

Fachabitur 2011 Mathematik T Infinitesimalrechnung A I

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der maximalen Definitionsmenge D_a . Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_a bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Geben Sie D_a an und bestimmen Sie die Art der Definitionslücke.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Ermitteln Sie, für welche Parameterwerte a die Funktion f_a zwei verschiedene Nullstellen, genau eine Nullstelle bzw. keine Nullstelle hat, und geben Sie die entsprechenden Nullstellen jeweils an.

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$ und bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_a .

Teilaufgabe 1.4 (8 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f_a und ermitteln Sie damit Art und Lage der Extrempunkte des Graphen G_a .

$$[\text{Mögliches Teilergebnis: } f'_a(x) = \frac{(x+2a)^2 - 1}{2(x+2a)^2}]$$

Teilaufgabe 1.5 (3 BE)

Zeigen Sie, dass unabhängig von a der Tiefpunkt $T_a(-2a+1; -a+1)$ und der Hochpunkt $H_a(-2a-1; -a-1)$ des Graphen G_a immer denselben Abstand voneinander haben.

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)

Setzen Sie $a = -1$ und zeichnen Sie den Graphen G_{-1} mit seinen Asymptoten für $-3 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

Für $a = -1$ erhält man nach entsprechender Umformung die Funktion $f_{-1} : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-4}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge D_{-1} .

Der Graph G_{-1} begrenzt mit den drei Geraden mit den Gleichungen $y = 0$, $x = k$ und $x = k+1$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $k > 2$ ein Flächenstück A_k .

Teilaufgabe 1.7.1 (9 BE)

Kennzeichnen Sie für $k = 3$ das Flächenstück A_3 im Schaubild der Aufgabe 1.6 und zeigen Sie, dass für die von k abhängige Flächenmaßzahl F des Flächenstücks A_k gilt:

$$F(k) = \frac{1}{2} \cdot \left(k + \frac{1}{2} + \ln \frac{k-1}{k-2} \right)$$

Teilaufgabe 1.7.2 (9 BE)

Bestimmen Sie den Parameterwert k so, dass die Flächenmaßzahl F ihren absolut kleinsten Wert annimmt.

Nach einem Modell des britischen Ökonomen Thomas Malthus kann die Zahl B der Weltbevölkerung in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden. (Einheiten werden nicht mitgeführt.)

$$B(t) = B_0 \cdot e^{r \cdot t}, \text{ wobei gilt: } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0 \text{ sowie } r \in \mathbb{R} \text{ und } r > 0.$$

Dabei gibt B_0 die Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt $t = 0$ am 1.1.1800 an und r ist ein Maß für die Wachstumsrate der Bevölkerung.

Am 1.1.1950 betrug die Weltbevölkerung der Bevölkerung etwa 3,7 Milliarden Menschen, und am 1.1.2050 werden etwa 9,5 Milliarden Menschen weltweit erwartet.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Zeigen Sie, dass für die Werte B_0 und r gilt: $B_0 \approx 0,90 \cdot 10^9$ und $r \approx 9,43 \cdot 10^{-3}$.

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Stellen Sie die Entwicklung der Weltbevölkerung zwischen 1.1.1800 und 1.1.2050 mit einem geeigneten Maßstab grafisch dar.

Teilaufgabe 2.3 (5 BE)

Entnehmen Sie einer entsprechenden Markierung im Diagramm der Aufgabe 2.2 zu einem beliebigen Zeitpunkt t das Zeitintervall Δt , für das folgende Bedingung gilt: $B(t + \Delta t) = 2 \cdot B(t)$. Zeigen Sie durch Rechnung, dass das Zeitintervall Δt unabhängig vom Zeitpunkt t ist, und berechnen Sie Δt auf eine Nachkommastelle gerundet.

Teilaufgabe 2.4 (7 BE)

Die natürliche Tragfähigkeitsgrenze der Erde ist der Zeitpunkt t_{TG} , an dem die Maßzahl der zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel

$$N(t) = 2,5 \cdot 10^7 \cdot t + 2,0 \cdot 10^9 \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0 \text{ (} t \text{ in Jahren)}$$

nicht mehr größer ist als die Zahl der Weltbevölkerung $B(t)$.

(Eine Nahrungsmiteleinheit entspricht zur Vereinfachung dabei einer Bevölkerungseinheit.)

