

Fachabitur 2011 Mathematik T Geometrie B I

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind in Abhängigkeit der Variablen $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix}$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)

Zeigen Sie, dass unabhängig von der Wahl der Werte für p und q die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.

Setzen Sie nun $p = 2$ und $q = 1$. Daraus ergeben sich mit dem Koordinatenursprung O die Ortsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ für die Punkte A und B .

Teilaufgabe 1.2.1 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene E , in der die Punkte A und B sowie der Koordinatenursprung O liegen. Geben Sie die Gleichung der Ebene E auch in Koordinatenform an.

Teilaufgabe 1.2.2 (7 BE)

Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs O von der durch die Punkte A und B festgelegten Geraden g .

Bestimmen Sie auch den Punkt L auf der Geraden g , der die geringste Entfernung vom Ursprung hat.

[Teilergebnis: $L(1; -0,8; 1,6)$]

Teilaufgabe 1.2.3 (9 BE)

Die Punkte S_1 und S_2 liegen auf der Geraden g . Die Strecke $[S_1 S_2]$ bildet die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Koordinatenursprung O als Spitze. Dieses Dreieck besitzt die Flächenmaßzahl $A_\Delta = 2 \cdot \sqrt{4,2}$.

Fertigen Sie eine Lageskizze der Punkte O , A , B , L , S_1 und S_2 an und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 . Runden Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 auf zwei Stellen nach dem Komma.

[Zwischenergebnis: $|\overrightarrow{LS_1}| = 2$]

Die folgenden Gleichungen I, II und III stellen jeweils Ebenen in Koordinatenform dar:

$$\text{I} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$\text{II} \quad x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{III} \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = c \quad \text{wobei } c \in \mathbb{R}$$

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von c die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems.

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Bestimmen Sie für $c = 3$ die Lösung des Gleichungssystems und interpretieren Sie die gegenseitige Lage der drei Ebenen.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind in Abhängigkeit der Variablen $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix}$ gegeben.

Zeigen Sie, dass unabhängig von der Wahl der Werte für p und q die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1**Lagebeziehung von Vektoren**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix} = (p-q)(p-q) + (-p)p + q(2p-q) \\ &= p^2 - 2pq + q^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 0 \end{aligned}$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, ist gleich 0.

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen für alle $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ senkrecht aufeinander

Teilaufgabe 1.2.1 (3 BE)

Setzen Sie nun $p = 2$ und $q = 1$. Daraus ergeben sich mit dem Koordinatenursprung O die Ortsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ für die Punkte A und B .

Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene E , in der die Punkte A und B sowie der Koordinatenursprung O liegen. Geben Sie die Gleichung der Ebene E auch in Koordinatenform an.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2.1**Ebene aus drei Punkte**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $p = 2$ und $q = 1$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind Richtungsvektoren der Ebene.

O sei der Aufpunkt der Ebene.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\vec{n}_E$ der Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 3 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen. Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch -2 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \vec{n}_E = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E: \vec{X} \circ \vec{n}_E = \vec{P} \circ \vec{n}_E$$

Hier (O ist Aufpunkt):

$$E^N: \vec{X} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

Teilaufgabe 1.2.2 (7 BE)

Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs O von der durch die Punkte A und B festgelegten Geraden g .

Bestimmen Sie auch den Punkt L auf der Geraden g , der die geringste Entfernung vom Ursprung hat.

[Teilergebnis: $L(1; -0,8; 1,6)$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.2.2***Geradengleichung aufstellen***

Aufstellen der Gleichung der Geraden g :

Erläuterung: *Gerade aus zwei Punkten*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\vec{P}$ und einen Richtungsvektor $\vec{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v}, \mu \in \mathbb{R}$$

Bestimmung des Richtungsvektors:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geradengleichung:

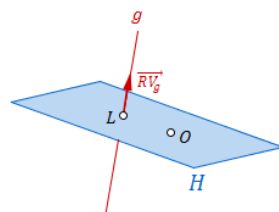
$$g: \vec{X} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{AB}$$

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt - Gerade

Abstand von O zu g bestimmen:

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade, Hilfsebene*



Um den Abstand zwischen einer Geraden g und einem Punkt M bestimmen zu können, bildet man eine Hilfsebene H die den Punkt M beinhaltet und senkrecht zur Geraden g steht.

