Abitur 2011 G8 Abitur Mathematik Stochastik III

Ein Investor plant, in einer Gemeinde, die aus den Orten Oberberg und Niederberg besteht, eine Windkraftanlage zu errichten.

Um sich einen Überblick darüber zu verschaffen, wie die Einwohner zu diesem Vorhaben stehen, beschließt der Gemeinderat, eine Umfrage unter den Wahlberechtigten der Gemeinde durchzuführen. In Niederberg werden 1722, in Oberberg 258 Einwohner befragt. 1089 aller Befragten äußern keine Einwände gegen die Windkraftanlage, darunter sind allerdings nur 27 Einwohner von Oberberg. Die übrigen befragten Personen sprechen sich gegen die Windkraftanlage aus.

Teilaufgabe 1a (4 BE)

Bestimmen Sie jeweils den prozentualen Anteil der Gegner der Windkraftanlage unter den Befragten von Niederberg und unter den Befragten von Oberberg.

Aus allen Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt.

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Ermitteln Sie

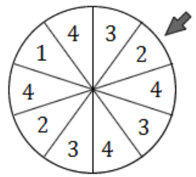
- die Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt und sich gegen die Windkraftanlage aussprach.
- die Wahrscheinlichkeit p_2 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt, wenn bekannt ist, dass sie sich gegen die Windkraftanlage aussprach.

Teilaufgabe 1c (2 BE)

Begründen Sie, dass kein Ergebnis der Umfrage denkbar ist, bei dem $p_1 > p_2$ ist.

Die Windkraftgegner schließen sich zu einer Bürgerinitiative zusammen.

Zur Aufbesserung ihrer finanziellen Mittel hat die Bürgerinitiative auf dem Gemeindefest ein Glücksrad mit zehn gleich großen Sektoren aufgebaut (vgl. Abbildung). Ein Spiel besteht aus dem einmaligen Drehen des Glücksrads; die erzielte Zahl gibt die Kategorie des Preises an, den der Spieler erhält.



Teilaufgabe 2a (5 BE)

Ein Preis der Kategorie 1 ist für die Bürgerinitiative mit Unkosten in Höhe von zehn Euro, ein Preis der Kategorie 2 mit Unkosten in Höhe von fünf Euro verbunden. Preise der Kategorien 3 und 4 werden von Sponsoren gestellt und verursachen keine Unkosten. Bestimmen Sie den im Mittel pro Spiel zu erwartenden Gewinn der Bürgerinitiative, wenn der Einsatz für ein Spiel $2,50$ Euro beträgt und keine weiteren Unkosten anfallen.

Teilaufgabe 2b (5 BE)

Zehn Besucher des Gemeindefests drehen nacheinander jeweils einmal das Glücksrad. Geben Sie zu jedem der folgenden Ereignisse einen Term an, mit dem sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnen lässt.

- A: „Nur die ersten fünf Preise entfallen auf die Kategorie 4."
- B: „Genau die Hälfte der Preise entfällt auf die Kategorie 4."
- C: „Die Preise verteilen sich jeweils zur Hälfte auf die Kategorien 1 und 4."

Teilaufgabe 3 (5 BE)

Die Bürgerinitiative veranstaltet am viel besuchten Badesee der Gemeinde eine Unterschriftenaktion gegen die geplante Windkraftanlage.
Berechnen Sie, wie hoch der Anteil p der Gegner der Windkraftanlage unter den Badegästen mindestens sein muss, damit sich unter zehn zufällig ausgewählten Badegästen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens ein Gegner der Windkraftanlage befindet.

Teilaufgabe 4 (5 BE)

Aufgrund der vielfältigen Aktivitäten der Bürgerinitiative vermutet der Gemeinderat, dass inzwischen mindestens 55% der Wahlberechtigten der Gemeinde gegen die Errichtung der Windkraftanlage sind. Um diese Vermutung zu testen, werden 200 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte der Gemeinde befragt. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung des Gemeinderats mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% irrtümlich abgelehnt werden soll?

Lösung

Teilaufgabe 1a (4 BE)

Ein Investor plant, in einer Gemeinde, die aus den Orten Oberberg und Niederberg besteht, eine Windkraftanlage zu errichten.