Bestimmen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens den Zeitpunkt t_{TG} . Benutzen Sie als Startwert $t_0 = 210$, führen Sie nur einen Näherungsschritt durch, runden Sie das Ergebnis auf ganze Jahre und geben Sie auch das entsprechende Jahr unserer Zeitrechnung an.

Lösung**Teilaufgabe 1.1** (4 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der maximalen Definitionsmenge D_a . Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_a bezeichnet.

Geben Sie D_a an und bestimmen Sie die Art der Definitionslücke.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1**Definitionsbereich bestimmen**

$$f_a(x) = \frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a}$$

Nenner Null setzen:

Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*

$f(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $2x + 4a$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$$2x + 4a = 0$$

$$\Rightarrow x = -2a$$

$x = -2a$ vom Definitionsbereich ausschließen:

$$D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{-2a\}$$

Art der Definitionslücke bestimmen

Bestimmen der Art der Definitionslücke:

Erläuterung: *Art der Definitionslücke*

Die Nennerfunktion $2x + 4a$ hat bei $x = -2a$ eine einfache Nullstelle.
Man untersucht die Zählerfunktion an der Stelle $x = -2a$.

Hat der Zähler ebenfalls eine Nullstelle bei $x = -2a$ und ist deren Vielfachheit gleich oder größer derer der Nennerfunktion, dann ist $x = -2a$ eine hebbare Definitionslücke.
Anderenfalls ist $x = -2a$ ein Pol.

Bestimmen des Wertes der Zählerfunktion $x^2 + 2ax + 1$ bei $x = -2a$:

$$(-2a)^2 + 2a(-2a) + 1 = 1 \neq 0$$

Erläuterung: *Polstelle*

Ist die Zählerfunktion bei $x = -2a$ von Null verschieden, gibt die Vielfachheit der Nennernullstelle die Ordnung des Pols an.

$x = -2a$ ist einfache Nullstelle der Nennerfunktion

$\Rightarrow f$ hat an der Stelle $x = -2a$ einen Pol 1. Ordnung.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Ermitteln Sie, für welche Parameterwerte a die Funktion f_a zwei verschiedene Nullstellen, genau eine Nullstelle bzw. keine Nullstelle hat, und geben Sie die entsprechenden Nullstellen jeweils an.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2**Nullstellen einer Funktion**

$$f_a(x) = \frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a}$$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$$f(x) = 0$$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$f_a(x) = 0$$

$$\frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a} = 0$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$$x^2 + 2ax + 1 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ lauten stets:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{-2a \pm 2 \cdot \sqrt{a^2 - 1}}{2} \\ &= -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Anzahl der Nullstellen betrachtet man den Ausdruck unter der Wurzel (Diskriminante):

Erläuterung: *Anzahl der Nullstellen einer quadratischen Funktion*

Die Diskriminante ist der Ausdruck unter der Wurzel in der Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminante: $D = b^2 - 4ac$

Eine quadratische Gleichung hat keine Lösung, wenn die Diskriminante kleiner Null ist. $D < 0$

Eine quadratische Gleichung hat genau eine Lösung, wenn die Diskriminante gleich Null ist. $D = 0$

Eine quadratische Gleichung hat genau zwei Lösungen, wenn die Diskriminante größer Null ist. $D > 0$

Keine Nullstelle: $a^2 - 1 < 0$

$$a^2 < 1$$

$$\Rightarrow -1 < a < 1$$

Eine Nullstelle: $a^2 - 1 = 0$

$$a^2 = 1$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad \vee \quad a = -1$$

Die Nullstelle liegt dann bei $x = -a \pm \sqrt{0} = -a$.

Zwei Nullstellen: $a^2 - 1 > 0$

$$a^2 > 1$$

$$\Rightarrow a < -1 \quad \vee \quad a > 1$$

Die Nullstellen liegen dann bei $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$.

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$ und bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_a .

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Grenzwert bestimmen

Grenzwert für $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a}$$

Teilen des Zählers und des Nenners durch x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{x}^{\rightarrow \infty} + 2a + \overbrace{\frac{1}{x}}^{\rightarrow 0}}{2 + \underbrace{\frac{4a}{x}}_{\rightarrow 0}} = \infty$$

Grenzwert für $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{x}^{\rightarrow -\infty} + 2a + \overbrace{\frac{1}{x}}^{\rightarrow 0}}{2 + \underbrace{\frac{4a}{x}}_{\rightarrow 0}} = -\infty$$

Asymptoten bestimmen

Polynomdivision durchführen:

Erläuterung: *Polynomdivision*

Eine Polynomdivision ist ein Verfahren zur Berechnung der Summenschreibweise gebrochenrationaler Funktionen.

