Fachabitur 2011 Mathematik T Infinitesimalrechnung A II

Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto \dfrac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $|x| \to \infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen und ihr Graph keine Extrempunkte besitzt.

[Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$]

Teilaufgabe 1.3 (9 BE)

Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f, ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes W und stellen Sie die Gleichung der Tangente w an den Graphen von f im Wendepunkt W auf.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von f mit der Tangente w für $-3 \leq x \leq 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$.
[Teilergebnis: $W(0;2)$]

Teilaufgabe 1.5 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto 3x - \ln(1+e^{2x})$, $x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion der Funktion f ist.

Der Graph von f, die Tangente w und die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u \in \mathbb{R}$ und $u \geq 2$ schließen ein Flächenstück A_u ein.

Teilaufgabe 1.6.1 (4 BE)

Kennzeichnen Sie für $u = 2$ das Flächenstück A_2 im Schaubild der Aufgabe 1.4 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl A.
[Teilergebnis: $A \approx 0,675$]

Teilaufgabe 1.6.2 (6 BE)

Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren u näherungsweise so, dass das Flächenstück A_u gleich große Flächenanteile oberhalb und unterhalb der x-Achse besitzt. Benutzen Sie $u_0 = 4$ als Startwert und führen Sie einen Näherungsschritt aus.

Gegeben ist ferner in der maximalen Definitionsmenge D_g eine Funktion $g : x \mapsto a \cdot \ln(bx + c) + 2$, bei der die reellen, von null verschiedenen Koeffizienten a, b und c dadurch festgelegt sind, dass der Graph dieser Funktion durch den Punkt $P(0;2)$ verläuft, dort die Steigung 1 und an der Stelle $x_0 = -1$ die Steigung 3 besitzt.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)

Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

[Ergebnis: $a = \dfrac{3}{2}$; $b = \dfrac{2}{3}$; $c = 1$]

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_g.

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion g streng monoton ist.

Teilaufgabe 2.4 (8 BE)

Untersuchen Sie, ob die Funktion h mit

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x < 0 \text{ (siehe Aufgabe 1)} \\ g(x) & \text{für } x \geq 0 \text{ (siehe Aufgabe 2)} \end{cases}$$

an der Nahtstelle $x = 0$ stetig ist, begründen Sie, dass die Funktionswerte von h an der Nahtstelle ein Minimum aufweisen, und geben Sie den Winkel an, unter dem die Graphen der beiden Teilfunktionen an der Nahtstelle aufeinandertreffen.

Mithilfe einer Konvexlinse (Sammellinse) wird von einem selbstleuchtenden, links von der Linse stehenden Gegenstand auf einem Schirm rechts von der Linse ein reales, scharfes Bild erzeugt. Der Abstand des Gegenstands von der Linsenmitte heißt dabei Gegenstandsweite g, der Abstand des Schirms von der Linsenmitte heißt Bildweite b.
Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ist durch die Linsenformel $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ gegeben, wobei mit f die Brennweite der Linse bezeichnet wird.
Um ein reales Bild zu erzeugen, muss die Gegenstandsweite größer als die Brennweite sein.
Dieser Versuchsaufbau soll in einem Schaukasten einer Schule gezeigt werden. Die Brennweite der verwendeten Linse beträgt $f = 50\,\text{mm}$. Die Einheit kann für die Berechnungen weggelassen werden.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Zeigen Sie, dass für den gesamten Platzbedarf $a = g + b$ in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g folgender funktionaler Zusammenhang besteht:

$$a(g) = \frac{g^2}{g-50}$$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Bestimmen Sie eine geeignete Definitionsmenge D_a, wenn der Platzbedarf a durch die Länge des Schaukastens mit $3000\,\text{mm}$ begrenzt ist.

Teilaufgabe 3.3 (8 BE)

Beweisen Sie, dass es eine Gegenstandsweite g_0 gibt, für die der Platzbedarf a minimal wird, berechnen Sie g_0 sowie den minimalen Platzbedarf $a(g_0)$ und ermitteln Sie, welcher besondere Zusammenhang zwischen g_0 und der zugehörigen Bildweite b_0 besteht.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Gegeben ist die reelle Funktion $f : x \mapsto \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $|x| \to \infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

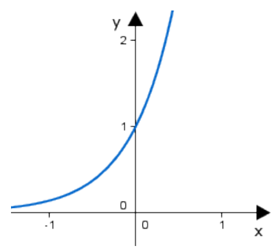
Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Grenzwert bestimmen

$$f(x) = \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Erläuterung: *Eigenschaften der Exponentialfunktion*

Die Exponentialfunktion e^{2x} ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.
Der Graph steigt streng monoton.