Hilfsebene H durch O senkrecht zu g aufstellen:

$$\vec{n}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E: \vec{X} \circ \vec{n}_E = \vec{P} \circ \vec{n}_E$$

Hier (O ist Aufpunkt):

$$H: \vec{X} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff 2x_2 + x_3 = 0$$

Ebene H und Gerade g schneiden: $H \cap g$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P , dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E .

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

Hier wird also g in H eingesetzt und nach λ aufgelöst.

$$2 \cdot (-2 + 2\lambda) + 1 + \lambda = 0$$

$$-3 + 5\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{3}{5}$$

$\lambda = \frac{3}{5}$ in g einsetzen und Schnittpunkt L bestimmen:

$$\vec{OL} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,6 \end{pmatrix} \Rightarrow L(1 | -0,8 | 1,6)$$

Abstand bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Abstand von L zu g berechnen:

$$|\vec{OL}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-0,8)^2 + 1,6^2} = \sqrt{4,2} \approx 2,05$$

Teilaufgabe 1.2.3 (9 BE)

Die Punkte S_1 und S_2 liegen auf der Geraden g . Die Strecke $[S_1 S_2]$ bildet die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Koordinatenursprung O als Spitze. Dieses Dreieck besitzt die Flächenmaßzahl $A_\Delta = 2 \cdot \sqrt{4,2}$.

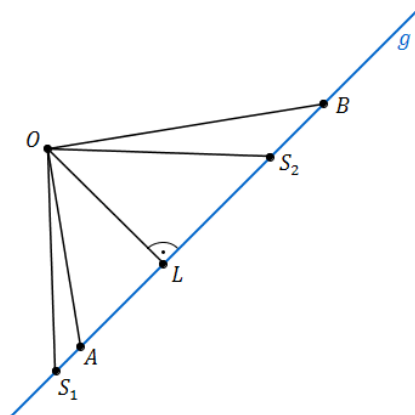
Fertigen Sie eine Lageskizze der Punkte O , A , B , L , S_1 und S_2 an und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 . Runden Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 auf zwei Stellen nach dem Komma.

[Zwischenergebnis: $|\vec{LS_1}| = 2$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.2.3**Skizze**

Lageskizze:

(Die Ebene E aus Aufgabe 1.2.1 ist die Zeichenebene)

**Koordinaten von Punkten ermitteln**

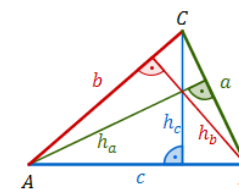
$$A_\Delta = 2 \cdot \sqrt{4,2}$$

Flächenformel für das Dreieck $S_1 S_2 O$:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC berechnet sich aus der Hälfte des Produkts aus einer Seite und der zugehörigen Höhe:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$



Da die Strecke $[S_1 S_2]$ auf der Geraden g liegt und $\vec{OL} \perp g$ gilt, ist $|\vec{OL}|$ die Höhe im Dreieck $S_1 S_2 O$ auf die Seite $|\vec{S_1 S_2}|$.

$$\Rightarrow A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\vec{S_1 S_2}| \cdot |\vec{OL}| = 2 \cdot \sqrt{4,2}$$

$$|\vec{OL}| = \sqrt{4,2} \quad (\text{siehe Aufgabe 1.2.2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |\vec{S_1 S_2}| = 2$$

$$|\vec{S_1 S_2}| = 4$$

Dreieck $S_1 S_2 O$ ist gleichschenkelig mit $[S_1 S_2]$ als Basis.

$$\Rightarrow |\vec{S_1 L}| = |\vec{LS_2}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{S_1 S_2}| = 2$$