Um beispielsweise den Term $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ als Summe zu schreiben, wird folgende Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{r} (x^2 + x - 2) : (x - 1) = x + 2 \\ -(x^2 - x) \\ \hline 2x - 2 \\ -(2x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (x^2 + 2ax + 1) : (2x + 4a) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x + 4a} \\ -(x^2 + 2ax) \\ \hline 0 + 1 \end{array}$$

Asymptoten:

$$y = \frac{1}{2}x \quad (\text{schräge Asymptote})$$

f_a hat bei $x = -2a$ eine Polstelle also eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = -2a$.

Alternative Lösung

Grenzwert für $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{2}x}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{\frac{1}{2x + 4a}}_{\rightarrow 0} \right) = +\infty$$

Grenzwert für $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{2}x}_{\rightarrow -\infty} + \underbrace{\frac{1}{2x + 4a}}_{\rightarrow 0} \right) = -\infty$$

Teilaufgabe 1.4 (8 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f_a und ermitteln Sie damit Art und Lage der Extrempunkte des Graphen G_a .

$$[\text{Mögliches Teilergebnis: } f'_a(x) = \frac{(x + 2a)^2 - 1}{2(x + 2a)^2}]$$

Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Monotonieverhalten einer Funktion

Erste Ableitung bilden:

$$f'_a(x) = \left(\frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a} \right)'$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = x^2 + 2ax + 1$ und $v(x) = 2x + 4a$.
Dann ist $u'(x) = 2x + 2a$ und $v'(x) = 2$.

$$\begin{aligned} f'_a(x) &= \frac{(2x + 2a) \cdot (2x + 4a) - (x^2 + 2ax + 1) \cdot 2}{(2x + 4a)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 8ax + 4a^2 - 2x^2 - 4ax - 2}{(2x + 4a)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 8ax + 8a^2 - 2}{[2 \cdot (x + 2a)]^2} \\ &= \frac{2 \cdot (x^2 + 4ax + 4a^2 - 1)}{4 \cdot (x + 2a)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 + 4ax + 4a^2 - 1}{2 \cdot (x + 2a)^2}$$

$$= \frac{(x + 2a)^2 - 1}{2 \cdot (x + 2a)^2}$$

Vorzeichen der ersten Ableitung untersuchen:

$$f'_a(x) > 0$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

$f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

$$\frac{(x + 2a)^2 - 1}{2 \cdot (x + 2a)^2} > 0$$

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Die erste Ableitung ist ein Bruch.

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedene Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$).

Da $2 \cdot (x + 2a)^2 > 0$ für alle $x \in D_{f_a}$ betrachtet man nur den Zähler:

Da $2 \cdot (x + 2a)^2 > 0$ für alle $x \in D_{f_a}$ betrachtet man nur den Zähler:

$$(x + 2a)^2 - 1 > 0$$

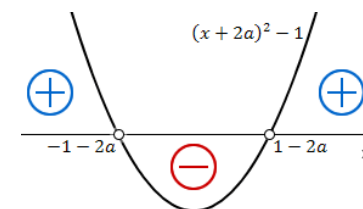
$$(x + 2a)^2 - 1 = 0$$

$$(x + 2a)^2 = 1$$

$$x + 2a = \pm 1$$

$$x = \pm 1 - 2a$$

Die Funktion $(x + 2a)^2 - 1$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen bei $-1 - 2a$ und $1 - 2a$.



Für $x < -1 - 2a$ und für $x > 1 - 2a$ ist $f'_a(x) > 0$. G_{f_a} ist also im Bereich $] -\infty; -1 - 2a[\cup] 1 - 2a; \infty[$ streng monoton steigend.

Für $-1 - 2a < x < 1 - 2a$ ist $f'_a(x) < 0$. G_{f_a} ist also im Bereich $] -1 - 2a; 1 - 2a[$ streng monoton fallend.

Art von Extrempunkten ermitteln

Die Nullstellen der Ableitung sind $x_1^E = -1 - 2a$ und $x_2^E = 1 - 2a$. Hier liegen Extremstellen vor.

Erläuterung: Art eines Extremums

Die Art eines Extrempunkts wird durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt:

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von (+) nach (-) an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'(x^E) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von (-) nach (+) an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

G_{f_a} ist im Bereich $] -\infty; -1 - 2a[$ streng monoton steigend und im Bereich $] -1 - 2a; 1 - 2a[$ streng monoton fallend. An der Stelle $x_1^E = -1 - 2a$ liegt folglich ein Maximum vor.

