Abitur 2011 G8 Abitur Mathematik Stochastik IV

Auf der Strecke München-Tokio bietet eine Fluggesellschaft ihren Passagieren verschiedene Menüs an, darunter ein vegetarisches. Aus Erfahrung weiß man, dass sich im Mittel 10% der Passagiere für das vegetarische Menü entscheiden. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass die Passagiere ihre jeweilige Menüwahl unabhängig voneinander treffen.

Teilaufgabe 1a (4 BE)

Auf einem Flug nach Tokio sind 200 Passagiere an Bord. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich mindestens 20 und höchstens 25 Passagiere für das vegetarische Menü entscheiden.

Auf dem Rückflug nach München ist die Maschine mit 240 Passagieren besetzt.

Teilaufgabe 1b (3 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich auf dem Rückflug genau 20 Passagiere für das vegetarische Menü entscheiden.

Teilaufgabe 1c (4 BE)

Tatsächlich entscheiden sich auf dem Rückflug sechs weibliche und vierzehn männliche Reisende für das vegetarische Menü. Ermitteln Sie, wie viele weibliche Reisende unter den Passagieren sind, wenn die Ereignisse „Ein zufällig ausgewählter Passagier ist weiblich.“ und „Ein zufällig ausgewählter Passagier entscheidet sich für das vegetarische Menü“ unabhängig sind.

Die Fluggesellschaft beabsichtigt, ihren Passagieren neben dem Standardmenü gegen Zuzahlung ein Premiummenü anzubieten, möchte diesen Service jedoch nur dann einrichten, wenn er von mehr als 15% der Passagiere gewünscht wird. Die Nullhypothese „Höchstens 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs.“ soll auf der Basis einer Stichprobe von 200 Passagieren auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

Teilaufgabe 2a (5 BE)

Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Die Fluggesellschaft hätte für den Test - bei gleichem Signifikanzniveau - anstelle der Nullhypothese

„Höchstens 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs.“

auch die Nullhypothese

„Mehr als 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs.“

wählen können. Bei der Wahl der Nullhypothese stand für die Fluggesellschaft eine der beiden folgenden Überlegungen im Vordergrund:

- Der irrtümliche Verzicht auf das Angebot des Premiummenüs wäre mit einem Imageverlust verbunden.
- Das irrtümliche Angebot des Premiummenüs wäre mit einem finanziellen Verlust verbunden.

Entscheiden Sie, welche der beiden Überlegungen für die Fluggesellschaft bei der Wahl der Nullhypothese im Vordergrund stand. Erläutern Sie Ihre Entscheidung.

Bei einer Routineinspektion wird die Passagierkabine eines zufällig ausgewählten Flugzeugs des Typs X überprüft. Ein Mangel der Beleuchtung sowie ein Mangel der Klimaanlage liegen bei Flugzeugen dieses Typs jeweils mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit vor; diese Wahrscheinlichkeiten können der folgenden Vierfeldertafel entnommen werden.

	K	$\overline{K}$	
B	x	0,05	
$\overline{B}$			0,04
		0,06	1

B: Beleuchtung einwandfrei
$\overline{B}$: Beleuchtung mangelhaft
K: Klimaanlage einwandfrei
$\overline{K}$: Klimaanlage mangelhaft

Teilaufgabe 3a (3 BE)

Bestimmen Sie den Wert von x und beschreiben Sie das zugehörige Ereignis in Worten.

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt bei dem zufällig ausgewählten Flugzeug des Typs X ein Mangel der Klimaanlage vor, wenn die Beleuchtung nicht einwandfrei funktioniert?

Teilaufgabe 3c (5 BE)

Bei Flugzeugen eines anderen Typs Y liegt ein Mangel der Klimaanlage mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% vor. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden Mängel vorliegt, beträgt 5%. Wenn mindestens einer der beiden Mängel vorliegt, so funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% die Beleuchtung nicht einwandfrei. Stellen Sie zu der für Flugzeuge des Typs Y beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf.

Lösung

Teilaufgabe 1a (4 BE)

Auf der Strecke München-Tokio bietet eine Fluggesellschaft ihren Passagieren verschiedene Menüs an, darunter ein vegetarisches. Aus Erfahrung weiß man, dass sich im Mittel 10% der Passagiere für das vegetarische Menü entscheiden. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass die Passagiere ihre jeweilige Menüwahl unabhängig voneinander treffen.

