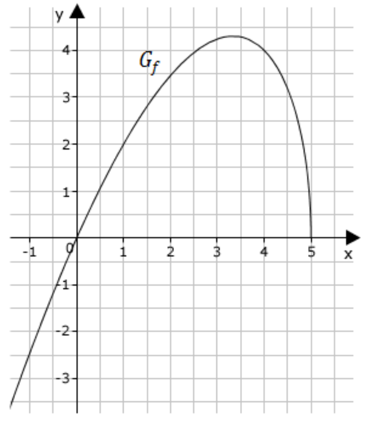
Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Warum stimmt der Wert dieses Integrals nicht mit dem Inhalt der Fläche überein, die für $0 \le x \le 2$ zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt?

Teilaufgabe Teil 1 4 (4 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer in $]-\infty; 5]$ definierten Funktion f. Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f'. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere einen Näherungswert für $f'(0)$, die Nullstelle von f' und das Verhalten von f' für $x \to 5$.

Abb. 1



Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{2e^x}{e^x+9}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

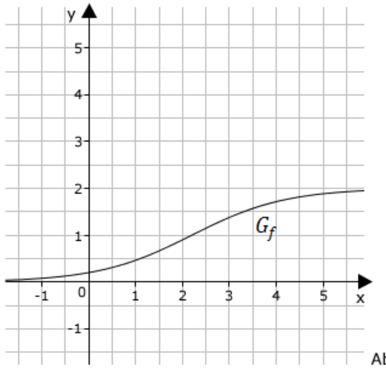


Abb.2

Teilaufgabe Teil 2 1a (2 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass G_f genau einen Achsenschnittpunkt S besitzt, und geben Sie die Koordinaten von S an.

Teilaufgabe Teil 2 1b (2 BE)

Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms von f, dass $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ gilt.

Teilaufgabe Teil 2 1c (3 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f in $\mathbb{R}$ streng monoton steigt.
(zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{18e^x}{(e^x+9)^2}$)

Teilaufgabe Teil 2 1d (2 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Achsenschnittpunkt S.
(Ergebnis: $y = 0,18x + 0,2$)

Teilaufgabe Teil 2 1e (4 BE)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die G_f mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x = 4$ einschließt.

Teilaufgabe Teil 2 1f (6 BE)

Begründen Sie, dass f in $\mathbb{R}$ umkehrbar ist. Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Umkehrfunktion f^{-1} an und zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in Abbildung 2 ein.

Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Alba lässt sich modellhaft mithilfe der Funktion f beschreiben. Beginnt man die Beobachtung zwei Wochen nach der Auskeimung einer Sonnenblume dieser Sorte, so liefert $f(x)$ für $x \in [0;4]$ im Modell die Höhe der Blume in Metern. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten. In den Aufgaben 2a bis 2d werden ausschließlich Sonnenblumen der Sorte Alba betrachtet.

Teilaufgabe Teil 2 2a (2 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, um wie viele Zentimeter eine Sonnenblume innerhalb der ersten zwei Monate nach Beobachtungsbeginn wächst.

Teilaufgabe Teil 2 2b (5 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, wie viele Monate nach Beobachtungsbeginn eine Sonnenblume eine Höhe von 1,5 Metern erreicht. Beschreiben Sie, wie man den berechneten Wert graphisch überprüfen kann.

Teilaufgabe Teil 2 2c (5 BE)

Im Modell gibt es einen Zeitpunkt x_M, zu dem die Blumen am schnellsten wachsen. Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 einen Näherungswert für x_M. Ermitteln Sie anschließend einen Näherungswert für die maximale Wachstumsrate in Zentimetern pro Tag.

Teilaufgabe Teil 2 2d (4 BE)

Ein Biologe nimmt an, dass sich das Wachstum der Blumen vor Beobachtungsbeginn näherungsweise durch die Gleichung der Tangente aus Aufgabe 1d beschreiben lässt. Untersuchen Sie mithilfe einer Rechnung, ob diese Annahme damit in Einklang steht, dass vom Zeitpunkt des Auskeimens bis zum Beobachtungsbeginn etwa zwei Wochen vergehen.

