Fachabitur 2011 Mathematik T Geometrie B II

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $P(1;0;0)$, $Q(0;1;0)$, $R(0;0;1)$ und $S_k(k;k;k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Berechnen Sie die Werte des Parameters k für die die gegebenen Punkte eine dreiseitige Pyramide aufspannen.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters k die Pyramide ein reguläres Tetraeder, also eine gleichseitige Pyramide ist.

Methan CH_4 ist eine Kohlenstoffwasserverbindung. Das Molekül hat die Form eines regulären Tetraeders, in dessen Ecken sich die H-Atome befinden. Das C-Atom liegt im Punkt C, gleich weit von allen H-Atomen entfernt. Der Punkt C teilt die Höhen des Tetraeders im Verhältnis $3:1$. Die Ecken des Tetraeders, also die Lage der H-Atome, seien die Punkte aus Aufgabe 1 mit $k=1$, also $P(1;0;0)$, $Q(0;1;0)$, $R(0;0;1)$ und $S_1(1;1;1)$.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Die Punkte P, Q und S_1 liegen in einer Ebene F. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform.
[Mögliches Ergebnis: $F: x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$]

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders $P\,Q\,S_1\,R$.

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Der Punkt T ist der Fußpunkt des vom Punkt R auf die Ebene F gefällten Lotes. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T.
[Ergebnis: $T\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$]

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des C-Atoms.
[Ergebnis: $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$]

Teilaufgabe 2.5 (4 BE)

Bestimmen Sie den Winkel φ zwischen zwei C-H-Bindungen, also z.B. den Winkel $P\,C\,S_1$.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $P(1;0;0)$, $Q(0;1;0)$, $R(0;0;1)$ und $S_k(k;k;k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

Berechnen Sie die Werte des Parameters k für die die gegebenen Punkte eine dreiseitige Pyramide aufspannen.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Ebene aus drei Punkte

$PQRS_k$ ist eine dreiseitige Pyramide, wenn nicht alle 4 Punkte in einer Ebene liegen.

$\Rightarrow$ S_k darf nicht in der von den Punkt P, Q und R aufgespannten Ebene E liegen.

Richtungsvektoren der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene bestimmen:

> Erläuterung: *Vektorprodukt*
>
> Das Kreuzprodukt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.
>
> Für die komponentenweise Berechnung gilt:
>
> $$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*
>
> Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.
>
> $E : \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{n_E}$
>
> Hier (P ist Aufpunkt):

$$E : \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Parameterwerte ermitteln

Koordinaten von S_k in E einsetzen:

$k + k + k - 1 = 0$

$3k = 1$

$k = \dfrac{1}{3}$

Für $k = \dfrac{1}{3}$ liegen die Punkte P, Q, R und S_k in einer Ebene E.

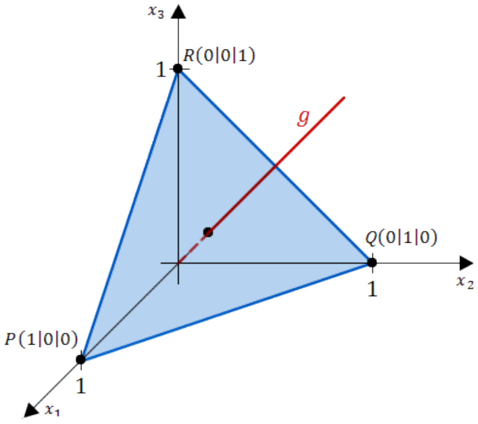
$\Rightarrow$ Für $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ spannen die Punkte P, Q, R und S_k eine dreiseitige Pyramide auf.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters k die Pyramide ein reguläres Tetraeder, also eine gleichseitige Pyramide ist.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Länge eines Vektors

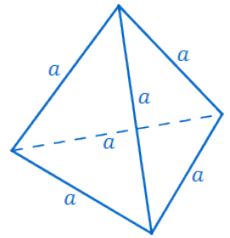


Die Punkte S_k liegen auf der Geraden $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Reguläres Tetraeder*

Ein Reguläres Tetraeder ist eine dreiseitige Pyramide, bei der alle sechs Kantenlängen gleich groß sind.

Die Grundfläche und jede Seitenfläche sind somit ein ein gleichseitiges Dreieck.



Für ein Tetraeder muss gelten:

Erläuterung: *Reguläres Tetraeder*

In einem reguläres Tetraeder sind alle Seiten gleich lang. Es gilt also:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right| = \left|\overrightarrow{PS_k}\right| = \left|\overrightarrow{QS_k}\right| = \left|\overrightarrow{RS_k}\right|$$

Da die Punkte P, Q und R festgelegt sind und diese Bedingung bereits erfüllen und alle Punkte S_k auf der Geraden g gleich weit von den Punkten P, Q und R entfernt sind, reicht folgende Bedingung aus:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{PS_k}\right|$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(siehe Aufgabe 1.1)}$$

$$\overrightarrow{PS_k} = \overrightarrow{OS_k} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ k \\ k \end{pmatrix}$$

Längen der Vektoren berechnen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der $x_1 x_2$-Ebene $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{PS_k}\right| = \sqrt{(k-1)^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{3k^2 - 2k + 1}$$

Seitenlängen gleichsetzen:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{PS_k}\right|$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{3k^2 - 2k + 1}$$

$$2 = 3k^2 - 2k + 1$$

$$3k^2 - 2k - 1 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$$

$$k_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$k_1 = \frac{2+4}{6} = 1$$

$$k_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$$

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Methan CH_4 ist eine Kohlenstoffwasserverbindung. Das Molekül hat die Form eines regulären Tetraeders, in dessen Ecken sich die H-Atome befinden. Das C-Atom liegt im Punkt C, gleich weit von allen H-Atomen entfernt. Der Punkt C teilt die Höhen des Tetraeders im Verhältnis $3 : 1$. Die Ecken des Tetraeders, also die Lage der H-Atome, seien die Punkte aus Aufgabe 1 mit $k = 1$, also $P(1; 0; 0)$, $Q(0; 1; 0)$, $R(0; 0; 1)$ und $S_1(1; 1; 1)$.

