Fachabitur 2011 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Teilaufgabe 1. (6 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{9}(x-a)(x^2+3x-10)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Lage und Vielfachheit der Nullstellen von f_a.

Nun wird $a = 2$ gesetzt. Die Funktion f_2 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet. Es gilt: $f(x) = \frac{1}{9}(x-2)(x^2+3x-10)$.
Die Funktion lässt sich auch in der Form $f(x) = \frac{1}{9}(x^3+x^2-16x+20)$ darstellen (Nachweis nicht erforderlich).

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung und mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 1, dass die Funktion f genau zwei Extremstellen hat.

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f. Runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen.

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist.

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-5,5 \leq x \leq 3$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

Gegeben ist weiterhin eine quadratische Funktion p. Der Graph von p besitzt an der Stelle $x = -\frac{9}{4}$ den Scheitelpunkt und berührt den Graphen der Funktion f (aus Aufgabe 2) an der Stelle $x = -1$.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.
[Ergebnis: $p(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}$]

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von p im Bereich $-5,5 \leq x \leq 1$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 2.4. Berechnen Sie dazu die Nullstellen von p sowie die Koordinaten des Scheitels.

Teilaufgabe 3.3 (7 BE)

Die Koordinatenachsen und die Graphen der Funktionen f (aus Aufgabe 2) und p schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau.

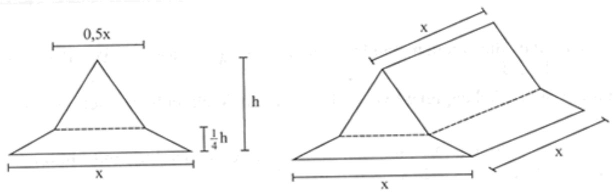
Teilaufgabe 4. (5 BE)

Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x^3+x^2-16x+20) & \text{für } x < -1 \\ \frac{4}{9}(x^2-4x+4) & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Funktion h an der Nahtstelle $x_0 = -1$ differenzierbar ist.

Eine Schokoladenfirma will eine neue Praline auf den Markt bringen. Die Länge und Breite der Praline beträgt x cm. Die weiteren Größenverhältnisse sind den folgenden Abbildungen zu entnehmen.



Aus verpackungstechnischen Gründen gilt für die Summe aus Höhe h, Breite und Länge 8 cm. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.

Teilaufgabe 5.1 (7 BE)

Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(x)$ der Praline in Abhängigkeit von x auf und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge an.
[Teilergebnis: $V(x) = -0,75x^3 + 3x^2$]

Teilaufgabe 5.2 (6 BE)

Berechnen Sie x so, dass das Volumen der Praline den absolut größten Wert annimmt.
Berechnen Sie hierfür auch die Höhe h der Praline.

Lösung

Teilaufgabe 1. (6 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{9}(x-a)(x^2+3x-10)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Lage und Vielfachheit der Nullstellen von f_a.

Lösung zu Teilaufgabe 1.

Nullstellen einer Funktion

$f_a(x) = \frac{1}{9}(x-a)(x^2+3x-10)$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$f_a(x) = 0$
$\frac{1}{9}(x-a)(x^2+3x-10) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.
Jeder Faktor wird untersucht.

$x - a = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^N = a$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$

$$x_{2,3}^N = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_2^N = \frac{-3+7}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \quad x_3^N = \frac{-3-7}{2} = -5$$

Fallunterscheidung:

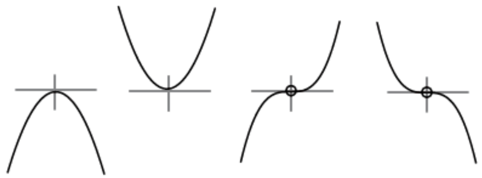
Erläuterung: *Fallunterscheidung*

Der Faktor $(x-a)$ verändert sich für verschiedene Werte von a.
Spezialfälle sind $a = 2$ und $a = -5$.
Hier nimmt der Faktor die Form eines anderen Faktors an, der in der Funktionsgleichung vorkommt.

1. Fall: $a = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1^N = x_2^N$

Erläuterung: *Vielfachheit von Nullstellen*

Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x-Achse in einem Punkt „berührt“ oder „schneidet“.



1-fache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse.
2-fache (doppelte) Nullstelle: Berührstelle mit der x-Achse.
3-fache Nullstelle: Nullstelle ist ein Sattelpunkt.