Auf einem Flug nach Tokio sind 200 Passagiere an Bord. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich mindestens 20 und höchstens 25 Passagiere für das vegetarische Menü entscheiden.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Binomialverteilung

Text analysieren und Daten herauslesen:

" ... Menüwahl unabhängig voneinander treffen." $\Rightarrow$ Bernoulli-Kette

" ... dass sich im Mittel 10% der Passagiere für das vegetarische Menü entscheiden." $\Rightarrow$ $p = 10\% = 0,10$

" ... sind 200 Passagiere an Bord." $\Rightarrow$ $n = 200$

" ... mindestens 20 und höchstens 25..." $\Rightarrow$ $20 \leq Z \leq 25$

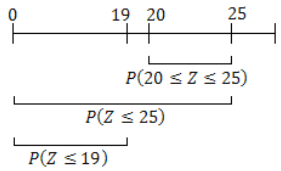
Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Wenn die Zufallsvariable Z zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a-1)$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“



$P_{0,10}^{200}(20 \leq Z \leq 25) = P_{0,10}^{200}(Z \leq 25) - P_{0,10}^{200}(Z \leq 19)$

(Werte werden im Tafelwerk abgelesen)

$\approx 0,89954 - 0,46554$

$\approx 43,4\%$

Teilaufgabe 1b (3 BE)

Auf dem Rückflug nach München ist die Maschine mit 240 Passagieren besetzt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich auf dem Rückflug genau 20 Passagiere für das vegetarische Menü entscheiden.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Binomialverteilung

Text analysieren und Daten herauslesen:

“ ... mit 240 Passagieren besetzt.“ $\Rightarrow$ $n = 240$

“ ... genau 20 Passagiere ...“ $\Rightarrow$ $Z = 20$

Aus Teilaufgabe 1a: $p = 0,10$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$P_{0,10}^{240}(Z = 20) = \binom{240}{20} \cdot 0,10^{20} \cdot 0,90^{220} \approx 6,3\%$

Teilaufgabe 1c (4 BE)

Tatsächlich entscheiden sich auf dem Rückflug sechs weibliche und vierzehn männliche Reisende für das vegetarische Menü. Ermitteln Sie, wie viele weibliche Reisende unter den Passagieren sind, wenn die Ereignisse „Ein zufällig ausgewählter Passagier ist weiblich.“ und „Ein zufällig ausgewählter Passagier entscheidet sich für das vegetarische Menü“ unabhängig sind.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Stochastische Unabhängigkeit

Ereignisse:

W : „Ein zufällig ausgewählter Passagier ist weiblich“
V : „Ein zufällig ausgewählter Passagier entscheidet sich für das vegetarische Menü“

Anzahl der Passagiere: $|\Omega| = 240$

„Tatsächlich entscheiden sich auf dem Rückflug sechs weibliche und vierzehn männliche Reisende für das vegetarische Menü.“

$\Rightarrow \quad P(W \cap V) = \dfrac{6}{240}$

$\Rightarrow \quad P(\overline{W} \cap V) = \dfrac{14}{240}$

$\Rightarrow \quad P(V) = \dfrac{20}{240}$

	W	$\overline{W}$	
V	$P(W \cap V) = \frac{6}{240}$	$P(\overline{W} \cap V) = \frac{14}{240}$	$P(V) = \frac{20}{240}$
$\overline{V}$			

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

Aus der Unabhängigkeit der Ereignisse folgt:

$$P(W \cap V) = P(W) \cdot P(V) \quad \Rightarrow \quad P(W) = \frac{P(W \cap V)}{P(V)} = \frac{6/240}{20/240} = \frac{6}{20}$$

Anzahl der weiblichen Reisenden:

$$|W| = \frac{6}{20} \cdot 240 = 72$$

Teilaufgabe 2a (5 BE)

Die Fluggesellschaft beabsichtigt, ihren Passagieren neben dem Standardmenü gegen Zuzahlung ein Premiummenü anzubieten, möchte diesen Service jedoch nur dann einrichten, wenn er von mehr als 15% der Passagiere gewünscht wird. Die Nullhypothese „Höchstens 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs.“ soll auf der Basis einer Stichprobe von 200 Passagieren auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

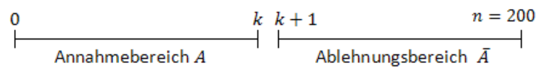
Nullhypothese: $H_0 : p_0 \leq 15\% = 0,15$
„Höchstens 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs“

Stichprobenumfang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Annahmebereich von H_0: $A = [0, k]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [k+1, 200]$



Fehler 1.Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Das ist der Fall wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \geq k+1$).