Grenzwert für $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{3+e^{2x}}^{\to\infty}}{\underbrace{1+e^{2x}}_{\to\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{3}{e^{2x}}}^{\to 0} + 1}{\underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\to 0} + 1} = 1$$

Grenzwert für $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3 + \overbrace{e^{2x}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{e^{2x}}_{\to 0}} = 3$$

Asymptoten:

$y = 1$ und $y = 3$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen und ihr Graph keine Extrempunkte besitzt.

[Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Nullstellen einer Funktion

$$f(x) = \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$f(x) = 0$

$$\frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}} = 0$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$3 + e^{2x} = 0$

Die Gleichung hat keine Lösung, da $e^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ f hat keine Nullstellen.

Lage von Extrempunkten ermitteln

Erste Ableitung bestimmen:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$$f(x)=e^{g(x)} \;\Rightarrow\; f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$$

Hier ist $u(x)=3+e^{2x}$ und $v(x)=1+e^{2x}$.
Dann ist $u'(x)=2e^{2x}$ und $v'(x)=2e^{2x}$.

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot\left(1+e^{2x}\right)-\left(3+e^{2x}\right)\cdot 2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}\cdot\left[\left(1+e^{2x}\right)-\left(3+e^{2x}\right)\right]}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}\cdot\left(1+e^{2x}-3-e^{2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}\cdot(-2)}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

$$=\frac{-4e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right)=0$, daher immer der Ansatz: $f'(x)=0$

$f'(x)=0$

$$\frac{-4e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}=0$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$-4e^{2x}=0$

Die Gleichung hat keine Lösung, da $e^{2x}>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ f hat keine Extremstellen.

Teilaufgabe 1.3 (9 BE)

Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f, ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes W und stellen Sie die Gleichung der Tangente w an den Graphen von f im Wendepunkt W auf.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Krümmungsverhalten einer Funktion

$$f(x)=\frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$f'(x)=-\frac{4e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2} \qquad \text{(siehe Aufgabe 1.2)}$$

Zweite Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Kettenregel für Exponentialfunktionen:

$$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

Hier ist $u(x) = 4e^{2x}$ und $v(x) = (1+e^{2x})^2$.
Dann ist $u'(x) = 8e^{2x}$ und $v'(x) = 2\cdot(1+e^{2x}) \underbrace{\cdot 2e^{2x}}_{\text{nachdifferenzieren}}$ (Kettenregel).

$$f''(x) = -\frac{8e^{2x}\cdot\left(1+e^{2x}\right)^2 - 4e^{2x}\cdot 2\left(1+e^{2x}\right)\cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^4}$$

$$= -\frac{\left(1+e^{2x}\right)\cdot 8e^{2x} - 4e^{2x}\cdot 2\cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}$$

$$= -\frac{8e^{2x}\cdot\left[\left(1+e^{2x}\right) - 2e^{2x}\right]}{(1+e^{2x})^3}$$

$$= -\frac{8e^{2x}\cdot\left(1-e^{2x}\right)}{(1+e^{2x})^3}$$

$$= \frac{8e^{2x}\cdot\left(e^{2x}-1\right)}{(1+e^{2x})^3}$$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall linksgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $f''(x^W) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

$f''(x) > 0$

$$\frac{8e^{2x}\cdot\left(e^{2x}-1\right)}{(1+e^{2x})^3} > 0$$

Erläuterung: *Eigenschaften der Exponentialfunktion*

Da $\left(\underbrace{1+e^{2x}}_{>0}\right)^3 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, betrachtet man nur den Zähler.

$8e^{2x}\cdot\left(e^{2x}-1\right) > 0$

Erläuterung: *Eigenschaften der Exponentialfunktion*

Da $8e^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, betrachtet man nur den Faktor $e^{2x}-1$.

$e^{2x} - 1 > 0$

$e^{2x} > 1 \quad |\ln$

$x > 0$

Der Graph ist im Bereich $]0;\infty[$ linksgekrümmt und im Bereich $]-\infty;0[$ rechtsgekrümmt.

Erläuterung:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $f''(x^W) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

Da sich an der Stelle $x^W = 0$ die Krümmungsrichtung ändert (Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung) und $f''(0) = \dfrac{8e^{2\cdot 0}\cdot\left(e^{2\cdot 0}-1\right)}{(1+e^{2\cdot 0})^3} = \dfrac{8\cdot(1-1)}{1+1} = 0$, liegt bei $x^W = 0$ ein Wendepunkt vor.

An der Stelle $x_W = 0$ liegt ein Wendepunkt vor.