Haben zu Beobachtungsbeginn Sonnenblumen der Sorte Tramonto die gleiche Höhe wie Sonnenblumen der Sorte Alba, so erreichen von da an die Sonnenblumen der Sorte Tramonto im Vergleich zu denen der Sorte Alba jede Höhe in der Hälfte der Zeit.

Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Tramonto lässt sich modellhaft mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g beschreiben, die eine Funktionsgleichung der Form I, II oder III mit $k \in \mathbb{R}^+$ besitzt:

I $\quad y = \dfrac{2e^{x+k}}{e^{x+k}+9}$ $\qquad$ II $\quad y = k \cdot \dfrac{2e^{x}}{e^{x}+9}$ $\qquad$ III $\quad y = \dfrac{2e^{k\,x}}{e^{k\,x}+9}$

Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten und y ein Näherungswert für die Höhe einer Blume in Metern.

Teilaufgabe Teil 2 2e (4 BE)

Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II als Funktionsgleichung von g infrage kommt.

Teilaufgabe Teil 2 2f (1 BE)

Die Funktionsgleichung von g hat also die Form III. Geben Sie den passenden Wert von k an.

Lösung

Teilaufgabe Teil 1 1a (2 BE)

Geben Sie zu den Funktionstermen jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie einen Term der Ableitungsfunktion an.

$f(x) = \ln(x+3)$

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 1a

Definitionsbereich bestimmen

$f(x) = \ln(x+3)$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

$f(x)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(g(x))$.

Die ln-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert.
Somit gilt für die Argumentfunktion $g(x) > 0$.

In diesem Fall: $x+3>0$

$x+3>0$

$x>-3$

$\Rightarrow \qquad D_f =]-3;\infty[$

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$f'(x) = [\ln(x+3)]'$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Formel für Logarithmusfunktionen:

$f(x) = \ln(v(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$

Hier ist $v(x) = x + 3$.
Dann ist $v'(x) = 1$.

$$= \frac{1}{x+3}$$

Teilaufgabe Teil 1 1b (3 BE)

$$g(x) = \frac{3}{x^2-1}$$

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 1b

Definitionsbereich bestimmen

$$g(x) = \frac{3}{x^2-1}$$

Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*

$g(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $x^2 - 1$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1 \;;\; x_2 = -1$

$\Rightarrow \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$$g'(x) = \left[\frac{3}{x^2-1}\right]'$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = 3$ und $v(x) = x^2 - 1$.
Dann ist $u'(x) = 0$ und $v'(x) = 2x$

$$= \frac{0 \cdot \left(x^2-1\right) - 3 \cdot (2x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$
$$= \frac{-6x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Teilaufgabe Teil 1 2a (2 BE)

Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die die angegebene Eigenschaft besitzt.

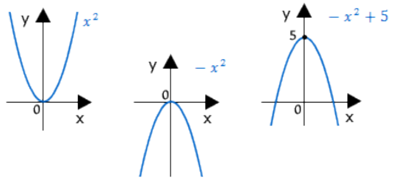
Der Graph der Funktion f hat den Hochpunkt $(0|5)$.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 2a

Eigenschaften einer Funktion

Z.B.: $f(x) = -x^2 + 5$

Erläuterung: *Verschiebung von Funktionsgraphen*



Der Graph der Normalparabel x^2 hat einen Hochpunkt, wenn er an der x-Achse gespiegelt wird: $x^2 \mapsto -x^2$.