Richtungsvektor der Geraden g : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Betrag des Richtungsvektors:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der $x_1 x_2$ -Ebene $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B.:

$$|\vec{n}_E| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Erläuterung: *Einheitsvektor*

Ein Einheitsvektor (normierter Vektor) hat die Länge 1. Um den Einheitsvektor zu einem gegebenen Vektor zu bestimmen, muss durch den Betrag des Vektors geteilt werden:

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

Der Einheitsvektor $\vec{a}^0$ zeigt in dieselbe Richtung wie $\vec{a}$, hat aber die Länge 1.

$$\Rightarrow \vec{v}^0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen der Ortsvektoren von S_1 und S_2 :

$$\vec{OS}_1 = \vec{OL} + 2 \cdot \vec{v}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,6 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,99 \\ 2,49 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(1|0,99|2,49)$$

$$\vec{OS}_2 = \vec{OL} - 2 \cdot \vec{v}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,6 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2,59 \\ 0,71 \end{pmatrix} \Rightarrow S_2(1|-2,59|0,71)$$

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Die folgenden Gleichungen I, II und III stellen jeweils Ebenen in Koordinatenform dar:

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & x_1 & + x_2 + 2x_3 = 3 \\ \text{II} & & x_2 + x_3 = 1 \\ \text{III} & 2x_1 & - x_2 + x_3 = c \quad \text{wobei } c \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von c die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Lineares Gleichungssystem lösen

Gleichungssystem durch Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & c & \end{array} \xrightarrow{\text{III} - 2 \cdot \text{I}} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & c-6 & \end{array} \xrightarrow{\text{III} + 3 \cdot \text{II}} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c-3 & \end{array}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $c = 3$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, da die letzte Zeile unabhängig von allen Variablen wahr ist.

2. Fall: $c \neq 3$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c-3 & \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, da die letzte Zeile nicht erfüllbar ist.

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Bestimmen Sie für $c = 3$ die Lösung des Gleichungssystems und interpretieren Sie die gegenseitige Lage der drei Ebenen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2**Lineares Gleichungssystem lösen**

Gleichungssystem aus Aufgabe 2.1 für $c = 3$:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wähle freien Parameter: $x_3 = \lambda$

Erläuterung:

Das obige Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar. Es existieren unendlich viele Lösungen.

Eine mögliche Lösung $X(x_1|x_2|x_3)$ lässt sich erst berechnen, wenn bereits eine Koordinate bekannt ist. In Abhängigkeit von dieser lassen sich dann auch die anderen berechnen.

Um alle Lösungen zu erfassen, wählt man stellvertretend für alle möglichen Anfangswerte einen freien Parameter λ , in dessen Abhängigkeit man die weiteren Koordinaten berechnet.

Man erhält schlussendlich die Gleichung einer Geraden, auf der alle Lösungen des Gleichungssystems liegen.

Zur Vereinfachung der Rechnung wählen wir als freien Parameter die Koordinate $x_3 = \lambda$. (x_1 oder x_2 wären aber auch möglich)

$x_3 = \lambda$ in Gleichung II einsetzen:

$$x_2 + \lambda = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - \lambda$$

$x_3 = \lambda$ und $x_2 = 1 - \lambda$ in Gleichung I einsetzen:

$$x_1 + 1 - \lambda + 2\lambda = 3 \Rightarrow x_1 = 2 - \lambda$$

Geradengleichung aufstellen:

Erläuterung:

Für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Punkt $X(x_1|x_2|x_3)$ Lösung des obigen Gleichungssystems.

Für die Koordinaten x_1 , x_2 und x_3 setzt man nun die errechneten Werte in Abhängigkeit von λ ein:

$$X(2 - \lambda | 1 - \lambda | \lambda)$$

Für den Ortsvektor $\overrightarrow{OX}$ gilt somit:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 1 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Teilt man den Vektor in einen Vektor mit und einen ohne λ auf, so erhält man die Geradengleichung:

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alle Punkte auf der Geraden g sind Lösung des obigen Gleichungssystems.