Fachabitur 2011 Mathematik NT Stochastik S I

Die Eisdiele BAVARIA bietet unterschiedliche Eisbecher an. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Eigentümer, dass 60% der Gäste einen Eisbecher mit Fruchteis (F) bestellen. Zudem ist bekannt, dass 70% aller Eisbecher mit Sahne (S) bestellt werden. 10% der Eisbecher werden ohne Fruchteis und ohne Sahne bestellt.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob die Ereignisse F und S stochastisch unabhängig sind.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{\overline{F} \cup S}$ möglichst einfach mit Worten und geben Sie seine Wahrscheinlichkeit an.

Die Eisdiele BAVARIA unterhält im Sommer einen Eisstand an einem Badesee. Jeweils 25% der Kunden kaufen dort 1, 2, 3 oder 4 Kugeln Eis (es werden maximal 4 Kugeln pro Bestellung verkauft!).
Die Kugeln werden normalerweise in der Waffel (w) ausgegeben. Beim Kauf von 3 oder 4 Kugeln kann der Kunde auch einen Becher (b) wählen, was jeweils jeder zweite dieser Kunden wünscht. Außerdem können Käufer von 3 oder 4 Kugeln das Eis mit Sahne (s) oder ohne Sahne bestellen.
Unabhängig davon, ob das Eis im Becher oder in der Waffel verkauft wird, wählen 60% der Kunden, die 3 Kugel bestellen, auch Sahne, bei den Kunden mit 4 Kugeln sind dies nur 40%.
Das Zufallsexperiment besteht in der Feststellung, wie viele Kugeln Eis ein beliebig ausgewählter Kunde kauft, ob das Eis in der Waffel oder im Becher ausgegeben wird und ob Sahne gewünscht wird.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)

Ermitteln Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms alle 10 Elementarereignisse mit ihren Wahrscheinlichkeiten.

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Gegeben seien folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein Kunde bestellt mehr als eine Kugel Eis.“
E_2 : „Ein Kunde erhält keine Sahne.“
E_3 : „Ein Kunde erhält das Eis im Becher, aber ohne Sahne.“

Geben Sie die Ereignisse E_3 und $E_4 = E_1 \cap E_2$ in aufzählender Mengenschreibweise an und bestimmen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten.

Teilaufgabe 2.3 (5 BE)

Eine Kugel Eis und eine Portion Sahne kosten jeweils $1,00$ €.
Die Zufallsgröße X gibt den Preis einer Bestellung an.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und stellen Sie sie geeignet grafisch dar.

Berechnen Sie bei den folgenden Aufgaben die Wahrscheinlichkeiten auf vier Nachkommastellen.

Bei einem Wandertag kommt eine Klasse mit 25 Schülerinnen und Schülern an einem Eisstand vorbei. Der Lehrer kauft jedem Schüler eine Kugel Eis. Erfahrungsgemäß sind 40% aller verkauften Kugeln Schokoladeneiskugeln.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Schokoladeneiskugeln, die der Lehrer für seine Klasse bezahlt, innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Nachdem die ersten 14 Schüler ihr Eis erhalten haben, merkt der Eisverkäufer, dass das Schokoladeneis nur noch für zwei Kugeln reicht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle weiteren Bestellungen erfüllt werden können, wenn von den restlichen Eissorten noch genügend vorhanden ist.

Der Eisverkäufer vermutet, dass der Anteil der verkauften Schoko-Eiskugeln höher als sonst liegt (Gegenhypothese) und will diese Vermutung anhand von 200 Bestellungen von jeweils einer Kugel Eis überprüfen.

Teilaufgabe 3.3.1 (6 BE)

Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 10%-Niveau.

Teilaufgabe 3.3.2 (3 BE)

Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht. Wie muss sich der minimale Annahmebereich von H_0 verändern, wenn das Signifikanzniveau abgesenkt wird?

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Die Eisdiele BAVARIA bietet unterschiedliche Eisbecher an. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Eigentümer, dass 60% der Gäste einen Eisbecher mit Fruchteis (F) bestellen. Zudem ist bekannt, dass 70% aller Eisbecher mit Sahne (S) bestellt werden. 10% der Eisbecher werden ohne Fruchteis und ohne Sahne bestellt.

Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob die Ereignisse F und S stochastisch unabhängig sind.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Gegeben:
$P(F) = 0,6$
$P(S) = 0,7$
$P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0,1$

	F	$\overline{F}$	
S	0,4	0,3	**0,7**
$\overline{S}$	0,2	**0,1**	0,3
	0,6	0,4	1

Stochastische Unabhängigkeit

Prüfen der stochastischen Unabhängigkeit:

Erläuterung:

Zwei Ereignisse F und S heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(F \cap S) = P(F) \cdot P(S)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

Die Wahrscheinlichkeiten werden aus der Vierfeldertafel entnommen.

$P(F) \cdot P(S) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$

$P(F \cap S) = 0,4$ (aus Vierfeldertafel)

$P(F) \cdot P(S) \neq P(F \cap S)$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse F und S sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{\overline{F} \cup S}$ möglichst einfach mit Worten und geben Sie seine Wahrscheinlichkeit an.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

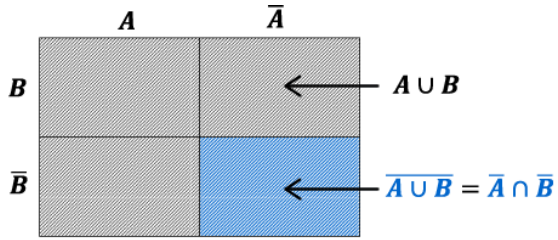
De Morgansche Gesetze

Gesucht: $P\left(\overline{\overline{F} \cup S}\right)$

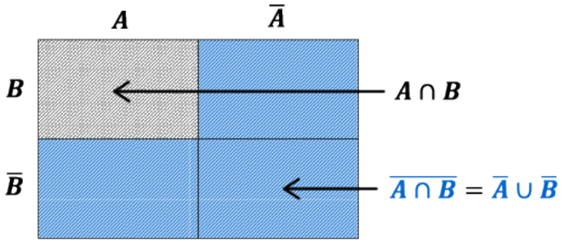
Erläuterung: *De Morgansche Gesetze*

Wird das Gegenereignis einer Verknüpfung mehrerer Ereignisse (z.B. $\overline{A \cup B}$) gebildet, ist die Bedeutung im Sachzusammenhang oft nicht mehr klar ersichtlich.
Die Gesetze von De Morgan helfen solche Ausdrücke zu vereinfachen.
Diese lauten wie folgt:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



$\overline{\overline{F} \cup S} = \overline{\overline{F}} \cap \overline{S} = F \cap \overline{S}$

In Worten: Es wird ein Fruchteis ohne Sahne gekauft.

$P\left(\overline{\overline{F} \cup S}\right) = P\left(F \cap \overline{S}\right) = 0,2$ (aus Vierfeldertafel)

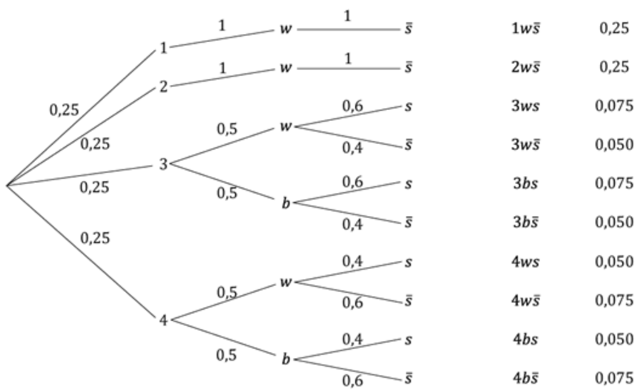
Teilaufgabe 2.1 (6 BE)