G_{f_a} ist im Bereich $] -1 - 2a; 1 - 2a[$ streng monoton fallend und im Bereich $]1 - 2a; \infty[$ streng monoton steigend. An der Stelle $x_2^E = 1 - 2a$ liegt folglich ein Minimum vor.

Lage von Extrempunkten ermitteln

Berechnen der Funktionswerte:

$$\begin{aligned} f(x_1^E) &= f(-1 - 2a) = \frac{(-1 - 2a)^2 + 2a \cdot (-1 - 2a) + 1}{2 \cdot (-1 - 2a) + 4a} \\ &= \frac{1 + 4a + 4a^2 - 2a - 4a^2 + 1}{-2 - 4a + 4a} \\ &= \frac{2a + 2}{-2} \\ &= -a - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt } H_a(-1 - 2a | -a - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_2^E) &= f(1 - 2a) = \frac{(1 - 2a)^2 + 2a \cdot (1 - 2a) + 1}{2 \cdot (1 - 2a) + 4a} \\ &= \frac{1 - 4a + 4a^2 + 2a - 4a^2 + 1}{2 - 4a + 4a} \\ &= \frac{-2a + 2}{2} \\ &= -a + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt } T_a(1 - 2a | -a + 1) \end{aligned}$$

Teilaufgabe 1.5 (3 BE)

Zeigen Sie, dass unabhängig von a der Tiefpunkt $T_a(-2a + 1; -a + 1)$ und der Hochpunkt $H_a(-2a - 1; -a - 1)$ des Graphen G_a immer denselben Abstand voneinander haben.

Lösung zu Teilaufgabe 1.5**Abstand zweier Punkte**

Bestimmen des Vektors $\overrightarrow{T_a H_a}$:

$$\overrightarrow{T_a H_a} = \begin{pmatrix} -1 - 2a \\ -a - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - 2a \\ -a + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Vektor ist unabhängig von a , also auch dessen Länge.

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)

Setzen Sie $a = -1$ und zeichnen Sie den Graphen G_{-1} mit seinen Asymptoten für $-3 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

Lösung zu Teilaufgabe 1.6**Skizze**

$$f_a(x) = \frac{x^2 + 2ax + 1}{2x + 4a}$$

Setze $a = -1$:

$$\Rightarrow f_{-1}(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4}$$

Nullstelle:

$$x^N = -a = -(-1) = 1$$

Extrempunkte:

$$\text{Hochpunkt } H_a(-2a - 1 | -a - 1) \Rightarrow H_{-1} = (1 | 0)$$

$$\text{Tiefpunkt } T_a(-2a + 1 | -a + 1) \Rightarrow T_{-1} = (3 | 2)$$

Pol 1. Ordnung:

$$x = -2a = -2 \cdot (-1) = 2$$

Asymptoten:

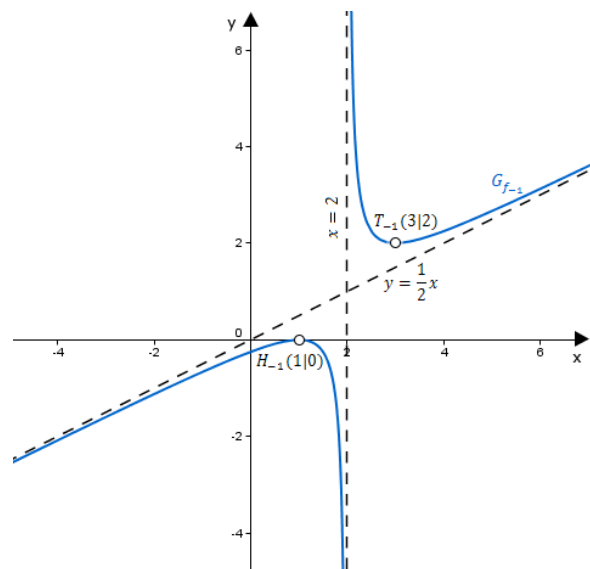
$$y = \frac{1}{2}x$$

$$x = -2a = 2$$

Wertetabelle: (nicht erforderlich)

x	-3	-2	-1	0	1	1,9	2,1	3	4	5	6
$f_{-1}(x)$	-1,6	-1,13	-0,67	0,25	0	-4,05	6,05	2	2,25	2,67	3,13

Skizze:



Teilaufgabe 1.7.1 (9 BE)

Für $a = -1$ erhält man nach entsprechender Umformung die Funktion $f_{-1} : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-4}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge D_{-1} .