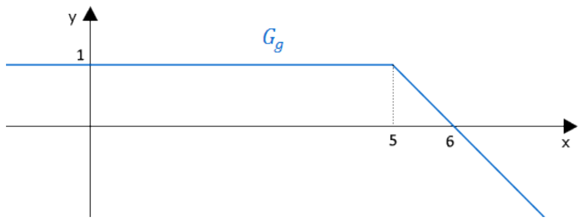
Verschiebt man diesen zusätzlich entlang der y-Achse um 5 Einheiten nach oben, so verschiebt sich auch der Hochpunkt an die gewünschte Stelle $(0|5)$: $-x^2 \mapsto -x^2 + 5$

Teilaufgabe Teil 1 2b (2 BE)

Die Funktion g ist an der Stelle $x = 5$ nicht differenzierbar.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 2b

Eigenschaften einer Funktion



Z.B.: $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -\infty < x < 5 \\ -x+6 & \text{für} \quad 5 \leq x < \infty \end{cases}$

Erläuterung: *Differenzierbarkeit einer Funktion*

Eine Funktion f ist genau dann bei x_0 differenzierbar, wenn es an dieser Stelle eine eindeutige Tangente an den Graphen gibt.
Dies ist nur der Fall, wenn der Graph an dieser Stelle weder einen Sprung noch einen Knick aufweist.

In diesem Fall:

Gesucht wird hier eine Funktion, die an der Stelle $x = 5$ nicht differenzierbar ist, also an der Stelle einen Knick aufweist, aber keine Sprungstelle, da sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein soll.

Es liegt nahe hierfür abschnittsweise definierte Geraden zu verwenden.

Teilaufgabe Teil 1 3a (2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \sin(2x)$.

Geben Sie zwei benachbarte Nullstellen von f an.

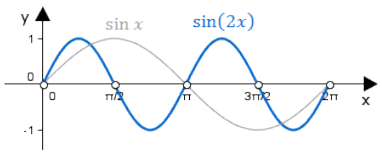
Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3a

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = \sin(2x)$

Erläuterung: *Nullstellen der Sinusfunktion*

Graph der Sinusfunktion $\sin(2x)$ und $\sin x$ zwischen 0 und 2π:



Die Nullstellen der Sinusfunktion, sprich die Schnittpunkte der Funktion mit der x-Achse, wiederholen sich periodisch.

Periode der Sinusfunktion $\sin(x)$: $\quad T = 2\pi$

Periode der Sinusfunktion $\sin(2x)$: $\quad T = \pi$

Nullstellen der Sinusfunktion $\sin(2x)$: $\quad x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3}{2}\pi \ldots$

Z.B.: $\quad x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{\pi}{2}$

Teilaufgabe Teil 1 3b (5 BE)

Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{dx}$.

Warum stimmt der Wert dieses Integrals nicht mit dem Inhalt der Fläche überein, die für $0 \leq x \leq 2$ zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt?

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3b

Bestimmtes Integral

$$\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{dx} = \int\limits_0^2 \sin(2x)\mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Aus der „Merkhilfe Mathematik“ entnimmt man:

$$\int \sin \mathrm{dx} = -\cos(x) + C$$

Die Stammfunktion von $\sin x$ ist $-\cos x$.

Gesucht ist hier die Stammfunktion von $\sin(2x)$.

Aus der „Merkhilfe Mathematik“ entnimmt man:

$$\int f(a\,x + b)\mathrm{dx} = \frac{1}{a}F(a\,x + b) + C \qquad (F \text{ ist eine Stamfunktion von } f)$$

Da im Argument des Sinus $2x$ steht, folgt:

$$\int \sin(2x)\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

Beim Ableiten wird die Regel verständlich.

Probe (Ableitung): $\quad \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)' = -\frac{1}{2}\cdot 2\sin(2x) = \sin(2x)$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^2$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

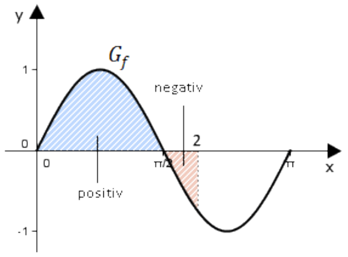
Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(4) + \frac{1}{2}\underbrace{\cos(0)}_{1}$$

$$\approx 0{,}83$$

Flächenberechnung



Der Wert des Integrals stimmt nicht mit der Fläche überein, die für $0 \leq x \leq 2$ zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt, da das Integral von 0 bis 2 die Flächendifferenz angibt.

