Abitur 2012 Mathematik Geometrie V

Abbildung 1 zeigt modellhaft ein Dachzimmer in der Form eines geraden Prismas. Der Boden und zwei der Seitenwände liegen in den Koordinatenebenen. Das Rechteck $ABCD$ liegt in einer Ebene E und stellt den geneigten Teil der Deckenfläche dar.

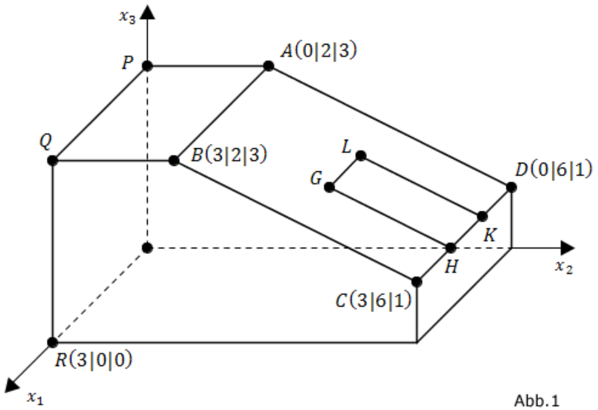


Abb.1

Teilaufgabe a (4 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(mögliches Ergebnis: $E: x_2 + 2x_3 - 8 = 0$)

Teilaufgabe b (2 BE)

Berechnen Sie den Abstand des Punkts R von der Ebene E.

Im Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 m, d. h. das Zimmer ist an seiner höchsten Stelle 3 m hoch.

Das Rechteck $GHKL$ mit $G(2|4|2)$ hat die Breite $\overline{GL} = 1$. Es liegt in der Ebene E, die Punkte H und K liegen auf der Geraden CD. Das Rechteck stellt im Modell ein Dachflächenfenster dar; die Breite des Fensterrahmens soll vernachlässigt werden.

Teilaufgabe c (5 BE)

Geben Sie die Koordinaten der Punkte L, H und K an und bestimmen Sie den Flächeninhalt des Fensters.

(zur Kontrolle: $\overline{GH} = \sqrt{5}$)

Teilaufgabe d (6 BE)

Durch das Fenster einfallendes Sonnenlicht wird im Zimmer durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$ repräsentiert. Eine dieser Geraden verläuft durch den Punkt G und schneidet die Seitenwand $OPQR$ im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S sowie die Größe des Winkels, den diese Gerade mit der Seitenwand $OPQR$ einschließt.

Teilaufgabe e (4 BE)

Das Fenster ist drehbar um eine Achse, die im Modell durch die Mittelpunkte der Strecken $[GH]$ und $[LK]$ verläuft. Die Unterkante des Fensters schwenkt dabei in das Zimmer; das Drehgelenk erlaubt eine zum Boden senkrechte Stellung der Fensterfläche.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke $[GH]$ und bestätigen Sie rechnerisch, dass das Fenster bei seiner Drehung den Boden nicht berühren kann.

(Teilergebnis: $M(2|5|1,5)$)

Abbildung 2 zeigt ein quaderförmiges Möbelstück, das 40 cm hoch ist. Es steht mit seiner Rückseite flächenbündig an der Wand unter dem Fenster. Seine vordere Oberkante liegt im Modell auf der Geraden $k: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 0,4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

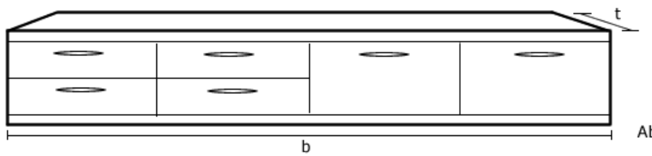


Abb.2

Teilaufgabe f (4 BE)

Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 die Breite b des Möbelstücks möglichst genau. Bestimmen Sie mithilfe der Gleichung der Geraden k die Tiefe t des Möbelstücks und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(**Messungen aus der Original-Abbildung: Höhe** $h = 12$ **mm und Breite** $b = 78$ **mm**)

Teilaufgabe g (5 BE)

Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Fenster bei seiner Drehung am Möbelstück anstoßen kann.