Funktionswert an der Stelle $x_W = 0$ bestimmen:

$$f(0) = \frac{3+e^{2\cdot 0}}{1+e^{2\cdot 0}} = \frac{3+1}{1+1} = 2$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt $W(0|2)$

Wendetangente

Bestimmen der Gleichung der Wendetangente:

Erläuterung: *Wendetangente*

Die Gleichung der Tangente w im Punkt $W\,(x_W|f\,(x_W))$ ist gegeben durch:

$$w: y = (x - x_W)\cdot f'\,(x_W) + f\,(x_W)$$

Hier ist $W(0|2)$.

$$f'(0) = -\frac{4e^{2\cdot 0}}{(1+e^{2\cdot 0})^2}$$

$$= -\frac{4}{(1+1)^2} = -1$$

Tangentengleichung:

$$w: y = (x - x_W)\cdot f'\,(x_W) + f\,(x_W)$$

$$w: y = (x-0)\cdot(-1) + 2$$

$$w: y = -x + 2$$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von f mit der Tangente w für $-3 \leq x \leq 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab $1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$.
[Teilergebnis: $W(0;2)$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Skizze

$$f(x) = \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Asymptoten: (siehe Aufgabe 1.1)

$y = 1$ für $x \to \infty$

$y = 3$ für $x \to -\infty$

Keine Null- und Extremstellen (siehe Aufgabe 1.2)

Wendepunkt: (siehe Aufgabe 1.3)

$W(0|2)$

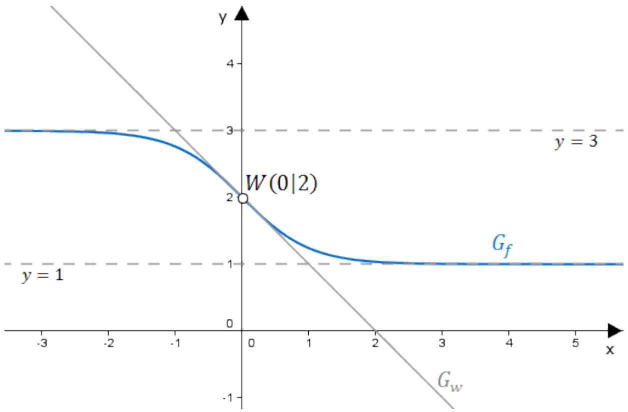
Wendetangente: (siehe Aufgabe 1.3)

$w: y = -x + 2$

Wertetabelle: (nicht erforderlich)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3,00	2,96	2,97	2	1,24	1,04	1,00	1,00	1,00

Skizze:



Teilaufgabe 1.5 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto 3x - \ln(1 + e^{2x}),\ x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion der Funktion f ist.

Lösung zu Teilaufgabe 1.5

Nachweis einer Stammfunktion

Erste Ableitung von F bilden:

$$F'(x) = \left(3x - \ln\left(1 + e^{2x}\right)\right)'$$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Formel für Logarithmusfunktionen:

$$f(x) = \ln(v(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$$

Hier ist $v(x) = 1 + e^{2x}$.
Dann ist $v'(x) = 2e^{2x}$.

$$= 3 - \frac{1}{1 + e^{2x}} \cdot 2e^{2x}$$

$$= \frac{3 \cdot \left(1 + e^{2x}\right)}{1 + e^{2x}} - \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

$$= \frac{3 + 3e^{2x} - 2e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

$$= \frac{3 + e^{2x}}{1 + e^{2x}} = f(x)$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt: $F' = f$.

$\Rightarrow$ F ist eine Stammfunktion von f.

Teilaufgabe 1.6.1 (4 BE)

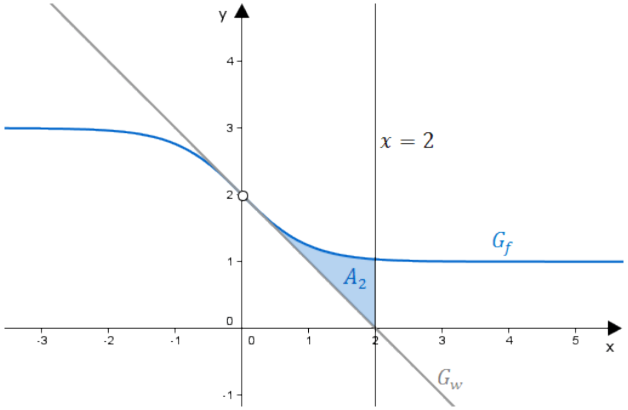
Der Graph von f, die Tangente w und die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u \in \mathbb{R}$

und $u \geq 2$ schließen ein Flächenstück A_u ein.

Kennzeichnen Sie für $u = 2$ das Flächenstück A_2 im Schaubild der Aufgabe 1.4 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl A.
[Teilergebnis: $A \approx 0,675$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.6.1

Skizze



Flächenberechnung

Berechnung der oben markierten Fläche:

Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Verläuft der Graph einer Funktion f oberhalb dem Graphen einer Funktion w, so ist der Inhalt eines Flächenstücks zwischen den zwei Funktionsgraphen G_f und G_w gegeben durch:

$$A = \int_a^b (f(x) - w(x))\ \text{dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_w.