Der Graph G_{-1} begrenzt mit den drei Geraden mit den Gleichungen $y = 0$, $x = k$ und $x = k + 1$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $k > 2$ ein Flächenstück A_k .

Kennzeichnen Sie für $k = 3$ das Flächenstück A_3 im Schaubild der Aufgabe 1.6 und zeigen Sie, dass für die von k abhängige Flächenmaßzahl F des Flächenstücks A_k gilt:

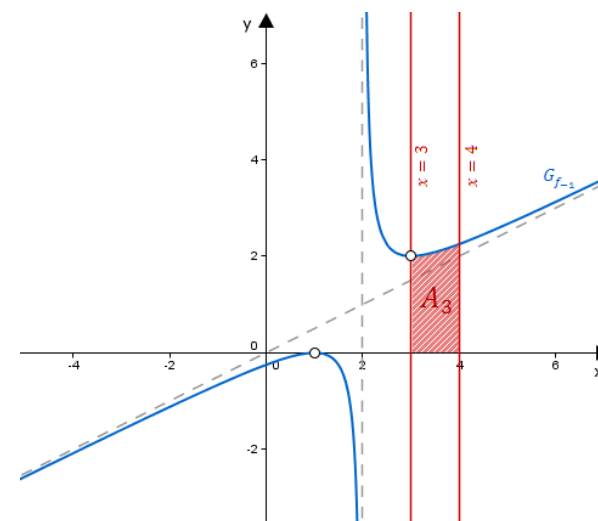
$$F(k) = \frac{1}{2} \cdot \left(k + \frac{1}{2} + \ln \frac{k-1}{k-2} \right)$$

Lösung zu Teilaufgabe 1.7.1

Flächenberechnung

$$f_{-1}(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x - 4}$$

Skizze:



Berechnung der Fläche:

Erläuterung:

Die Fläche die $G_{f_{-1}}$ mit der x -Achse zwischen k und $k+1$ einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$F(k) = \left| \int_k^{k+1} f_{-1}(x) dx \right|$$

Da für $k > 2$ das Flächenstück oberhalb der x -Achse liegt, können die Betragsstriche weggelassen werden.

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_k^{k+1} f_{-1}(x) dx \\ &= \int_k^{k+1} \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-4} dx \end{aligned}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f , dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} \frac{1}{2x-4} dx$$

Erläuterung: *Logarithmisches Integrieren*

Ist f eine Funktion der Form $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, so gilt:

$$\int f(x) dx = \ln|g(x)|$$

Hier muss erst umgeformt werden:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{2x-4} dx = \int_k^{k+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x-4} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_k^{k+1} \frac{2}{2x-4} dx$$

Dann ist $g(x) = 2x - 4$ und $g'(x) = 2$.

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \ln|2x-4| \right]_k^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}(k+1)^2 + \frac{1}{2} \ln|2 \cdot (k+1) - 4| \right) - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2} \ln|2k-4| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(k+1)^2 + \ln|2 \cdot (k+1) - 4| - \frac{1}{2}k^2 - \ln|2k-4| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}k^2 + k + \frac{1}{2} + \ln|2k-2| - \frac{1}{2}k^2 - \ln|2k-4| \right) \end{aligned}$$

Erläuterung: *Betrag*

Für $k > 2$ ist $2k - 2 > 0$ und $2k - 4 > 0$. Die Betragsstriche können hier also weggelassen werden.

$$= \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2} + \ln(2k-2) - \ln(2k-4) \right)$$

Erläuterung: *Logarithmus eines Quotienten*

Logarithmus eines Quotienten:

$$\ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln a - \ln b$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2} + \ln \frac{2k-2}{2k-4} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2} + \ln \frac{k-1}{k-2} \right)
\end{aligned}$$

Teilaufgabe 1.7.2 (9 BE)

Bestimmen Sie den Parameterwert k so, dass die Flächenmaßzahl F ihren absolut kleinsten Wert annimmt.

Lösung zu Teilaufgabe 1.7.2**Extremwertaufgabe**

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: Kettenregel der Differenzialrechnung

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Formel für Logarithmusfunktionen:

$$f(x) = \ln(v(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$$

$$\text{Hier ist } v(x) = \frac{k-1}{k-2}.$$

$$F'(k) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k-2}{k-1} \cdot \left(\frac{k-1}{k-2} \right)' \right)$$

Erläuterung: Quotientenregel der Differenzialrechnung

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(k) = k-1$ und $v(k) = k-2$.