Lösung

Teilaufgabe a (4 BE)

Abbildung 1 zeigt modellhaft ein Dachzimmer in der Form eines geraden Prismas. Der Boden und zwei der Seitenwände liegen in den Koordinatenebenen. Das Rechteck $ABCD$ liegt in einer Ebene E und stellt den geneigten Teil der Deckenfläche dar.

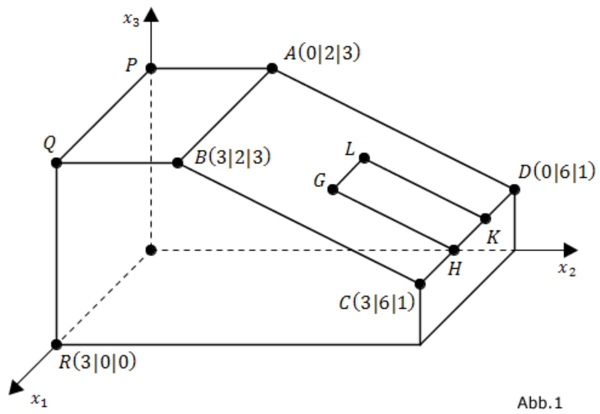


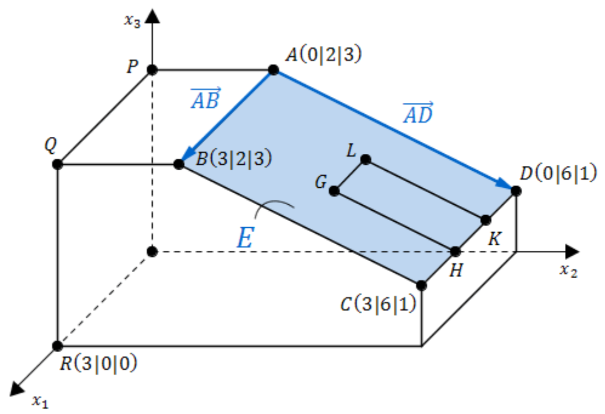
Abb.1

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(mögliches Ergebnis: $E: x_2 + 2x_3 - 8 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe a

Ebene aus drei Punkte



Richtungsvektoren der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

A sei der Aufpunkt der Ebene.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 6 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E: \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{n_E}$$

Hier (A ist Aufpunkt):

$$E: \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 + 2x_3 = 8$$

Teilaufgabe b (2 BE)

Berechnen Sie den Abstand des Punkts R von der Ebene E.

Lösung zu Teilaufgabe b

Abstand Punkt - Ebene

$R(3|0|0)$

$E: x_2 + 2x_3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Normalenvektor der Ebene

Betrag des Normalenvektors bestimmen:

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene aufstellen:

> Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*
>
> Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.
>
> Beispiel:
>
> $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$
>
> $$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$
>
> $$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$$E^{HNF}: \frac{1}{\sqrt{5}} (x_2 + 2x_3 - 8) = 0$$

Abstand bestimmen:

> Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*
>
> Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P, E)$ des Punktes zur Ebene.
>
> Beispiel:
>
> $$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$
>
> $P(1|3|-6)$
>
> $$d(P, E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\frac{9}{3} \right| = 3$$

$$d = d(R; E) = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} (0 + 2 \cdot 0 - 8) \right| = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

Teilaufgabe c (5 BE)

Im Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 m, d. h. das Zimmer ist an seiner höchsten Stelle 3 m hoch.

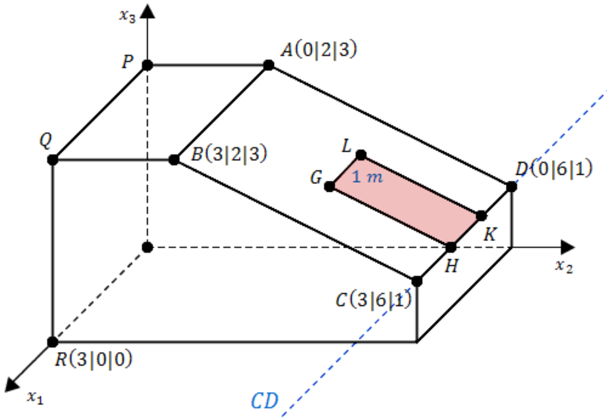
Das Rechteck $GHKL$ mit $G(2|4|2)$ hat die Breite $\overline{GL} = 1$. Es liegt in der Ebene E, die Punkte H und K liegen auf der Geraden CD. Das Rechteck stellt im Modell ein Dachflächenfenster dar; die Breite des Fensterrahmens soll vernachlässigt werden.