Um sich einen Überblick darüber zu verschaffen, wie die Einwohner zu diesem Vorhaben stehen, beschließt der Gemeinderat, eine Umfrage unter den Wahlberechtigten der Gemeinde durchzuführen. In Niederberg werden 1722, in Oberberg 258 Einwohner befragt. 1089 aller Befragten äußern keine Einwände gegen die Windkraftanlage, darunter sind allerdings nur 27 Einwohner von Oberberg. Die übrigen befragten Personen sprechen sich gegen die Windkraftanlage aus.

Bestimmen Sie jeweils den prozentualen Anteil der Gegner der Windkraftanlage unter den Befragten von Niederberg und unter den Befragten von Oberberg.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Ereignisse:

N: „Bewohner aus Niederberg“
O: „Bewohner aus Oberberg“
W: „Befürworter Windkraftanlage“

Aus der Einleitung der Teilaufgabe:

$|N| = 1722$, $|O| = 258$, $|W| = 1089$, $|W \cap O| = 27$

	W	$\overline{W}$	
N			1722
O	27		258
	1089		

Vierfeldertafel vervollständigen:

	W	$\overline{W}$	
N	1062	660	1722
O	27	231	258
	1089	891	1980

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Prozentualen Anteil (Wahrscheinlichkeit) bestimmen:

> Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*
>
> Unter $P_N(\overline{W})$ versteht man die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\overline{W}$ unter der Bedingung des Ereignisses N.
>
> D.h. man betrachtet nicht den gesamten Ergebnisraum, sondern nur die Teilmenge des Ereignisses N.
> Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_N(\overline{W})$ ist also die Wahrscheinlichkeit für $\overline{W}$, wenn man nur N betrachtet.

$$P_N(\overline{W}) = \frac{|\overline{W} \cap N|}{|N|} = \frac{660}{1722} \approx 38,3\%$$

$\Rightarrow$ $38,3\%$ der Befragten aus Niederberg sind Gegner der Windkraftanlage

$$P_O(\overline{W}) = \frac{|\overline{W} \cap O|}{|O|} = \frac{231}{258} \approx 89,53\%$$

$\Rightarrow$ $89,53\%$ der Befragten aus Oberberg sind Gegner der Windkraftanlage

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Aus allen Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt.

Ermitteln Sie

- die Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt und sich gegen die Windkraftanlage aussprach.
- die Wahrscheinlichkeit p_2 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt, wenn bekannt ist, dass sie sich gegen die Windkraftanlage aussprach.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Wahrscheinlichkeit

Ereignisse:

N: „Bewohner aus Niederberg“
O: „Bewohner aus Oberberg“
W: „Befürworter Windkraftanlage“

Aus Teilaufgabe 1a:

	W	$\overline{W}$	
N	1062	660	1722
O	27	231	258
	1089	891	1980

$$p_1 = P(O \cap \overline{W}) = \frac{|O \cap \overline{W}|}{|\Omega|} = \frac{231}{1980} \approx 11,7\%$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p_2 = P_{\overline{W}}(O) = \frac{|O \cap \overline{W}|}{|\overline{W}|} = \frac{231}{891} \approx 25,9\%$$

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Unter $P_{\overline{W}}(O)$ versteht man die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis O unter der Bedingung des Ereignisses $\overline{W}$.

D.h. man betrachtet nicht den gesamten Ergebnisraum, sondern nur die Teilmenge des Ereignisses $\overline{W}$.
Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{W}}(O)$ ist also die Wahrscheinlichkeit für O, wenn man nur $\overline{W}$ betrachtet.

Teilaufgabe 1c (2 BE)

Begründen Sie, dass kein Ergebnis der Umfrage denkbar ist, bei dem $p_1 > p_2$ ist.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Nachweis eines Sachverhaltes

Aus Teilaufgabe 1b gilt:

$$p_1 = \frac{|O \cap \overline{W}|}{|\Omega|}$$

$$p_2 = \frac{|O \cap \overline{W}|}{|\overline{W}|}$$

Beobachtung:

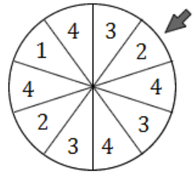
Beide Brüche haben den gleichen Zähler. Somit kann p_1 nicht größer sein als p_2, da der Nenner von p_1 immer größer (oder gleich) ist als der Nenner von p_2.

$$\Rightarrow \quad p_1 = \frac{|O \cap \overline{W}|}{|\Omega|} \quad \leq \quad p_2 = \frac{|O \cap \overline{W}|}{|\overline{W}|}$$

Teilaufgabe 2a (5 BE)

Die Windkraftgegner schließen sich zu einer Bürgerinitiative zusammen.