Die Punkte P, Q und S_1 liegen in einer Ebene F. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform.
[Mögliches Ergebnis: $F : x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$]

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Ebene aus drei Punkte

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(siehe Aufgabe 1.1)}$$

$$\overrightarrow{PS_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(siehe Aufgabe 1.2)}$$

$\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PS_1}$ sind Richtungsvektoren der Ebene.

P sei der Aufpunkt der Ebene.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_F}$ der Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E : \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{n_E}$$

Hier (P ist Aufpunkt):

$$F : \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders PQS_1R.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Volumen einer Pyramide

Der Tetraeder wird von den Vektoren $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{PS_1}$ aufgespannt.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(siehe Aufgabe 1.1)}$$

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(siehe Aufgabe 1.1)}$$

$$\overrightarrow{PS_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(siehe Aufgabe 1.2)}$$

Berechnung des Tetraedervolumens:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide, Volumen eines Spats (Spatprodukt)*

Das Volumen einer (dreiseitigen) Pyramide, die durch die Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, und $\overrightarrow{c}$ festgelegt wird, ist gegeben durch die Formel:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{a} \circ \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} \right) \right|$$

$$V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{PQ} \circ \left(\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS_1} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right|$$

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$$

$$= \frac{1}{6} \cdot |(-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)|$$
$$= \frac{1}{6} \cdot |2| = \frac{1}{3}$$

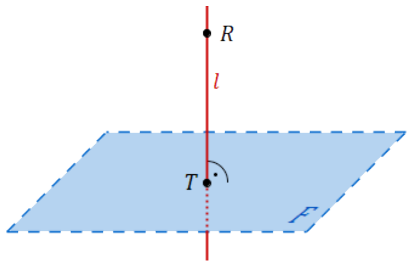
Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Der Punkt T ist der Fußpunkt des vom Punkt R auf die Ebene F gefällten Lotes. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T.

[Ergebnis: $T\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$]

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Lotfußpunkt auf eine Ebene



Lotgerade l durch R und senkrecht zu $F: x_1 + x_2 - x_3 = 1$ aufstellen:

Erläuterung: *Lotgerade auf einer Ebene*

Eine Gerade l ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$l: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Die Lotgerade l geht durch den Punkt R und steht senkrecht zur Ebene F. Der Ortsvektor des Aufpunkts ist somit $\overrightarrow{OR}$ und der Richtungsvektor ist gleich dem Normalenvektor der Ebene $\overrightarrow{n_F}$, da dieser senkrecht zur Ebene F steht.

$$l: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{OR} + \lambda \cdot \overrightarrow{n_F} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

$$l: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lotgerade l mit Ebene F schneiden: $l \cap F$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E^N ein und löst nach λ auf.

Hier wird also l in F^N eingesetzt und nach λ aufgelöst.

$\lambda + \lambda - (1 - \lambda) = 1$

$3\lambda = 2$

$\lambda = \dfrac{2}{3}$

$\lambda = \dfrac{2}{3}$ in l einsetzen und Lotfußpunkt T bestimmen:

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T\left(\frac{2}{3}\Big|\frac{2}{3}\Big|\frac{1}{3}\right)$$

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des C-Atoms.
[Ergebnis: $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$]

Lösung zu Teilaufgabe 2.4

Koordinaten von Punkten ermitteln

C teilt die Höhen im Verhältnis $1:3$ (siehe Angabe 2.0)

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OT} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{TR}$$

Berechnung des Vektors $\overrightarrow{TR}$:

$$\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Berechnung des Vektors $\overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

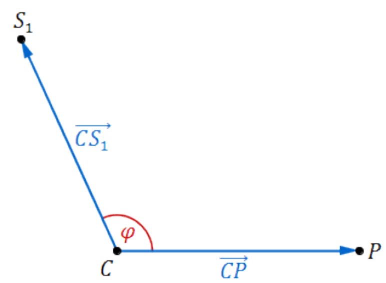
$$\Rightarrow \quad C\left(\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{2}\right)$$

Teilaufgabe 2.5 (4 BE)

Bestimmen Sie den Winkel φ zwischen zwei C-H-Bindungen, also z.B. den Winkel PCS_1.

Lösung zu Teilaufgabe 2.5

Winkel zwischen zwei Vektoren



Vektoren $\overrightarrow{CP}$ und $\overrightarrow{CS_1}$ bestimmen:

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CS_1} = \overrightarrow{OS_1} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Winkel φ bestimmen:

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{CP} \circ \overrightarrow{CS_1}}{\left|\overrightarrow{CP}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CS_1}\right|}$$

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{\left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der $x_1\, x_2$-Ebene $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109,47°$$