Dann ist $u'(k) = 1$ und $v'(k) = 1$.

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{1 \cdot (k-2) - (k-1) \cdot 1}{(k-2)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{k-2-k+1}{(k-2)^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{-1}{(k-2)^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{-1}{(k-1)(k-2)} \right)
\end{aligned}$$

Erste Ableitung Null setzen:

Erläuterung: Notwendige Bedingung

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$$f'(x^E) = 0, \quad \text{daher immer der Ansatz: } f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{-1}{(k-1)(k-2)} \right) = 0$$

$$1 + \frac{-1}{(k-1)(k-2)} = 0$$

$$1 = \frac{1}{(k-1)(k-2)}$$

$$(k-1)(k-2) = 1$$

$$k^2 - 3k + 2 = 1$$

$$k^2 - 3k + 1 = 0$$

Erläuterung: Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ lauten stets:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,62, \quad \left(k_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,38 < 2 \right)$$

Untersuchen, ob Vorzeichenwechsel vorliegt:

$$F'(2,5) \approx -0,17 < 0$$

$$F'(3) = 0,25 > 0$$

Es liegt ein Vorzeichenwechsel von “−” nach “+” vor. Es handelt sich also um ein Minimum.

Da $F'(k)$ für $k > 2$ stetig ist und k_1 für $k > 2$ die einzige Lösung zu $F'(k) = 0$ ist, ist $k_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,62$ sogar ein absolutes Minimum.

Die Fläche $F(k)$ ist für $k_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,62$ am kleinsten.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Nach einem Modell des britischen Ökonomen Thomas Malthus kann die Zahl B der Weltbevölkerung in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden. (Einheiten werden nicht mitgeführt.)

$$B(t) = B_0 \cdot e^{r \cdot t}, \text{ wobei gilt: } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0 \text{ sowie } r \in \mathbb{R} \text{ und } r > 0.$$

Dabei gibt B_0 die Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt $t = 0$ am 1.1.1800 an und r ist ein Maß für die Wachstumsrate der Bevölkerung.

Am 1.1.1950 betrug die Weltbevölkerung der Bevölkerung etwa 3,7 Milliarden Menschen, und am 1.1.2050 werden etwa 9,5 Milliarden Menschen weltweit erwartet.

Zeigen Sie, dass für die Werte B_0 und r gilt: $B_0 \approx 0,90 \cdot 10^9$ und $r \approx 9,43 \cdot 10^{-3}$.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Parameterwerte ermitteln

$$B(t) = B_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

Bedingungen analysieren:

Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*

Über die gegebenen Bedingungen lassen sich Gleichungen aufstellen, welche die Parameter B_0 , und r enthalten. Durch das Lösen des dadurch entstandenen Gleichungssystems erhält man die gesuchten Werte.

1. Die Bevölkerungszahl nach 150 Jahren (1950) ist $3,7 \cdot 10^9$:

$$B(150) = 3,7 \cdot 10^9$$

$$B_0 \cdot e^{150 \cdot r} = 3,7 \cdot 10^9$$

$$B_0 = \frac{3,7 \cdot 10^9}{e^{150 \cdot r}} \quad (\text{I})$$

2. Die Bevölkerungszahl nach 250 Jahren (2050) ist $9,5 \cdot 10^9$:

$$B(250) = 9,5 \cdot 10^9$$

$$B_0 \cdot e^{250 \cdot r} = 9,5 \cdot 10^9 \quad (\text{II})$$

Gleichungssystem:

$$B_0 = \frac{3,7 \cdot 10^9}{e^{150 \cdot r}} \quad (\text{I})$$

$$B_0 \cdot e^{250 \cdot r} = 9,5 \cdot 10^9 \quad (\text{II})$$

(I) in (II) einsetzen:

$$\frac{3,7 \cdot 10^9}{e^{150 \cdot r}} \cdot e^{250 \cdot r} = 9,5 \cdot 10^9$$

$$3,7 \cdot 10^9 \cdot e^{100 \cdot r} = 9,5 \cdot 10^9$$

$$e^{100r} = \frac{9,5}{3,7} \quad | \text{logarithmieren}$$

$$100r = \ln \frac{9,5}{3,7}$$

$$r = \frac{1}{100} \cdot \ln \frac{9,5}{3,7} \approx 0,00943 = 9,43 \cdot 10^{-3}$$

$r = 9,43 \cdot 10^{-3}$ in (I) einsetzen:

$$B_0 = \frac{3,7 \cdot 10^9}{e^{150 \cdot 9,43 \cdot 10^{-3}}} \approx 899\,274\,295 \approx 0,9 \cdot 10^9$$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Stellen Sie die Entwicklung der Weltbevölkerung zwischen 1.1.1800 und 1.1.2050 mit einem geeigneten Maßstab grafisch dar.