Die Integrationsgrenzen sind 0 und $u = 2$.

$$A_2 = \int_0^2 (f(x) - w(x))\ \text{dx}$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{3 + e^{2x}}{1 + e^{2x}} - (-x + 2) \right)\ \text{dx}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

In Aufgabe 1.5 wurde gezeigt, dass $F(x) = 3x - \ln\left(1 + e^{2x}\right)$ Stammfunktion von f ist.

$$= \left[3x - \ln\left(1 + e^{2x}\right) + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_0^2$$

$$= \left(3 \cdot 2 - \ln\left(1 + e^{2\cdot 2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \right) - \left(3 \cdot 0 - \ln\left(1 + e^{2\cdot 0}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \right)$$

$$= \left(6 - \ln\left(1 + e^4\right) - 2\right) - (-\ln 2)$$

$$= 4 - \ln\left(1 + e^4\right) + \ln 2$$
$$\approx 0,675\,\text{FE}$$

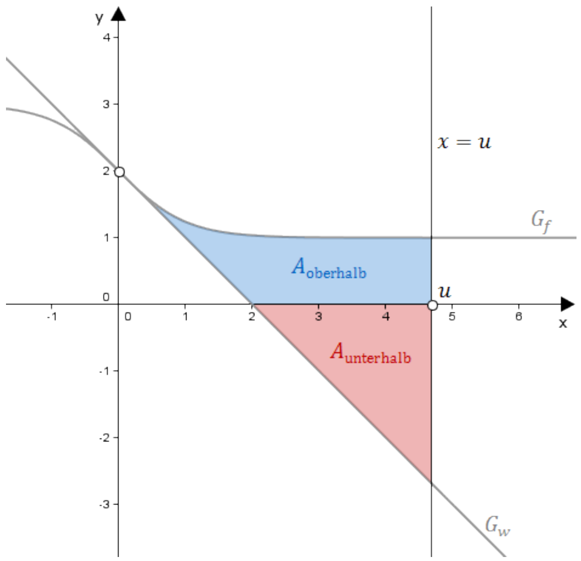
Teilaufgabe 1.6.2 (6 BE)

Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren u näherungsweise so, dass das Flächenstück A_u gleich große Flächenanteile oberhalb und unterhalb der x-Achse besitzt. Benutzen Sie $u_0 = 4$ als Startwert und führen Sie einen Näherungsschritt aus.

Lösung zu Teilaufgabe 1.6.2

Flächenberechnung

Veranschaulichung anhand einer Skizze:



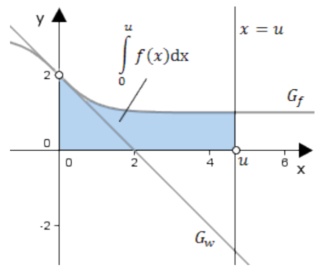
Es soll gelten:

$A_{\text{oberhalb}} = A_{\text{unterhalb}}$

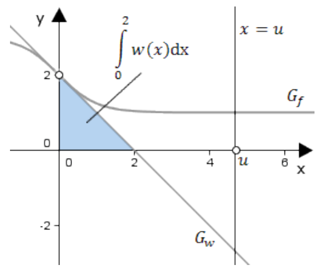
Fläche oberhalb der x-Achse:

Erläuterung:

Die Fläche oberhalb der x-Achse ist die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse abzüglich der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion w und der x-Achse.



Da der Graph der Funktion f für alle $x > 0$ oberhalb der x-Achse verläuft, sind die Integrationsgrenzen 0 und u.



Der Graph der Funktion w verläuft zwischen 0 und 2 oberhalb der x-Achse. Die Integrationsgrenzen sind also 0 und 2.

$$A_{\text{oberhalb}} = \int_0^u f(x)\mathrm{d}x - \int_0^2 w(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^u \frac{3+e^{2x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{dx} - \int_0^2 (-x+2)\mathrm{dx}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

In Aufgabe 1.5 wurde gezeigt, dass $F(x) = 3x - \ln\left(1+e^{2x}\right)$ Stammfunktion von f ist.

$$= \left[3x - \ln\left(1+e^{2x}\right)\right]_0^u - \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^2$$
$$= \left(3u - \ln\left(1+e^{2u}\right) - \left(0 - \ln\left(1+e^0\right)\right)\right) - \left(-\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 0\right)$$
$$= 3u - \ln\left(1+e^{2u}\right) + \ln 2 - 2$$

Fläche unterhalb der x-Achse:

Erläuterung: *Flächenberechnung*

Die Fläche unterhalb der x-Achse ist die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion w und der x-Achse.