Zur Aufbesserung ihrer finanziellen Mittel hat die Bürgerinitiative auf dem Gemeindefest ein Glücksrad mit zehn gleich großen Sektoren aufgebaut (vgl. Abbildung). Ein Spiel besteht aus dem einmaligen Drehen des Glücksrads; die erzielte Zahl gibt die Kategorie des Preises an, den der Spieler erhält.



Ein Preis der Kategorie 1 ist für die Bürgerinitiative mit Unkosten in Höhe von zehn Euro, ein Preis der Kategorie 2 mit Unkosten in Höhe von fünf Euro verbunden. Preise der Kategorien 3 und 4 werden von Sponsoren gestellt und verursachen keine Unkosten. Bestimmen Sie den im Mittel pro Spiel zu erwartenden Gewinn der Bürgerinitiative, wenn der Einsatz für ein Spiel $2{,}50$ Euro beträgt und keine weiteren Unkosten anfallen.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Aus dem Aufgabentext entnimmt man:

Erläuterung:

Der Gewinn der Bürgerinitiative setzt sich zusammen aus den Unkosten der jeweiligen Kategorie und der Einnahme des Spieleinsatzes von $2{,}50$ Euro.

Erzielt z.B. ein Spieler die Kategorie 1, so ist der Gewinn gleich $-10 + 2{,}50 = -7{,}50$ Euro.

Das Glücksrad besteht aus 10 gleichgroße Sektoren. Die Zahl 1 kommt einmal vor, die Zahl 2 zweimal, die Zahl 3 dreimal und die Zahl 4 viermal. Für die Wahrscheinlichkeiten gilt also:
$P(X = 1) = \dfrac{1}{10}$, $P(X = 2) = \dfrac{2}{10}$, ...

Kategorie	1	2	3	4
Unkosten	−10	−5	0	0
Gewinn x_i	−7,50	−2,50	2,50	2,50
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4
$x_i \cdot P(X = x_i)$	−0,75	−0,5	0,75	1

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X bei n Versuchen (hier ist n gleich 4) ist definiert als:

$$E_n(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P\ (X = x_i)$$

Der gesuchte Erwartungswert lautet somit:

$E(X) = -0,75 - 0,5 + 0,75 + 1 = 0,50$ €

Teilaufgabe 2b (5 BE)

Zehn Besucher des Gemeindefests drehen nacheinander jeweils einmal das Glücksrad. Geben Sie zu jedem der folgenden Ereignisse einen Term an, mit dem sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnen lässt.

- A: „Nur die ersten fünf Preise entfallen auf die Kategorie 4."
- B: „Genau die Hälfte der Preise entfällt auf die Kategorie 4."
- C: „Die Preise verteilen sich jeweils zur Hälfte auf die Kategorien 1 und 4."

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Ziehen mit Reihenfolge mit Zurücklegen

Aus der Tabelle von Teilaufgabe 2a entnimmt man die benötigten Wahrscheinlichkeiten:

Kategorie	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

Ereignis A:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Es handelt sich hierbei um ein wiederholtes Bernoulli-Experiment (Bernoulli-Kette) mit Treffer Kategorie 4.

Wahrscheinlichkeit eines Treffers: $P(\text{„Kategorie 4"}) = 0,4$
Wahrscheinlichkeit einer Niete: $P(\text{„nicht Kategorie 4"}) = 1 - 0,4 = 0,6$

Es liegt keine Binomialverteilung vor, da die Reihenfolge der Treffer vorgegeben ist. Daher entfällt bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Binomialkoeffizient.

$P(A) = 0,4^5 \cdot 0,6^5$

Binomialverteilung

Ereignis B:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

In diesem Fall liegt eine Binomialverteilung vor, da keine Reihenfolge vorgegeben ist.