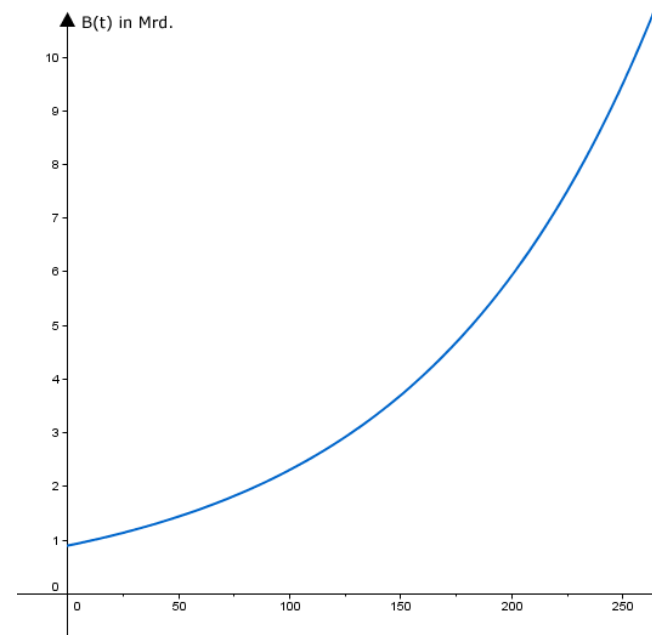
Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Skizze

Wertetabelle: (nicht erforderlich)

t	0	50	100	150	200	250
$B(t) \text{ in } 10^9$	0,9	1,4	2,3	3,7	5,9	9,5

Skizze:



Teilaufgabe 2.3 (5 BE)

Entnehmen Sie einer entsprechenden Markierung im Diagramm der Aufgabe 2.2 zu einem beliebigen Zeitpunkt t das Zeitintervall Δt , für das folgende Bedingung gilt: $B(t + \Delta t) = 2 \cdot B(t)$. Zeigen Sie durch Rechnung, dass das Zeitintervall Δt unabhängig vom Zeitpunkt t ist, und berechnen Sie Δt auf eine Nachkommastelle gerundet.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

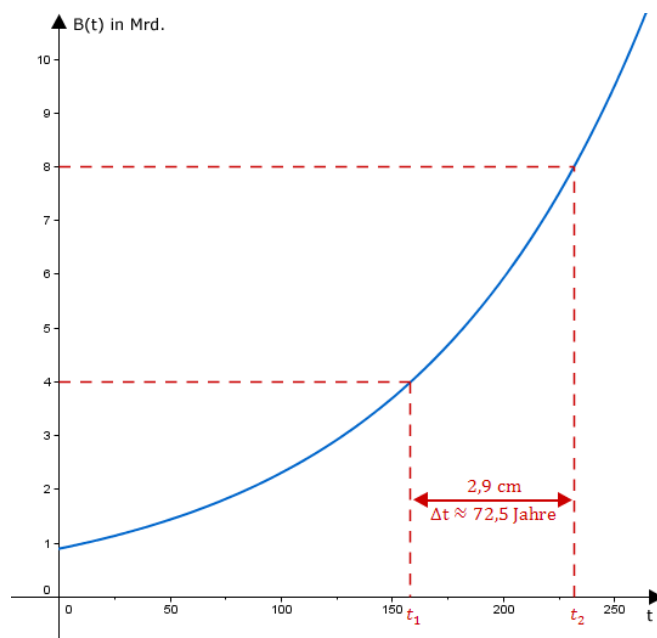
Nachweis eines Sachverhaltes

Gesucht ist das Zeitintervall Δt , in dem sich die Bevölkerungszahl verdoppelt.

Zeichnerische Lösung:

In der Skizze zeichnet man die Werte t_1 und t_2 ein, für die beispielsweise $B(t_1) = 4 \cdot 10^9$

und $B(t_2) = 8 \cdot 10^9$ gilt.