Da der Graph der Funktion w nur für $x > 2$ unterhalb der x-Achse verläuft, sind die Integrationsgrenzen 2 und u.

$$A_{\text{unterhalb}} = \left|\int_2^u w(x)\mathrm{dx}\right| = \left|\left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_2^u\right|$$
$$= \left|-\frac{1}{2}u^2 + 2u - (2-4)\right|$$
$$= \left|-\frac{1}{2}u^2 + 2u - 2\right|$$
$$= \frac{1}{2}u^2 - 2u + 2$$

Die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse sollen gleich groß sein.

$$A_{\text{oberhalb}} = A_{\text{unterhalb}}$$
$$3u - \ln\left(1+e^{2u}\right) + \ln 2 - 2 = \frac{1}{2}u^2 - 2u + 2$$
$$3u - \ln\left(1+e^{2u}\right) + \ln 2 - 2 - \frac{1}{2}u^2 + 2u - 2 = 0$$
$$-\frac{1}{2}u^2 + 5u - 4 - \ln\left(1+e^{2u}\right) + \ln 2 = 0$$

Newton-Verfahren

Gesucht ist also die Nullstelle der Funktion $h(u) = -\frac{1}{2}u^2 + 5u - 4 - \ln\left(1+e^{2u}\right) + \ln 2$

Newton-Verfahren:

Erläuterung:

Newtonsche Iterationsformel zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für den ersten Schritt, mit Startwert x_0, gilt somit: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Erste Ableitung bilden:

$$h'(u) = -u + 5 - \frac{2e^{2u}}{1+e^{2u}}$$

Berechnung des ersten Näherungsschrittes mit dem Startwert $u_0 = 4$:

$$h(u_0) = -\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 5\cdot 4 - 4 - \ln\left(1+e^{2\cdot 4}\right) + \ln 2 \approx 0,6928$$
$$h'(u_0) = -4 + 5 - \frac{2e^{2\cdot 4}}{1+e^{2\cdot 4}} \approx -0,9993$$
$$u_1 = u_0 - \frac{h(u_0)}{h'(u_0)}$$
$$u_1 = 4 - \frac{-0,6928}{0,9993} \approx 4,6933$$

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)

Gegeben ist ferner in der maximalen Definitionsmenge D_g eine Funktion $g: x \mapsto a\cdot\ln(bx+c) + 2$, bei der die reellen, von null verschiedenen Koeffizienten a, b und c dadurch festgelegt sind, dass der Graph dieser Funktion durch den Punkt $P(0;2)$ verläuft, dort die Steigung 1 und an der Stelle $x_0 = -1$ die Steigung 3 besitzt.

Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

[Ergebnis: $a = \frac{3}{2}$; $b = \frac{2}{3}$; $c = 1$]

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Parameterwerte ermitteln

$g(x) = a \cdot \ln(b\,x + c) + 2$

Erste Ableitung bilden:

$g'(x) = \dfrac{a\,b}{b\,x + c}$

> Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*
>
> Kettenregel:
>
> $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
>
> Formel für Logarithmusfunktionen:
>
> $f(x) = \ln(v(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$
>
> Hier ist $v(x) = b\,x + c$.
> Dann ist $v'(x) = b$.

$g'(x) = \dfrac{a\,b}{b\,x + c}$

> Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*
>
> Über die gegebenen Bedingungen lassen sich Gleichungen aufstellen, welche die Parameter a, b und c enthalten. Durch das Lösen des dadurch entstandenen Gleichungssystems erhält man die gesuchten Werte.

- Der Graph verläuft durch den Punkt $(0|2)$: $g(0) = 2$
  $a \cdot \ln(c) + 2 = 2$
  $a \cdot \ln(c) = 0$
  $\ln(c) = 0$

> Erläuterung: *Nullstellen einer Logarithmusfunktion*
>
> Da $\ln 1 = 0$, nimmt der Term $\ln(c)$ den Wert Null an, wenn das Argument $c = 1$ ist.

$c = 1$

- Der Graph hat im Punkt $(0|2)$ die Steigung 1:

> Erläuterung: *Steigung eines Funktionsgraphen*
>
> Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 0$ gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(0|g(0))$ an.

$g'(0) = 1$
$\dfrac{a\,b}{c} = 1$
$a\,b = c$
$a\,b = 1 \quad \text{(I)}$

- Der Graph hat an der Stelle $x_0 = -1$ die Steigung 3:

> Erläuterung: *Stetigkeit einer Funktion*
>
> Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 1$ gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(1|g(1))$ an.

$g'(-1) = 3$
$\dfrac{a\,b}{-b + c} = 3$
$a\,b = 3(-b + c)$
$a\,b = -3b + 3c$
$a\,b = -3b + 3 \quad \text{(II)}$

Gleichungssytem:

(I) $a\,b = 1$
(II) $a\,b = -3b + 3$

Die linken Seiten beider Gleichungen sind identisch.