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$P(B) = P_{0,4}^{10}(Z=5) = \binom{10}{5} \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^5$

Wahrscheinlichkeit

Ereignis C:

Erläuterung:

In diesem Fall handelt es sich nicht mehr um Bernoulli, da es zwei Treffer gibt, Kategorie 1 und Kategorie 4.

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit setzt sich somit zusammen aus:

$0,1^5$ 5 mal Kategorie 1
$0,4^5$ 5 mal Kategorie 4

$\dfrac{10!}{5! \cdot 5!}$ Permutation der Reihenfolge (nach dem MISSISSIPPI - Prinzip)

Alternative:
„5 aus 10“ : $\binom{10}{5} = \dfrac{10!}{5! \cdot 5!}$

$P(C) = 0,1^5 \cdot 0,4^5 \cdot \dfrac{10!}{5! \cdot 5!}$

Teilaufgabe 3 (5 BE)

Die Bürgerinitiative veranstaltet am viel besuchten Badesee der Gemeinde eine Unterschriftenaktion gegen die geplante Windkraftanlage.
Berechnen Sie, wie hoch der Anteil p der Gegner der Windkraftanlage unter den Badegästen mindestens sein muss, damit sich unter zehn zufällig ausgewählten Badegästen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens ein Gegner der Windkraftanlage befindet.

Lösung zu Teilaufgabe 3

Binomialverteilung

Text analysieren und Daten herauslesen:

“ ...unter zehn zufällig ausgewählten Badegästen ...“ $\Rightarrow$ $n = 10$

“ ... wenigstens ein Gegner ...“ $\Rightarrow$ $Z \geq 1$

“ ... mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99%...“ $\Rightarrow$ $P \geq 0,99$

Es soll gelten:

$P_p^{10}(Z \geq 1) \geq 0,99$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(\text{mind. 1 Treffer})$ können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$

$1 - P_p^{10}(Z=0) \geq 0,99$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1-p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(Z=0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$1 - (1-p)^{10} \geq 0,99 \quad | \quad -1$

$-(1-p)^{10} \geq -0,01 \quad | \quad \cdot(-1)$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$(1-p)^{10} \leq 0,01 \quad | \quad \sqrt[10]{}$

$1-p \leq \sqrt[10]{0,01}$

$1-p \leq \sqrt[10]{0,01} \approx 0,631$

$\Rightarrow \quad p \geq 0,369$

Teilaufgabe 4 (5 BE)

Aufgrund der vielfältigen Aktivitäten der Bürgerinitiative vermutet der Gemeinderat, dass inzwischen mindestens 55% der Wahlberechtigten der Gemeinde gegen die Errichtung der Windkraftanlage sind. Um diese Vermutung zu testen, werden 200 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte der Gemeinde befragt. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung des Gemeinderats mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% irrtümlich abgelehnt werden soll?

Lösung zu Teilaufgabe 4

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

Nullhypothese: $H_0 : p_0 \geq 55\% = 0,55$
„Die Vermutung des Gemeinderats trifft zu. Mindestens 55% sind gegen die Errichtung."

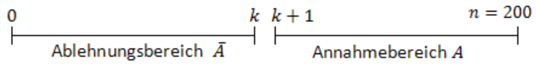
Stichprobenumgang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Annahmebereich von H_0: $A = [k+1, 200]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [0, k]$

> Erläuterung: *Nullhypothese*
>
> Der Gemeinderat vermutet, dass **mindestens** 55% der Wahlberechtigten der Gemeinde gegen die Errichtung der Windkraftanlage sind. Somit liegt der Annahmebereich rechts und der Ablehnungsbereich links.



Fehler 1.Art bestimmen:

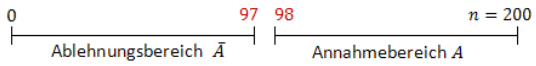
> Erläuterung: *Fehler 1.Art*
>
> Man spricht von „Fehler 1. Art" wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.
>
> Das ist der Fall wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \leq k$).
>
> $\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,55}^{200}(Z \leq k) \leq 0,05$

$P_{0,55}^{200}(Z \leq k) \leq 0,05$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k = 97$

$\Rightarrow$ bis $Z = 97$ wird die Nullhypothese abgelehnt

Entscheidungsregel:



Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0, \ldots, 97\}$