Teilaufgabe Teil 1 4 (4 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer in $]-\infty;5]$ definierten Funktion f. Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f'. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere einen Näherungswert für $f'(0)$, die Nullstelle von f' und das Verhalten von f' für $x \to 5$.

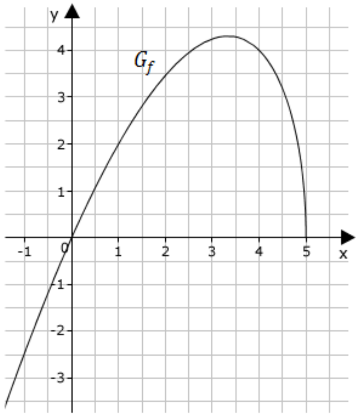


Abb.1

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 4

Skizze

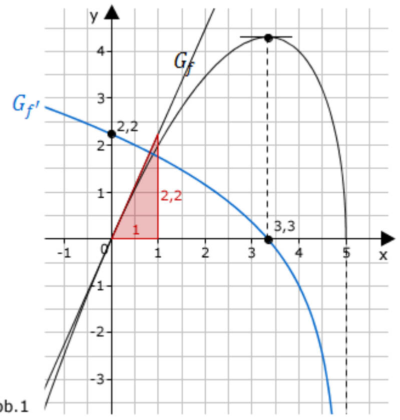


Abb.1

Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung m der Tangente t an dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_S.

$m = f'(x_S)$

In diesem Fall ist $x_S = 0$. Man legt dort eine Tangente an und liest am Steigungsdreieck den Wert der Steigung ab:

$f'(0) \approx \frac{2,2}{1} = 2,2$

$f'(0) \approx 2,2$

Erläuterung: *Erste Ableitung, Nullstellen*

Der Graph der ersten Ableitung f' hat genau dort Nullstellen, wo der Graph der Funktion f Extrempunkte hat.

$f'(3,3) = 0$

Erläuterung: *Grenzwert*

Der Graph der Funktion f ist für $x > 3,3$ streng monoton fallend und wird für $x \to 5$ immer steiler. Der Wert der ersten Ableitung nimmt also immer größere negative Wert an.

$\lim\limits_{x \to 5} f'(x) = -\infty$

Teilaufgabe Teil 2 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{2e^x}{e^x + 9}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

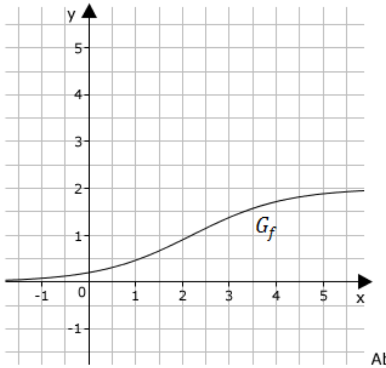


Abb.2

Zeigen Sie rechnerisch, dass G_f genau einen Achsenschnittpunkt S besitzt, und geben Sie die Koordinaten von S an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1a

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

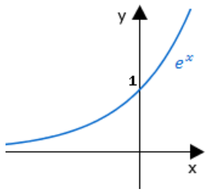
Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = \frac{2e^0}{\underbrace{e^0}_{1} + 9} = \frac{2}{10} \quad \Rightarrow \quad S\left(0|\frac{2}{10}\right)$$

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*

Ansatz für Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$$\frac{2e^x}{e^x + 9} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2e^x = 0$$



Da die Exponentialfunktion e^x auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv ist, erfüllt kein x die obige Gleichung.

Es gibt keinen Schnittpunkt mit der x-Achse, da $2e^x > 0$.