$\Rightarrow$ Gleichsetzen:

$1 = -3b + 3$

$3b = 2$

$b = \frac{2}{3}$

Den Wert $b = \frac{2}{3}$ in (I) einsetzen:

$a \cdot \frac{2}{3} = 1$

$a = \frac{3}{2}$

Berechnete Werte für die Parameter a, b und c in $g(x)$ einsetzen:

$$g(x) = \frac{3}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{3}x + 1\right) + 2$$

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_g.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Definitionsbereich bestimmen

$$g(x) = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{3}x + 1\right) + 2$$

Definitionsmenge D_g bestimmen:

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

$g(x)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $a \cdot \ln(h(x)) + c$.

Die ln-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert.
Somit gilt für die Argumentfunktion $h(x) > 0$.

In diesem Fall: $\frac{2}{3}x + 1 > 0$

$\frac{2}{3}x + 1 > 0$

$\frac{2}{3}x > -1$

$x > -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \quad D_g = \left]-\frac{3}{2};\infty\right[$

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion g streng monoton ist.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Monotonieverhalten einer Funktion

$$g(x) = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{3}x + 1\right) + 2$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Formel für Logarithmusfunktionen:

$f(x) = \ln(v(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$

Hier ist $v(x) = \dfrac{2}{3}x + 1.$

Dann ist $v'(x) = \dfrac{2}{3}.$

$$g'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}x + 1} = \frac{1}{\frac{2}{3}x + 1}$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

$f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

$g'(x) > 0$

$\dfrac{1}{\frac{2}{3}x + 1} > 0$

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Die erste Ableitung ist ein Bruch.

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\dfrac{3}{5} > 0$ oder $\dfrac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\dfrac{-3}{5} < 0$ oder $\dfrac{3}{-5} < 0$)

Da hier der Zähler 1 ist, kommt nur der Fall „Zähler und Nenner positiv“ in Betracht.

$\dfrac{2}{3}x + 1 > 0$

$\dfrac{2}{3}x > -1$

$x > -\dfrac{3}{2}$

Der Graph von g ist für $x \in \left]-\dfrac{3}{2}; \infty\right[= D_g$ (also im gesamten Definitionsbereich) streng monoton steigend.

Teilaufgabe 2.4 (8 BE)

Untersuchen Sie, ob die Funktion h mit

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x < 0 \text{ (siehe Aufgabe 1)} \\ g(x) & \text{für } x \geq 0 \text{ (siehe Aufgabe 2)} \end{cases}$$

an der Nahtstelle $x = 0$ stetig ist, begründen Sie, dass die Funktionswerte von h an der Nahtstelle ein Minimum aufweisen, und geben Sie den Winkel an, unter dem die Graphen der beiden Teilfunktionen an der Nahtstelle aufeinandertreffen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.4

Stetigkeit einer Funktion

$$f(x) = \frac{3 + e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

$g(x) = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2}{3}x + 1 \right) + 2$

$h(x) = \{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{für } x < 0 \\ g(x) & \text{für } x \geq 0 \end{array}$

Überprüfen auf Stetigkeit:

Erläuterung: *Stetigkeit einer Funktion*

Eine Funktion f ist stetig bei x_0, wenn an dieser Stelle kein Sprung im Graphen vorhanden ist.

Die Funktionswerte müssen also von links und von rechts an x_0 angenähert den selben Grenzwert ergeben.

$\lim\limits_{x \to x^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x^-} f(x)$

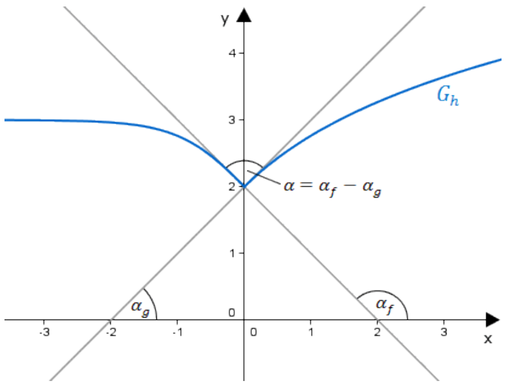
$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{3}{2} \ln \left(\frac{2}{3}x + 1 \right) + 2 \right) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3 + e^{2x}}{1 + e^{2x}} = 2$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$

$\Rightarrow \quad h$ ist bei x_0 stetig

Winkel bestimmen



$f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$ (siehe Aufgabe 1.2)

$g'(x) = \frac{1}{\frac{2}{3}x + 1}$ (siehe Aufgabe 2.3)

Berechnen der Werte von $f'(0)$ und $g'(0)$:

Erläuterung: *Schnittwinkel*

Der Winkel, in dem die zwei Teilfunktionen f und g zusammentreffen, ist gleich dem Schnittwinkel zwischen den Funktionen.