Die Eisdiele BAVARIA unterhält im Sommer einen Eisstand an einem Badesee. Jeweils 25% der Kunden kaufen dort 1, 2, 3 oder 4 Kugeln Eis (es werden maximal 4 Kugeln pro Bestellung verkauft!).
Die Kugeln werden normalerweise in der Waffel (w) ausgegeben. Beim Kauf von 3 oder 4 Kugeln kann der Kunde auch einen Becher (b) wählen, was jeweils jeder zweite dieser Kunden wünscht. Außerdem können Käufer von 3 oder 4 Kugeln das Eis mit Sahne (s) oder ohne Sahne bestellen.
Unabhängig davon, ob das Eis im Becher oder in der Waffel verkauft wird, wählen 60% der Kunden, die 3 Kugel bestellen, auch Sahne, bei den Kunden mit 4 Kugeln sind dies nur 40%.
Das Zufallsexperiment besteht in der Feststellung, wie viele Kugeln Eis ein beliebig ausgewählter Kunde kauft, ob das Eis in der Waffel oder im Becher ausgegeben wird und ob Sahne gewünscht wird.

Ermitteln Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms alle 10 Elementarereignisse mit ihren Wahrscheinlichkeiten.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Baumdiagramm erstellen



Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Gegeben seien folgende Ereignisse:

E_1: „Ein Kunde bestellt mehr als eine Kugel Eis.“
E_2: „Ein Kunde erhält keine Sahne.“
E_3: „Ein Kunde erhält das Eis im Becher, aber ohne Sahne.“

Geben Sie die Ereignisse E_3 und $E_4 = E_1 \cap E_2$ in aufzählender Mengenschreibweise an und bestimmen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Wahrscheinlichkeit

Ereignis E_3:
$E_3 = \{3b\,\overline{s}; 4b\,\overline{s}\}$

$P(E_3) = 0,050 + 0,075 = 0,125$

Ereignis E_1:
$E_1 = \{2w\,\overline{s}; 3w\,s; 3w\,\overline{s}; 3b\,s; 3b\,\overline{s}; 4w\,s; 4w\,\overline{s}; 4b\,s; 4b\,\overline{s}\}$

Ereignis E_2:
$E_2 = \{1w\,\overline{s}; 2w\,\overline{s}; 3w\,\overline{s}; 3b\,\overline{s}; 4w\,\overline{s}; 4b\,\overline{s}\}$

Ereignis E_4:
$E_4 = E_1 \cap E_2 = \{2w\,\overline{s}; 3w\,\overline{s}; 3b\,\overline{s}; 4w\,\overline{s}; 4b\,\overline{s}\}$

$P(E_4) = 0,25 + 0,05 + 0,05 + 0,075 + 0,075 = 0,5$

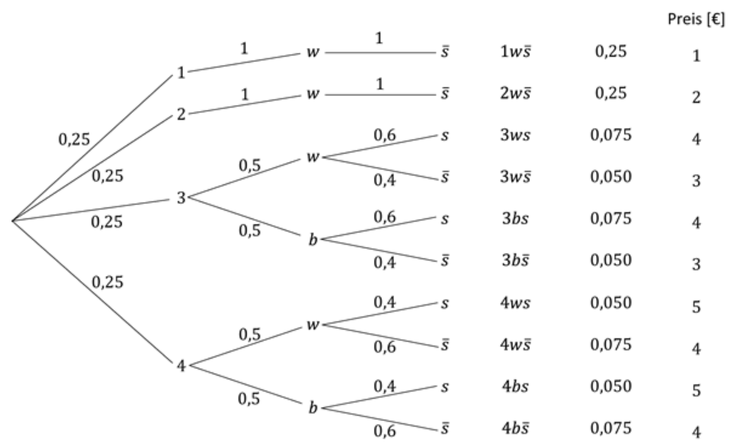
Teilaufgabe 2.3 (5 BE)

Eine Kugel Eis und eine Portion Sahne kosten jeweils $1,00$ €.
Die Zufallsgröße X gibt den Preis einer Bestellung an.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und stellen Sie sie geeignet grafisch dar.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Preise der Bestellungen:



Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$P(X=1)=\frac{1}{4}$

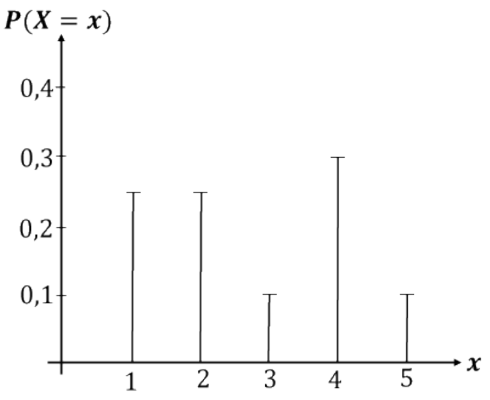
$P(X=2)=\frac{1}{4}$

$P(X=3)=\frac{2}{40}+\frac{2}{40}=\frac{1}{10}$

$P(X=4)=\frac{3}{40}+\frac{3}{40}+\frac{3}{40}+\frac{3}{40}=\frac{3}{10}$

$P(X=5)=\frac{2}{40}+\frac{2}{40}=\frac{1}{10}$

Stabdiagramm:



Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Berechnen Sie bei den folgenden Aufgaben die Wahrscheinlichkeiten auf vier Nachkommastellen.

Bei einem Wandertag kommt eine Klasse mit 25 Schülerinnen und Schülern an einem Eisstand vorbei. Der Lehrer kauft jedem Schüler eine Kugel Eis. Erfahrungsgemäß sind 40% aller verkauften Kugeln Schokoladeneiskugeln.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Schokoladeneiskugeln, die der Lehrer für seine Klasse bezahlt, innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Erwartungswert und Standardabweichung

Interpretation als Bernoulli-Kette:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

n: Anzahl der Versuche
k: Anzahl der Treffer
p: Wahrscheinlichkeit für einen Treffers pro Versuch
$1-p$: Wahrscheinlichkeit für eine Niete pro Versuch

Es werden hintereinander $n=25$ „Versuche“ (Bestellungen) durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“ (Schokoladeneiskugel) ist $p=0,4$.

Berechnen des Erwartungswerts:

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert μ einer binomialverteilten Zufallsgröße X berechnet sich durch:

$\mu = n\cdot p$

n: Anzahl der Versuche
p: Wahrscheinlichkeit für einen Treffer pro Versuch

$\mu = n \cdot p = 25 \cdot 0,4 = 10$

Berechnen der Standardabweichung:

Erläuterung: *Standardabweichung einer Zufallsgröße*

Die Standardabweichung σ einer binomialverteilten Zufallsgröße X berechnet sich durch:

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

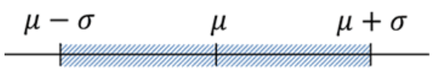
n: Anzahl der Versuche
p: Wahrscheinlichkeit für einen Treffer pro Versuch
$1-p$: Wahrscheinlichkeit für eine Niete pro Versuch

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{25 \cdot 0,4 \cdot (1-0,4)} = \sqrt{6} \approx 2,45$

Die Anzahl X der verkauften Schokoladeneiskugeln soll innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

$P(|X-\mu| < \sigma)$

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$



$\mu + \sigma = 10 + 2,45 = 12,45$

$\mu - \sigma = 10 - 2,45 = 7,55$

$\Rightarrow 7,55 \leq X \leq 12,45$

Berechnen der Wahrscheinlichkeit:

$P(|X-\mu| < \sigma) = P(7,55 \leq X \leq 12,45)$

$= P(X \leq 12) - P(X \leq 7)$ (X muss ganzzahlig sein)

$= F_{0,4}^{25}(12) - F_{0,4}^{25}(7)$

Werte aus dem Tafelwerk ablesen:

$\overset{TW}{=} 0,84623 - 0,15355 \approx 0,6927$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Nachdem die ersten 14 Schüler ihr Eis erhalten haben, merkt der Eisverkäufer, dass das Schokoladeneis nur noch für zwei Kugeln reicht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle weiteren Bestellungen erfüllt werden können, wenn von den restlichen Eissorten noch genügend vorhanden ist.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Binomialverteilung

Es können noch alle Bestellungen erfüllt werden, wenn für die verbleibenden 11 Schüler maximal 2 Schokoladeneiskugeln ausgegeben werden.