Teilaufgabe Teil 2 1b (2 BE)

Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms von f, dass $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1b

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\overbrace{e^x}^{\to\infty}}{\underbrace{e^x}_{\to\infty}+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^x}{e^x\left(1+\frac{9}{e^x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\underbrace{\frac{9}{e^x}}_{\to 0}} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2\overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x}_{\to 0}+9} = 0$$

Teilaufgabe Teil 2 1c (3 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f in $\mathbb{R}$ streng monoton steigt.
(zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{18e^x}{(e^x+9)^2}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1c

Erste Ableitung einer Funktion ermittlen

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x+9}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2e^x}{e^x+9}\right)'$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = 2e^x$ und $v(x) = e^x + 9$.
Dann ist $u'(x) = 2e^x$ und $v'(x) = e^x$

Erinnerung: die Ableitung der Exponentialfunktion e^x ist gleich die Funktion selbst.

$$= \frac{2e^x\cdot(e^x+9) - 2e^x\cdot e^x}{(e^x+9)^2}$$

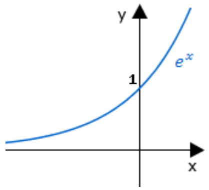
$$= \frac{2e^x\cdot(e^x+9-e^x)}{(e^x+9)^2}$$

$$= \frac{18e^x}{(e^x+9)^2}$$

Monotonieverhalten einer Funktion

Vorzeichen der ersten Ableitung untersuchen:

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*



Die Exponentialfunktion e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.

$$f'(x) = \frac{18\overbrace{e^x}^{>0}}{\underbrace{(e^x+9)^2}_{>0}} > 0 \qquad \text{für alle } x\in\mathbb{R}$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

$f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

$\Rightarrow \quad G_f$ ist in $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

Teilaufgabe Teil 2 1d (2 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Achsenschnittpunkt S.
(Ergebnis: $y = 0,18x + 0,2$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1d

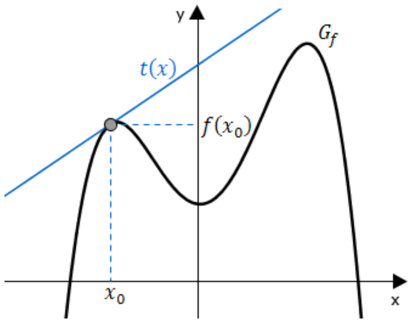
Tangentengleichung ermitteln

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 9}$$

Tangentengleichung t im Punkt $S(0|0,2)$:

Erläuterung: *Gleichung der Tangente*

Formel für die Tangentengleichung: $t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



$t : y = (x - x_0) \cdot f'\ (x_0) + f\ (x_0)$

$t : y = (x - 0) \cdot f'\ (0) + f\ (0)$

Nebenrechnungen:

$$f'(x) = \frac{18e^x}{(e^x + 9)^2} \qquad \text{(s. Teilaufgabe 1c)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = 0,18$$

$f(0) = 0,2$

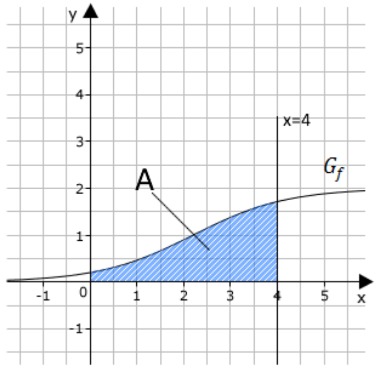
$t : y = 0,18x + 0,2$

Teilaufgabe Teil 2 1e (4 BE)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die G_f mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x = 4$ einschließt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1e

Flächenberechnung



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen 0 und 4 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \int_0^4 f(x)\mathrm{dx}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 f(x)\mathrm{dx} \\ &= \int_0^4 \frac{2e^x}{e^x+9}\,\mathrm{dx} \\ &= 2\cdot\int_0^4 \frac{e^x}{e^x+9}\,\mathrm{dx} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Benötigte Regel zur Bildung der Stammfunktion (siehe auch Merkregel Mathematik):

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{dx} = \ln\,|g(x)| + C$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+9}\,\mathrm{dx} = \ln\,(e^x+9) + C$$

Hier ist die Nennerfunktion $g(x) = e^x + 9$. Abgeleitet ergibt sie die Zählerfunktion e^x.
Die Betragsstriche entfallen, da $e^x + 9$ stets positiv ist.