Der Wert der ersten Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 gibt Auskunft über den Steigungswinkel α, den die Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt $(x_0|f(x_0))$ mit der (positiven) x-Achse einschließt.

Es gilt folgender Zusammenhang:

$\tan \alpha = f'(x_0)$

Steigungswinkel des Graphen der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$:

$f'(0) = \frac{-4}{(1+1)^2} = -1$

$\tan \alpha_f = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_f = 135°$

Steigungswinkel des Graphen der Funktion g an der Stelle $x_0 = 0$:

$g'(0) = \frac{1}{1} = 1$

$\tan \alpha_g = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_g = 45°$

Differenz berechnen:

$\alpha = \alpha_f - \alpha_g = 135° - 45° = 90°$

Begründung für ein Minimum an der Nahtstelle $x_0 = 0$:

Der Graph von f hat keine Extremstellen (siehe Aufgabe 1.2) und bei $x = 0$ die Steigung $f'(0) = -1$ (siehe Aufgabe 1.3).

$\Rightarrow \quad f'(x) < 0$ (f ist monoton fallend auf ganz $\mathbb{R}$)

Der Graph von g ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend (siehe Aufgabe 2.3).

$\Rightarrow \quad g'(x) > 0$

Die erste Ableitung der Funktion $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x < 0 \\ g(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ hat somit an der Nahtstelle $x_0 = 0$ einen Vorzeichenwechsel von $(-)$ nach $(+)$.

Erläuterung:

Die Art eines Extrempunkts wird durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt:

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

$\Rightarrow \quad h$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ ein Minimum.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Mithilfe einer Konvexlinse (Sammellinse) wird von einem selbstleuchtenden, links von der Linse stehenden Gegenstand auf einem Schirm rechts von der Linse ein reales, scharfes Bild erzeugt. Der Abstand des Gegenstands von der Linsenmitte heißt dabei Gegenstandsweite g, der Abstand des Schirms von der Linsenmitte heißt Bildweite b.
Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ist durch die Linsenformel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ gegeben, wobei mit f die Brennweite der Linse bezeichnet wird.
Um ein reales Bild zu erzeugen, muss die Gegenstandsweite größer als die Brennweite sein.
Dieser Versuchsaufbau soll in einem Schaukasten einer Schule gezeigt werden. Die Brennweite der verwendeten Linse beträgt $f = 50\,\text{mm}$. Die Einheit kann für die Berechnungen weggelassen werden.

Zeigen Sie, dass für den gesamten Platzbedarf $a = g + b$ in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g folgender funktionaler Zusammenhang besteht:

$$a(g) = \frac{g^2}{g-50}$$

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Nachweis der Gültigkeit einer gegebenen Beziehung

$a = g + b$

Linsenformel:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{50}$$

Erläuterung:

Es soll eine Formel entwickelt werden, mit der man a berechnen kann. Der Term auf der rechten Seite darf nur von der Variablen g abhängen.

Die Variable b in der Gleichung $a = g + b$ muss also ersetzt werden. Hierfür löst man die Linsenformel nach b auf.

Linsenformel nach b auflösen:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{50}$$
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{50} - \frac{1}{g}$$
$$\frac{1}{b} = \frac{g-50}{50g}$$
$$b = \frac{50g}{g-50}$$

$b = \frac{50g}{g-50}$ einsetzen in die Gleichung für den Platzbedarf:

$$a(g) = g + \frac{50g}{g-50} = \frac{g(g-50)+50g}{g-50} = \frac{g^2-50g+50g}{g-50} = \frac{g^2}{g-50}$$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Bestimmen Sie eine geeignete Definitionsmenge D_a, wenn der Platzbedarf a durch die Länge des Schaukastens mit $3000\,\text{mm}$ begrenzt ist.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Definitionsbereich bestimmen

$a(g) = \dfrac{g^2}{g-50}$

Für die Größe a gibt es folgende Bedingungen, die **alle** erfüllt sein müssen:

Erläuterung:

a muss positiv sein, da es sich hier um eine reale Längenangabe handelt.

Ferner darf a maximal $3000\,\text{mm}$ sein.

1. $a(g) > 0$

2. $a(g) < 3000$

1. Bedingung:

$a(g) > 0$

$\dfrac{g^2}{g-50} > 0$

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\dfrac{3}{5} > 0$ oder $\dfrac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\dfrac{-3}{5} < 0$ oder $\dfrac{3}{-5} < 0$)

Da g^2 immer positiv ist, genügt es den Fall „Zähler und Nenner positiv“ zu betrachten.