Geben Sie die Koordinaten der Punkte L, H und K an und bestimmen Sie den Flächeninhalt des Fensters.

(zur Kontrolle: $\overline{GH} = \sqrt{5}$)

Lösung zu Teilaufgabe c

Lage eines Punktes



$G(2|4|2)$

$\overline{GL} = 1$

Erläuterung: *Lage des Punktes*

Nach Konstruktion hat der Punkt L die gleiche x_2- und x_3-Koordinate wie der Punkt G. Da $\overline{GL} = 1$ ist, folgt:

$\Rightarrow \quad L(2-1|4|2) = (1|4|2)$

Die Lage von L ist im Vergleich zu G um 1 Längeneinheit in negative x_1-Richtung verschoben.

$\Rightarrow \quad L(1|4|2)$

$H, K \in CD$

Erläuterung: *Lage des Punktes*

Nach Konstruktion liegen die Punkte H und K auf der Geraden CD. Ihre Koordinaten unterscheiden sich zu denen vom Punkt C nur in der x_1-Koordinate.

$\Rightarrow \quad H(\ldots|6|1)$
$\Rightarrow \quad K(\ldots|6|1)$

Die x_1-Koordinaten von H und K entsprechen jeweils denen von G und L

$\Rightarrow \quad H(2|6|1)$
$\Rightarrow \quad K(1|6|1)$

$\Rightarrow \quad H(2|6|1)$
$\Rightarrow \quad K(1|6|1)$

Flächeninhalt eines Vierecks

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{H} - \overrightarrow{G} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\overline{GH} = \left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Flächeninhalt bestimmen:

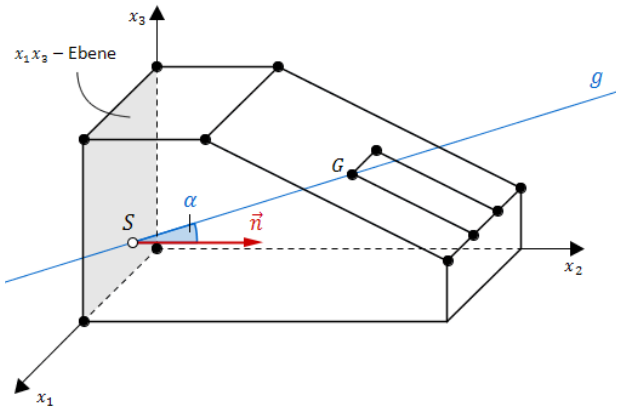
$A = \overline{GL} \cdot \overline{GH} = 1 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5} \;\; m^2$

Teilaufgabe d (6 BE)

Durch das Fenster einfallendes Sonnenlicht wird im Zimmer durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$ repräsentiert. Eine dieser Geraden verläuft durch den Punkt G und schneidet die Seitenwand $OPQR$ im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S sowie die Größe des Winkels, den diese Gerade mit der Seitenwand $OPQR$ einschließt.

Lösung zu Teilaufgabe d

Geradengleichung aufstellen



$G(2|4|2)$

$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn G als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{G}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g.

$$g: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{G}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}}$$

Schnitt Ebene und Gerade

$$x_1x_3\text{-Ebene:} \qquad \overrightarrow{X} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = 0$$

$\overrightarrow{n}$ ist der Normalenvektor der x_1x_3-Ebene.

Erläuterung:

Der Schnittpunkt der Geraden g mit der x_1x_3-Ebene ist der gesuchte Punkt S, da die Seitenwand $OPQR$ in der x_1x_3-Ebene liegt.

Gerade g mit der x_1x_3-Ebene schneiden:

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

Hier wird also g in die x_1x_3-Ebene eingesetzt und nach λ aufgelöst.