$n = 11; p = 0,4; q = 0,6$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= \binom{11}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^{11} + \binom{11}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^{10} + \binom{11}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^9$$
$$\approx 0,0036 + 0,0266 + 0,0887 = 0,1189$$

Teilaufgabe 3.3.1 (6 BE)

Der Eisverkäufer vermutet, dass der Anteil der verkauften Schoko-Eiskugeln höher als sonst liegt (Gegenhypothese) und will diese Vermutung anhand von 200 Bestellungen von jeweils einer Kugel Eis überprüfen.

Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 10%-Niveau.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3.1

Hypothesentest - Annahmebereich und Ablehnungsbereich

Testgröße: Anzahl X der Schokoladeneiskugeln bei 200 Bestellungen.

Erläuterung:

Der Eisverkäufer vermutet zwar, dass der Anteil der Schokoladeneiskugeln gestiegen ist, möchte jedoch eine Fehlentscheidung mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10% vermeiden.

Fehlentscheidung bedeutet in diesem Fall, dass der Anteil an Schokoladeneiskugeln unverändert geblieben ist und der Eisverkäufer sich („irrtümlich“) geirrt hat.

Die Nullhypothese ist also das Gleichbleiben des Schokoladenkugelanteils bei $p = 0,4$.

Nullhypothese $H_0:\ p = 0,4$

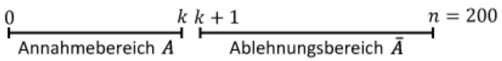
H_0 in Worten: 40% der verkauften Eiskugeln sind Schoko-Eiskugeln.

Stichprobenumfang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,1$

Annahmebereich von $H_0:\ A = [0\ ;\ k]$

Ablehnungsbereich von $H_0:\ \overline{A} = [k+1\ ;\ 200]$



Die Wahrscheinlichkeit, dass bei $p = 0,4$ die Anzahl der Schokoladeneiskugeln größer als ein bestimmter Schwellwert k ist, soll kleiner sein als $\alpha = 0,1$.

$P(X > k) \leq 0,1$

$1 - P(X \leq k) \leq 0,1$

$P(X \leq k) \geq 0,9$

$F_{0,4}^{200}(k) \geq 0,9$

$k = 89$ (aus Tafelwerk)

$\Rightarrow$ Maximaler Ablehnungsbereich:
$\overline{A} = \{90; 91; 92; ...; 200\}$

Teilaufgabe 3.3.2 (3 BE)

Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht. Wie muss sich der minimale Annahmebereich von H_0 verändern, wenn das Signifikanzniveau abgesenkt wird?

Lösung zu Teilaufgabe 3.3.2

Hypothesentest - Fehler zweiter Art

Fehler zweiter Art:

Erläuterung: *Fehler zweiter Art*

Der Fehler zweiter Art besteht in der Annahme der Nullhypothese, obwohl diese nicht zutrifft.

Es ist möglich, dass die Anzahl der Schokoladeneiskugeln beim Test unterhalb des Schwellwertes k liegt, auch wenn die Wahrscheinlichkeit $p > 0,4$ gestiegen ist.
Aufgrund des Testausgangs schlussfolgert man jedoch, dass p gleich geblieben ist und begeht hiermit einen Fehler. Diesen nennt man den Fehler 2. Art.

Der Fehler zweiter Art besteht darin, dass die Nullhypothese beibehalten wird, obwohl sie falsch ist, d.h. Der Eisverkäufer nimmt weiterhin an, dass die Wahrscheinlichkeit für das Kaufen einer Schokoladeneiskugel 40% beträgt, obwohl dieser Anteil gestiegen ist.

Hypothesentest - Annahmebereich und Ablehnungsbereich

Das Signifikanzniveau α wird abgesenkt. α ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art, also für das fälschliche Abweisen der Nullhypothese.

Wenn diese Wahrscheinlichkeit kleiner werden soll, muss die obere Grenze des Annahmebereichs der Nullhypothese erhöht werden.