$\Rightarrow \quad$ Fehler erster Art: $\quad P^{200}_{0,15}(Z \geq k+1) \leq 0,05$

$P_{0,15}^{200}(Z \geq k+1) \leq 0,05$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(mindestens k+1 Treffer) = 1 - P(höchstens k Treffer)

In mathematischen Zeichen:

$P(Z \geq k+1) = 1 - P(Z \leq k)$

$1 - P_{0,15}^{200}(Z \leq k) \leq 0,05 \quad | \quad -1$

$-P_{0,15}^{200}(Z \leq k) \leq -0,95 \quad | \quad \cdot(-1)$

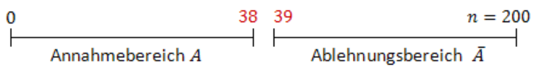
(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$P_{0,15}^{200}(Z \leq k) \geq 0,95$

$k \geq 38$ (Wert wird im Tafelwerk abgelesen)

$\Rightarrow$ bis $Z = 38$ wird die Nullhypothese beibehalten

Entscheidungsregel:



Annahmebereich: $A = \{0, \ldots, 38\}$

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Die Fluggesellschaft hätte für den Test - bei gleichem Signifikanzniveau - anstelle der Nullhypothese

„Höchstens 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs.“

auch die Nullhypothese

„Mehr als 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs.“

wählen können. Bei der Wahl der Nullhypothese stand für die Fluggesellschaft eine der beiden folgenden Überlegungen im Vordergrund:

- Der irrtümliche Verzicht auf das Angebot des Premiummenüs wäre mit einem Imageverlust verbunden.
- Das irrtümliche Angebot des Premiummenüs wäre mit einem finanziellen Verlust verbunden.

Entscheiden Sie, welche der beiden Überlegungen für die Fluggesellschaft bei der Wahl der Nullhypothese im Vordergrund stand. Erläutern Sie Ihre Entscheidung.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Hypothesentest - Entscheidungsregel

Bei Durchführung des Tests mit der Nullhypothese „Höchstens 15%“ beträgt die Wahrscheinlichkeit, das Premimummenü irrtümlich anzubieten, höchstens 5%.

Die Wahrscheinlichkeit, das Premimummenü irrtümlich nicht anzubieten, kann dagegen wesentlich größer sein (im Extremfall 95%).

$\Rightarrow$ Die zweite Überlegung stand im Vordergrund

Teilaufgabe 3a (3 BE)

Bei einer Routineinspektion wird die Passagierkabine eines zufällig ausgewählten Flugzeugs des Typs X überprüft. Ein Mangel der Beleuchtung sowie ein Mangel der Klimaanlage liegen bei Flugzeugen dieses Typs jeweils mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit vor; diese Wahrscheinlichkeiten können der folgenden Vierfeldertafel entnommen werden.

	K	$\overline{K}$	
B	x	0,05	
$\overline{B}$			0,04
		0,06	1

B: Beleuchtung einwandfrei
$\overline{B}$: Beleuchtung mangelhaft
K: Klimaanlage einwandfrei
$\overline{K}$: Klimaanlage mangelhaft

Bestimmen Sie den Wert von x und beschreiben Sie das zugehörige Ereignis in Worten.

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Vierfeldertafel ergänzen:

	K	$\overline{K}$	
B	x	0,05	0,96
$\overline{B}$	0,03	0,01	0,04
	0,94	0,06	1

$\Rightarrow \quad x = 0,96 - 0,05 = 0,91$

$x = P(B \cap K)$

$B \cap K$: „Beleuchtung **und** Klimaanlage sind einwandfrei"

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt bei dem zufällig ausgewählten Flugzeug des Typs X ein Mangel der Klimaanlage vor, wenn die Beleuchtung nicht einwandfrei funktioniert?

Lösung zu Teilaufgabe 3b

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Vierfeldertafel aus Teilaufgabe 3a:

	K	$\overline{K}$	
B	x	0,05	0,96
$\overline{B}$	0,03	0,01	0,04
	0,94	0,06	1

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Unter $P_{\overline{B}}(\overline{K})$ versteht man die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\overline{K}$ unter der Bedingung des Ereignisses $\overline{B}$.