Da die Gleichung der Ebene E nur " x_2 " enthält, muss auch nur die x_2-Koordinate " $4 - 8\lambda$ " von g eingesetzt werden.

$4 - 8\lambda = 0$

$\lambda = \frac{1}{2}$

$\lambda = \frac{1}{2}$ in g einsetzen und Schnittpunkt S bestimmen:

$$\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(1|0|1,5)$$

Winkel zwischen Gerade und Ebene

Länge der Vektoren bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

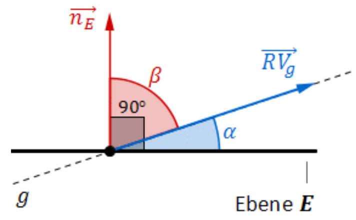
$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{v}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{69}$$

$$|\overrightarrow{n}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 1^2 + 0} = 1$$

Winkel α bestimmen:

Erläuterung: *Winkel zwischen Ebene und Gerade*



Der **Sinus** des Winkels α zwischen einer Geraden g und einer Ebenen E ist gegeben durch:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{RV_g} \circ \overrightarrow{n_E}\right|}{|\overrightarrow{RV_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$$

wobei $\overrightarrow{RV_g}$ der Richtungsvektor der Geraden und $\overrightarrow{n_E}$ der Normalenvektor der Ebene ist.

(Anmerkung: Man verwendet die Formel gerne ohne Betragsstriche im Zähler; also $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{RV_g} \circ \overrightarrow{n_E}}{|\overrightarrow{RV_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$.
Aber mit Betragsstrichen wird <u>immer</u> der spitze Winkel bestimmt.)

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|0 - 8 + 0|}{\sqrt{69} \cdot 1} = \frac{8}{\sqrt{69}}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{69}}\right) \approx 74,38^\circ$$

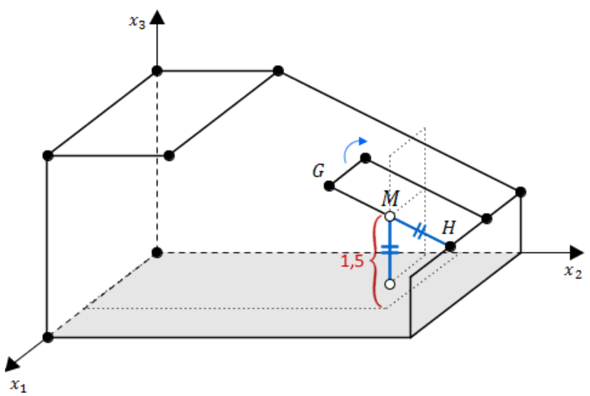
Teilaufgabe e (4 BE)

Das Fenster ist drehbar um eine Achse, die im Modell durch die Mittelpunkte der Strecken $[G\,H]$ und $[L\,K]$ verläuft. Die Unterkante des Fensters schwenkt dabei in das Zimmer; das Drehgelenk erlaubt eine zum Boden senkrechte Stellung der Fensterfläche.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke $[G\,H]$ und bestätigen Sie rechnerisch, dass das Fenster bei seiner Drehung den Boden nicht berühren kann.

(Teilergebnis: $M(2|5|1,5)$)

Lösung zu Teilaufgabe e

Mittelpunkt einer Strecke



Mittelpunkt bestimmen:

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Die Formel für die Berechnung des Mittelpunktes M zwischen zwei Punkten A und B lautet:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right)$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[\overrightarrow{G} + \overrightarrow{H}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad M(2|5|1,5)$

Länge einer Strecke

Länge der Strecke $[M\,H]$ bestimmen:

$\overline{G\,H} = \left|\overrightarrow{G\,H}\right| = \sqrt{5}$ (s. Teilaufgabe c)

Erläuterung:

Da M der Mittelpunkt der Strecke $[G\,H]$ ist, ist die Strecke $[M\,H]$ die Hälfte der Strecke $[G\,H]$ lang.

$$\Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{M\,H}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{G\,H}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{M\,H}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{G\,H}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$$

Rechnerische Bestätigung:

Erläuterung:

Der Boden des Dachzimmers liegt nach Konstruktion in der $x_1 x_2$-Ebene.