$$= \quad 2\cdot[\ln\,(e^x+9)\,]_0^4$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned} &= \quad 2\cdot\left(\ln(e^4+9) - \ln(e^0+9)\right) \\ &\approx \quad 3,7 \end{aligned}$$

Teilaufgabe Teil 2 1f (6 BE)

Begründen Sie, dass f in $\mathbb{R}$ umkehrbar ist. Geben Sie den Definitionsbereich und den

Wertebereich der Umkehrfunktion f^{-1} an und zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in Abbildung 2 ein.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1f

Umkehrfunktion bestimmen

Begründung:

Die Funktion f ist in $\mathbb{R}$ umkehrbar, da sie dort stetig und streng monoton wachsend ist.

Erläuterung: *Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion*

Die Regel lautet:

Der Definitionsbereich der Funktion wird der Wertebereich der Umkehrfunktion und der Wertebereich der Funktion wird der Definitionsbereich der Umkehrfunktion.

$D_f = \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$W_f =]0;2[\quad \Rightarrow \quad D_{f^{-1}} =]0;2[$

Skizze

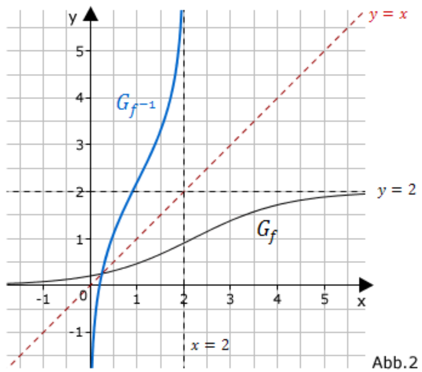


Abb.2

Erläuterung: *Umkehrfunktion*

Der Graph $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht durch Spiegelung des Graphen G_f an der Winkelhalbierenden $y = x$.

Die waagerechte Asymptote $y = 2$ der Funktion f wird zur senkrechten Asymptote $x = 2$ der Umkehrfunktion f^{-1}. Ebenso verhält es sich bei der Asymptote mit der Gleichung $x = 0$.

Teilaufgabe Teil 2 2a (2 BE)

Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Alba lässt sich modellhaft mithilfe der Funktion f beschreiben. Beginnt man die Beobachtung zwei Wochen nach der Auskeimung einer Sonnenblume dieser Sorte, so liefert $f(x)$ für $x \in [0;4]$ im Modell die Höhe der Blume in Metern. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten. In den Aufgaben 2a bis 2d werden ausschließlich Sonnenblumen der Sorte Alba betrachtet.

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, um wie viele Zentimeter eine Sonnenblume innerhalb der ersten zwei Monate nach Beobachtungsbeginn wächst.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2a

Anwendungsaufgabe

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 9}$$

$$f(2) - f(0) = \frac{2e^2}{e^2 + 9} - 0,2 \approx 0,7$$

Eine Sonnenblumen wächst in den ersten zwei Monaten nach Beobachtungsbeginn um ca. 70 cm.

Teilaufgabe Teil 2 2b (5 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, wie viele Monate nach Beobachtungsbeginn eine Sonnenblume eine Höhe von 1,5 Metern erreicht. Beschreiben Sie, wie man den berechneten Wert graphisch überprüfen kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2b

Anwendungsaufgabe

Ansatz: $f(x) = 1,5$

$$\frac{2e^x}{e^x + 9} = 1,5 \qquad | \quad \cdot(e^x + 9)$$

$$2e^x = 1,5e^x + 13,5 \qquad | \quad -1,5e^x$$

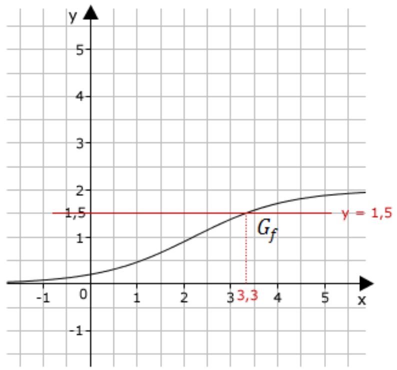
$$0,5e^x = 13,5 \qquad | \quad \cdot 2$$