D.h. man betrachtet nicht den gesamten Ergebnisraum, sondern nur die Teilmenge des Ereignisses $\overline{B}$.
Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{B}}(\overline{K})$ ist also die Wahrscheinlichkeit für $\overline{K}$, wenn man nur $\overline{B}$ betrachtet.

$$P_{\overline{B}}(\overline{K}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{K})}{P(\overline{B})} = \frac{0,01}{0,04} = 25\%$$

Teilaufgabe 3c (5 BE)

Bei Flugzeugen eines anderen Typs Y liegt ein Mangel der Klimaanlage mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% vor. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden Mängel vorliegt, beträgt 5%. Wenn mindestens einer der beiden Mängel vorliegt, so funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% die Beleuchtung nicht einwandfrei. Stellen Sie zu der für Flugzeuge des Typs Y beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf.

Lösung zu Teilaufgabe 3c

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

„Bei Flugzeugen eines anderen Typs Y liegt ein Mangel der Klimaanlage mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% vor."

$P(\overline{K}) = 0,04$

	K	$\overline{K}$	
B			
$\overline{B}$			
		0,04	1

„Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden Mängel vorliegt, beträgt 5%.“

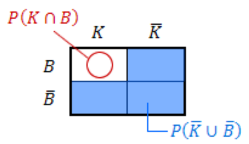
Erläuterung: *Vereinigung zweier Ereignisse*

mindestens einer = Vereinigung

$P(\overline{K} \cup \overline{B}) = 0,05$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Graphische Veranschaulichung der Vereinigung und dessen Gegenereignis in der Vierfeldertafel:



$P(K \cap B) = 1 - P(\overline{K} \cup \overline{B})$

$P(K \cap B) = 1 - P(\overline{K} \cup \overline{B})$

$\Rightarrow \quad P(K \cap B) = 1 - 0,05 = 0,95$

	K	$\overline{K}$	
B	0,95		
$\overline{B}$			
		0,04	1

„Wenn mindestens einer der beiden Mängel vorliegt, so funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% die Beleuchtung nicht einwandfrei.“

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Unter $P_{\overline{K} \cup \overline{B}}\left(\overline{B}\right)$ versteht man die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\overline{B}$ unter der Bedingung des Ereignisses $\overline{K} \cup \overline{B}$.

D.h. man betrachtet nicht den gesamten Ergebnisraum, sondern nur die Teilmenge des Ereignisses $\overline{K} \cup \overline{B}$.
Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{K} \cup \overline{B}}(\overline{B})$ ist also die Wahrscheinlichkeit für $\overline{B}$, wenn man nur $\overline{K} \cup \overline{B}$ betrachtet.

$P_{\overline{K} \cup \overline{B}}\left(\overline{B}\right) = 0,40$

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

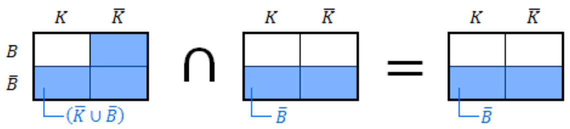
Für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$, gilt nach der Bayes'sche Regel:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_{\overline{K} \cup \overline{B}}\left(\overline{B}\right) = \frac{P\left((\overline{K} \cup \overline{B}) \cap \overline{B}\right)}{P(\overline{K} \cup \overline{B})}$$

Erläuterung: *Schnittwahrscheinlichkeit*

Graphische Veranschaulichung der Schnittwahrscheinlichkeit $P\left((\overline{K} \cup \overline{B}) \cap \overline{B}\right)$ in der Vierfeldertafel:



$\Rightarrow \quad P\left((\overline{K} \cup \overline{B}) \cap \overline{B}\right) = P(\overline{B})$

$$P_{\overline{K} \cup \overline{B}}\left(\overline{B}\right) = \frac{P\left(\overline{B}\right)}{P(\overline{K} \cup \overline{B})}$$

$\Rightarrow \quad P(\overline{B}) = P_{\overline{K} \cup \overline{B}}(\overline{B}) \cdot P(\overline{K} \cup \overline{B}) = 0,40 \cdot 0,05 = 0,02$

	K	$\overline{K}$	
B	0,95		
$\overline{B}$			0,02
		0,04	1

Vierfeldertafel kann jetzt vervollständigt werden:

	K	$\overline{K}$	
B	0,95	0,03	0,98
$\overline{B}$	0,01	0,01	0,02
	0,96	0,04	1