Deswegen entspricht die x_3-Koordinate des Punkts M $(x_3 = 1,5)$ dem Abstand vom Punkt M zum Dachzimmerboden.

Die Länge der Fensterkante $[M\,H]$ ist kleiner als dieser Abstand und das Fenster kann somit den Boden nicht berühren.

$$\left|\overrightarrow{M\,H}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12 < 1,5$$

Teilaufgabe f (4 BE)

Abbildung 2 zeigt ein quaderförmiges Möbelstück, das 40 cm hoch ist. Es steht mit seiner Rückseite flächenbündig an der Wand unter dem Fenster. Seine vordere Oberkante liegt im Modell auf der Geraden $k: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 0,4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

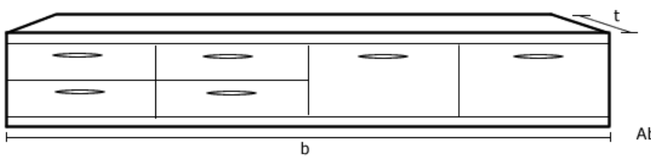


Abb.2

Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 die Breite b des Möbelstücks möglichst genau. Bestimmen Sie mithilfe der Gleichung der Geraden k die Tiefe t des Möbelstücks und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(**Messungen aus der Original-Abbildung: Höhe** $h = 12$ **mm und Breite** $b = 78$ **mm**)

Lösung zu Teilaufgabe f

Länge einer Strecke

Länge der Strecken b und h (Höhe des Möbelstücks) mit dem Lineal ausmessen:

$h_{\text{gemessen}} = 12$ mm
$b_{\text{gemessen}} = 78$ mm

$h = 0,4$ m (echte Höhe, laut Angabe)

Um nun die echte Breite b zu erhalten, wird das Verhältnis von Breite und Höhe aufgestellt.

Erläuterung: *Dreisatz*

Beim einfachen Dreisatz stehen zwei gleiche Verhältnisse gegenüber, es gibt also immer vier Werte. Das Verhältnis von zwei zusammengehörigen Werten wird als Bruch geschrieben. Die allgemeine Form ist:

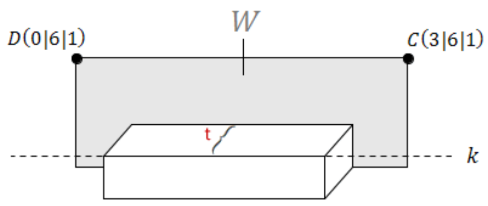
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{b}{h} = \frac{b_{\text{gemessen}}}{h_{\text{gemessen}}}$$

$$\frac{b}{0,4} = \frac{78}{12}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{78}{12} \cdot 0,4 = 2,6 \text{ m}$$

Ebene aus Punkt und Normalenvektor



Erläuterung zum Vorgehen:

t entspricht dem Abstand der Geraden k zur Ebene W, in der die Wand unter dem Fenster liegt, da k parallel zur Wand verläuft.

Die Ebene W steht senkrecht zur x_2-Achse und geht durch den Punkt $C(3|6|1)$.

Ebene W aufstellen:

$$\overrightarrow{n_W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Normalenvektor der Ebene } W$$

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E : \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{n_E}$$

Hier (C ist Aufpunkt):

$$W : \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 - 6 = 0$$

Abstand Gerade - Ebene

$$k : \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 0,4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{P}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hesse-Normalenform der Ebene W:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors.

$$E : \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d = 0$$

$$\Rightarrow E^{HNF} : \frac{\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} = 0$$

d ist das Ergebnis des Skalarprodukts aus $\overrightarrow{n_E}$ und dem Ortsvektor des Aufpunkts von E.

Hier ist der Betrag des Normalenvektors gleich 1:

$$|\overrightarrow{n_W}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 1^2 + 0} = 1$$

$$W^{HNF} : \frac{x_2 - 6}{1} = 0$$

$$W^{HNF} : x_2 - 6 = 0$$

Abstand t bestimmen:

Erläuterung:

Der Abstand der Geraden k zur Ebene W entspricht dem Abstand eines beliebigen Punktes der Geraden zur Ebene W.