$g^2 > 0$ gilt für alle $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g - 50 > 0$ gilt für $g > 50$

Die erste Bedingung ist für alle $g > 50$ erfüllt.

2. Bedingung:

$a(g) < 3000$

$\dfrac{g^2}{g-50} < 3000$

$g^2 < 3000(g-50) \quad (\,g-50>0\,)$

$g^2 < 3000g - 150000$

$g^2 - 3000g + 150000 < 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:

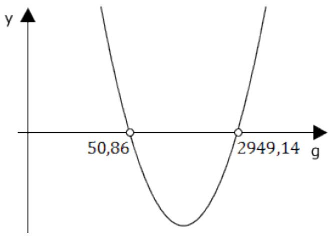
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$

$g_{1,2} = \dfrac{3000 \pm \sqrt{3000^2 - 4\cdot 1\cdot 150000}}{2} = \dfrac{3000 \pm 2898,28}{2}$

$g_1 = 2949,14$

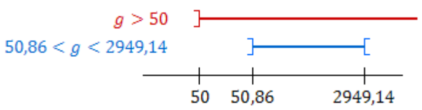
$g_2 = 50,86$

$g^2 - 3000g + 150000$ kann als eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $g_1 = 2949,14$ und $g_2 = 50,86$ angesehen werden.



Die zweite Bedingung gilt also für $50,86 < g < 2949,14$

Veranschaulichung beider Bedingungen am Zahlenstrahl:



Beide Bedingungen müssen erfüllte sein.

$\Rightarrow\ 50,86 < g < 2949,14$

Erläuterung:

Da beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, kann g nur Werte zwischen $50,86$ und $2949,14$ annehmen.

g wird in Millimeter angegeben. Deswegen reicht die Angabe von ganzzahligen Werten aus.

Da bei der Rundung der Zahlen die exakten Randwerte nicht mehr auftreten, kann die Definitionsmenge als geschlossenes Intervall angegeben werden.

Es folgt also für die Definitionsmenge:

$D_a = [51; 2949]$

Teilaufgabe 3.3 (8 BE)

Beweisen Sie, dass es eine Gegenstandsweite g_0 gibt, für die der Platzbedarf a minimal wird, berechnen Sie g_0 sowie den minimalen Platzbedarf $a(g_0)$ und ermitteln Sie, welcher besondere Zusammenhang zwischen g_0 und der zugehörigen Bildweite b_0 besteht.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3

Extremwertaufgabe

$$a(g) = \frac{g^2}{g-50}$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(g) = g^2$ und $v(g) = g - 50\,.$
Dann ist $u'(g) = 2g$ und $v'(g) = 1\,.$

$$a'(g) = \frac{2g(g-50) - g^2\cdot 1}{(g-50)^2} = \frac{g^2 - 100g}{(g-50)^2}$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$a'(g) = 0$

$$\frac{g^2 - 100g}{(g-50)^2} = 0$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$g^2 - 100g = 0$

$g(g - 100) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.
Jeder Faktor wird untersucht.

$g = 0 \quad \notin D_a$

$g - 100 = 0$

$g_0 = 100$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts wird durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt:

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

Vorzeichenwechsel von a' an der Stelle $g_0 = 100$ untersuchen:

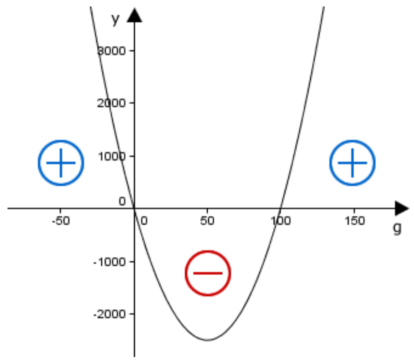
Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$)

Da $(g-50)^2$ immer positiv ist, genügt es den Zähler zu betrachten.

Der Zähler $g^2 - 100g$ kann als eine nach oben geöffnete Parabel mit Nullstellen bei 0 und 100 angesehen werden.



Bei $g_0 = 100$ findet ein Vorzeichenwechsel von $(-)$ nach $(+)$ statt.

$\Rightarrow \quad g_0 = 100$ ist relatives Minimum

Platzbedarf bei $g_0 = 100$:

$a(100) = 200$

Randbetrachtung:

$a(51) = 2601 > 200$

$a(2949) = 3000 > 200$

$\Rightarrow \quad g_0 = 100$ ist absolutes Minimum

Berechnung der zu $g_0 = 100$ gehörigen Bildweite b_0:

$a = g + b$ (siehe Aufgabe 3.1)

$200 = 100 + b_0$

$b_0 = 100$

$\Rightarrow \quad b_0 = g_0$

Für den minimalen Platzbedarf sind also Bild- und Gegenstandweite identisch.