Messen des Abstandes zwischen t_1 und t_2 ergibt ca. 2,9 cm.

Umgerechnet (Maßstab: 25 Jahre = 1 cm) entspricht dies einem Zeitintervall von $\Delta t = 2,9 \cdot 25 = 72,5$

Rechnerische Lösung:

$$B(t + \Delta t) = 2 \cdot B(t)$$

$$B_0 \cdot e^{r(t+\Delta t)} = 2 \cdot B_0 \cdot e^{rt} \quad | : B_0$$

$$e^{rt} \cdot e^{r\Delta t} = 2 \cdot e^{rt} \quad | : e^{rt} \quad (e^{rt} > 0)$$

$$e^{r\Delta t} = 2 \quad | \text{ logarithmieren}$$

$$r \Delta t = \ln 2$$

$$\Delta t = \frac{\ln 2}{r}$$

$\Rightarrow \Delta t$ ist unabhängig von t

Mit $r = 9,43 \cdot 10^{-3}$ ergibt sich:

$$\Delta t = \frac{\ln 2}{9,43 \cdot 10^{-3}} \approx 73,5$$

Teilaufgabe 2.4 (7 BE)

Die natürliche Tragfähigkeitsgrenze der Erde ist der Zeitpunkt t_{TG} , an dem die Maßzahl der zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel

$$N(t) = 2,5 \cdot 10^7 \cdot t + 2,0 \cdot 10^9 \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0 \quad (t \text{ in Jahren})$$

nicht mehr größer ist als die Zahl der Weltbevölkerung $B(t)$.

(Eine Nahrungsmittelseinheit entspricht zur Vereinfachung dabei einer Bevölkerungseinheit.)

Bestimmen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens den Zeitpunkt t_{TG} . Benutzen Sie als Startwert $t_0 = 210$, führen Sie nur einen Näherungsschritt durch, runden Sie das Ergebnis auf ganze Jahre und geben Sie auch das entsprechende Jahr unserer Zeitrechnung an.

Lösung zu Teilaufgabe 2.4

Newton-Verfahren

Solange die Funktion $N(t) - B(t)$ größer Null ist, gibt es noch genügend Nahrungsmittel. Gesucht ist der Zeitpunkt t_{TG} , für den $N(t_{TG}) - B(t_{TG}) = 0$ wird.

Funktionsgleichung aufstellen:

$$N(t) - B(t) = 2,5 \cdot 10^7 \cdot t + 2,0 \cdot 10^9 - 0,9 \cdot 10^9 \cdot e^{9,43 \cdot 10^{-3} t}$$

Berechnen der Nullstelle mithilfe des Newton-Verfahrens:

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$$f(x) = 0$$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$N(t) - B(t) = 0$$

$$2,5 \cdot 10^7 \cdot t + 2,0 \cdot 10^9 - 0,9 \cdot 10^9 \cdot e^{9,43 \cdot 10^{-3}t} = 0$$

Erläuterung: *Newtonsche Iterationsformel*

Newtonsche Iterationsformel zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für den ersten Schritt, mit Startwert x_0 , gilt somit: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Erste Ableitung bilden:

$$(N(t) - B(t))' = 2,5 \cdot 10^7 - 0,9 \cdot 10^9 \cdot 9,43 \cdot 10^{-3} \cdot e^{9,43 \cdot 10^{-3}t}$$

Berechnung des ersten Näherungsschrittes mit dem Startwert $t_0 = 210$:

$$t_{TG} = t_0 - \frac{N(t_0) - B(t_0)}{(N(t_0) - B(t_0))'}$$

$$\begin{aligned} t_{TG} &= 210 - \frac{N(210) - B(210)}{(N(210) - B(210))'} \\ &= 210 - \frac{2,5 \cdot 10^7 \cdot 210 + 2,0 \cdot 10^9 - 0,9 \cdot 10^9 \cdot e^{9,43 \cdot 10^{-3} \cdot 210}}{2,5 \cdot 10^7 - 0,9 \cdot 10^9 \cdot 9,43 \cdot 10^{-3} \cdot e^{9,43 \cdot 10^{-3} \cdot 210}} \end{aligned}$$

$$\approx 230$$

Berechnen des Kalenderjahres:

$$1800 + 230 = 2030$$

Im Jahr 2030 werden nach diesen Berechnungen die Nahrungsmittel nicht mehr für die gesamte Bevölkerung ausreichen.