Hier ist P der Aufpunkt der Geraden k:

$$k : \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 0,4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{P}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t = d(k; W) = d(P; W)$$

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand des Punktes zur Ebene.

$$E^{HNF}: \frac{\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} = 0$$

$$\Rightarrow d(P,E) = \left| \frac{\overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} \right|$$

d ist das Ergebnis des Skalarprodukts aus $\overrightarrow{n_E}$ und dem Ortsvektor des Aufpunkts von E.

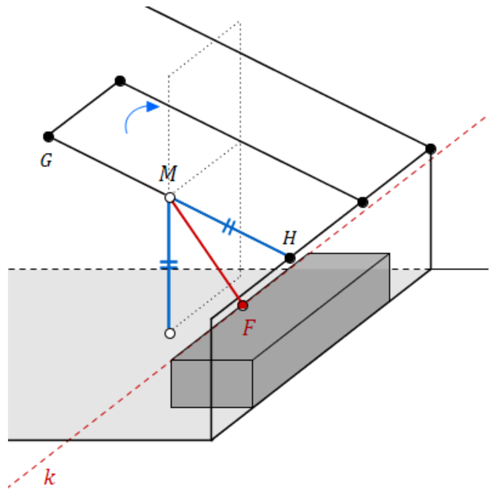
$d(P;W) = |\,5,5 - 6\,| = 0,5$

Teilaufgabe g (5 BE)

Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Fenster bei seiner Drehung am Möbelstück anstoßen kann.

Lösung zu Teilaufgabe g

Abstand Punkt - Gerade



$M(2|5|1,5)$ Mittelpunkt der Strecke $[GH]$

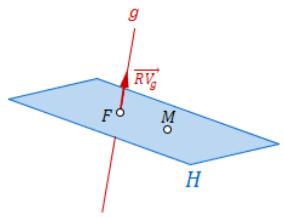
$$k: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 0,4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung:

Damit das Fenster nicht am Möbelstück anstoßt, muss der Abstand vom Punkt M zur Geraden k größer sein als die Länge der Kante $[MH]$.

Abstand von M zu k bestimmen:

Erläuterung: *Hilfsebene*



Um den Abstand zwischen einer Geraden g und einen Punkt M bestimmen zu können, bildet man eine Hilfsebene H die den Punkt M beinhaltet und senkrecht zur Geraden g steht.

Diese Ebene schneidet dann die Gerade g in einem Punkt F. Der Abstand entspricht dann der Länge der Strecke $[MF]$.

Hilfsebene H durch M senkrecht zu k aufstellen:

$$\overrightarrow{n_H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E : \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{n_E}$$

Hier (M ist Aufpunkt):

$$H : \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 - 2 = 0$$

Ebene H und Gerade k schneiden: $H \cap k$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

Hier wird also k in H eingesetzt und nach λ aufgelöst.

Da die Gleichung der Ebene H nur „ x_1 “ enthält, muss auch nur die x_1-Koordinate „ λ“ von k eingesetzt werden.

$$\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

$\lambda = 2$ in k einsetzen und Schnittpunkt F bestimmen:

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(2|5{,}5|0{,}4)$$

Vektor $\overrightarrow{MF}$ bestimmen:

$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ -1{,}1 \end{pmatrix}$$

Abstand bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$d = d(M;k) = |\overrightarrow{MF}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -1,1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + (0,5)^2 + (-1,1)^2} = \sqrt{1,46} \approx 1,21$$

$$d(M;k) \approx 1,21 > \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{2}}_{\approx 1,12} = \overline{MH}$$

Das Fenster kann **nicht** am Möbelstück anstoßen.

Alternative Lösung

Alternativer Rechenweg

$$k : \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 0,4 \end{pmatrix}}_{P} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{RV_k}}$$

$$\begin{aligned} d(M,k) &= \frac{\left| \overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{RV_k} \right|}{\left| \overrightarrow{RV_k} \right|} \\ &= \frac{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0,5 \\ -1,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + 0 + 0}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1,1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right|}{1} = \sqrt{1,46} \end{aligned}$$