$$e^x = 27 \qquad | \quad \ln$$

$$x = \ln 27 \approx 3,3$$

Die parallele zur x-Achse im Abstand 1,5 schneidet den Graph von f bei x = 3,3

Der Abbildung kann näherungsweise der x-Wert des Schnittpunktes von G_f und $y = 1,5$ entnommen werden.

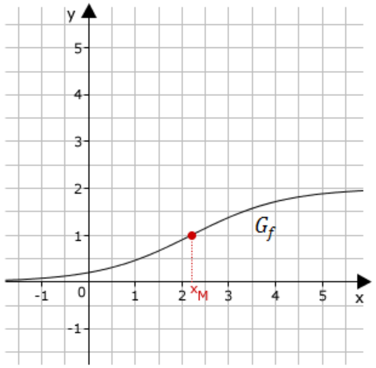


Teilaufgabe Teil 2 2c (5 BE)

Im Modell gibt es einen Zeitpunkt x_M, zu dem die Blumen am schnellsten wachsen. Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 einen Näherungswert für x_M. Ermitteln Sie anschließend einen Näherungswert für die maximale Wachstumsrate in Zentimetern pro Tag.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2c

Anwendungszusammenhang



> Erläuterung: *Wendepunkt*
>
> Der Wendepunkt ist in diesem Fall (die Funktion ist monoton steigend) der Punkt, an dem die Steigung am größten ist.
> Im Modell ist das somit der Punkt an dem das Wachstum am schnellsten ist.

$x_M \approx 2,2$

> Erläuterung: *Änderungsrate*
>
> Die maximale Änderungsrate ist der größte Wert, den die erste Ableitung annimmt.
> Also der Wert der ersten Ableitung an der Wendestelle.

$$f'(x_M) = f'(2,2) = \frac{18e^{2,2}}{(e^{2,2}+9)^2} \approx 0,5$$

> Erläuterung: *Umformung*
>
> Gefragt wird nach der maximalen Änderungsrate in Zentimetern pro Tag. Da im Modell x in Metern und y in Monaten ausgegeben wird, muss noch umgeformt werden.

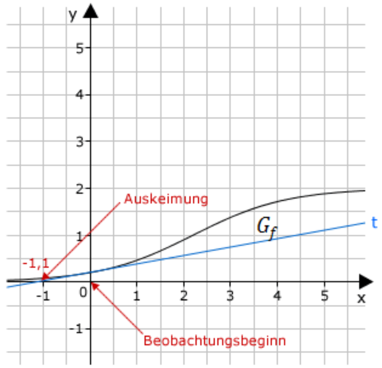
$$0,5\,\frac{\text{m}}{\text{Monat}} = 0,5\,\frac{100\,\text{cm}}{30\,\text{Tage}} \approx 1,7\frac{\text{cm}}{d}$$

Teilaufgabe Teil 2 2d (4 BE)

Ein Biologe nimmt an, dass sich das Wachstum der Blumen vor Beobachtungsbeginn näherungsweise durch die Gleichung der Tangente aus Aufgabe 1d beschreiben lässt. Untersuchen Sie mithilfe einer Rechnung, ob diese Annahme damit in Einklang steht, dass vom Zeitpunkt des Auskeimens bis zum Beobachtungsbeginn etwa zwei Wochen vergehen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2d

Anwendungszusammenhang



$t: y = 0,18x + 0,2$

Erläuterung: *Schnittpunkt mit der x-Achse*

Der Schnittpunkt der Tangente t mit der x-Achse ist der Zeitpunkt des Auskeimens, also der Zeitpunkt wo die Blume anfängt zu wachsen.

Schnittpunkt der Tangente t mit der x-Achse bestimmen:

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$0 = 0,18x + 0,2$

$-0,18x = 0,2$

$x = \dfrac{0,2}{-0,18} \approx -1,1$

Erläuterung:

$x \approx -1,1$ bedeutet, dass die Auskeimung 1,1 Monate vor Beobachtungsbeginn stattgefunden hat. Das steht aber im Widerspruch zu den angegebenen zwei Wochen.

Die Näherung ist nicht brauchbar, da sie eine Zeitspanne liefert, die deutlich größer als zwei Wochen ist.

Teilaufgabe Teil 2 2e (4 BE)

Haben zu Beobachtungsbeginn Sonnenblumen der Sorte Tramonto die gleiche Höhe wie Sonnenblumen der Sorte Alba, so erreichen von da an die Sonnenblumen der Sorte Tramonto im Vergleich zu denen der Sorte Alba jede Höhe in der Hälfte der Zeit.

Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Tramonto lässt sich modellhaft mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g beschreiben, die eine Funktionsgleichung der Form I, II oder

III mit $k \in \mathbb{R}^+$ besitzt:

I $\quad y = \dfrac{2e^{x+k}}{e^{x+k}+9}$ $\qquad$ II $\quad y = k \cdot \dfrac{2e^{x}}{e^{x}+9}$ $\qquad$ III $\quad y = \dfrac{2e^{k\,x}}{e^{k\,x}+9}$

Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten und y ein Näherungswert für die Höhe einer Blume in Metern.

Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II als Funktionsgleichung von g infrage kommt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2e

Anwendungszusammenhang

Begründung:

Erläuterung:

Die Sonnenblumen der Sorte Tramonto haben zu Beobachtungsbeginn die gleiche Höhe wie die Sonnenblumen der Sorte Alba.

Nach Teilaufgabe Teil 2 1a muss also gelten: $\quad g(0) = f(0) = 0,2$

Bedingung, die erfüllt werden soll: $\quad y(0) = 0,2$

Erläuterung:

Damit die obige Bedingung für eine Funktionsgleichung der Form I erfüllt wird, muss $k = 0$ sein.

Für $k = 0$ ist aber die Funktionsgleichung identisch zu der von $f(x)$.

I: $\quad y(0) = \dfrac{2e^{0+k}}{e^{0+k}+9} = \dfrac{2e^{k}}{e^{k}+9}$

$0,2 = \dfrac{2e^{k}}{e^{k}+9} \quad \Rightarrow \quad k = 0 \quad$ (siehe Teilaufgabe Teil 2 1a)

Für $k = 0$ ist $g(x) = \dfrac{2e^{x}}{e^{x}+9} = f(x)$.

Erläuterung:

Damit die obige Bedingung für eine Funktionsgleichung der Form II erfüllt wird, muss $k = 1$ sein.

Für $k = 1$ ist aber die Funktionsgleichung identisch zu der von $f(x)$.

II: $y(0) = k \cdot \dfrac{2e^0}{e^0 + 9} = 0,2k$

$0,2 = 0,2k \qquad \Rightarrow \qquad k = 1$

Für $k = 1$ ist $g(x) = \dfrac{2e^x}{e^x + 9} = f(x)$.

Teilaufgabe Teil 2 2f (1 BE)

Die Funktionsgleichung von g hat also die Form III. Geben Sie den passenden Wert von k an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2f

Anwendungszusammenhang

$f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x + 9}$

$g(x) = \dfrac{2e^{k\,x}}{e^{k\,x} + 9}$

Erläuterung:

Die Sonnenblumen der Sorte Tramonto (g) erreichen im Vergleich zu denen der Sorte Alba (f) jede Höhe in der Hälfte der Zeit.

Hälfte der Zeit $= \dfrac{x}{2}$

Es muss gelten: $\quad g\left(\dfrac{x}{2}\right) = f(x)$

$\dfrac{2e^{k\frac{x}{2}}}{e^{k\frac{x}{2}} + 9} = \dfrac{2e^x}{e^x + 9} \qquad \Rightarrow \qquad k = 2$