$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) \Rightarrow x = 2$ ist doppelte Nullstelle
$(x+5)^2 = (x+5)(x+5) \Rightarrow x = -5$ ist doppelte Nullstelle

$x = 2$ ist doppelte Nullstelle
$x = -5$ ist einfache Nullstelle

2. Fall: $a = -5 \quad \Rightarrow \quad x_1^N = x_3^N$

$x = 2$ ist einfache Nullstelle
$x = -5$ ist doppelte Nullstelle

3. Fall: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$

$x = a$ ist einfache Nullstelle
$x = 2$ ist einfache Nullstelle
$x = -5$ ist einfache Nullstelle

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Nun wird $a = 2$ gesetzt. Die Funktion f_2 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet. Es gilt: $f(x) = \dfrac{1}{9}(x-2)(x^2+3x-10)$.

Die Funktion lässt sich auch in der Form $f(x) = \frac{1}{9}(x^3 + x^2 - 16x + 20)$ darstellen (Nachweis nicht erforderlich).

Begründen Sie ohne weitere Rechnung und mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 1, dass die Funktion f genau zwei Extremstellen hat.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Anwendungsaufgabe

Nach Teilaufgabe 1.1 (1. Fall) gilt:

$x = 2$ ist doppelte Nullstelle
$x = -5$ ist einfache Nullstelle

Es folgt somit:

f hat nach Aufgabe 1.1 bei $x = 2$ eine doppelte Nullstelle, berührt also an dieser Stelle die x-Achse. $x = 2$ ist somit zugleich eine Extremstelle.

$x = -5$ ist eine weitere von der ersten verschiedene Nullstelle von f. Folglich muss sich zwischen den beiden Nullstellen noch ein Extremum befinden.

Da f eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist, können keine weiteren Extremstellen auftreten.
f hat also genau zwei Extremstellen.

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f. Runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Lage von Extrempunkten ermitteln

$$f(x) = \frac{1}{9}\left(x^3 + x^2 - 16x + 20\right)$$

Erste Ableitung bilden:

$$f'(x) = \frac{1}{9}\left(3x^2 + 2x - 16\right)$$

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

Erste Ableitung Null setzen: $f'(x) = 0$

$$\frac{1}{9}\left(3x^2 + 2x - 16\right) = 0$$

$$3x^2 + 2x - 16 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$$

$$x^E_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 3\cdot(-16)}}{2\cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-2 \pm 14}{6}$$

$$\Rightarrow \quad x^E_1 = \frac{-2+14}{6} = 2$$

$$\Rightarrow \quad x^E_2 = \frac{-2-14}{6} = -\frac{8}{3}$$

$$y^E_1 = f\left(x^E_1\right) = f(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1(2|0)$$

$$y^E_2 = f\left(x^E_2\right) = f\left(-\frac{8}{3}\right) \approx 5,65 \quad \Rightarrow \quad E_2\left(-\frac{8}{3} \mid 5,65\right)$$

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

$$f''(x) = \frac{1}{9}(6x + 2)$$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Stelle x^E bestimmen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum)

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum)

$$f''\left(x_1^E\right) = f''(2) = \frac{14}{9} > 0 \Rightarrow E_1(2|0) \text{ Tiefpunkt}$$

$$f''\left(x_2^E\right) = f''\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{14}{9} < 0 \Rightarrow E_2\left(-\frac{8}{3} \mid 5{,}65\right) \text{ Hochpunkt}$$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist.

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Krümmungsverhalten einer Funktion

Mögliche Wendestelle(n) bestimmen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Wendepunkt an der Stelle x^{WP} erfüllt sein:

$f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{9}(6x+2) = 0$$

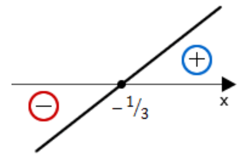
$$6x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{\text{WP}} = -\frac{1}{3}$$

Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an der Stelle $x = -\frac{1}{3}$ mithilfe einer Skizze bestimmen:

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Der Graph der zweiten Ableitung $f''(x) = \frac{1}{9}(6x+2) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}$ ist eine Gerade mit positiver Steigung ($m = \frac{2}{3}$). Sie schneidet die x-Achse an der Stelle $x^{\text{WP}} = -\frac{1}{3}$.

Skizze von f'':



Erläuterung: *Funktionswert*

Dort wo der Graph oberhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion, also in diesem Fall die zweite Ableitung, positive Funktionswerte und somit positives Vorzeichen.

Dort wo der Graph unterhalb der x-Achse liegt, hat die Funktion negative Funktionswerte und somit negatives Vorzeichen.

$$f''(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in \left]-\frac{1}{3}; \infty\right[$$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a;b]$ rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f im Intervall $[a;b]$ linksgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^{WP}, d.h. $f''\left(x^{\text{WP}}\right) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^{WP} vor.

$\Rightarrow$ G_f ist rechtsgekrümmt für $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right]$

$\Rightarrow$ G_f ist linksgekrümmt für $x \in \left[-\frac{1}{3}; \infty\right[$

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-5,5 \leq x \leq 3$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

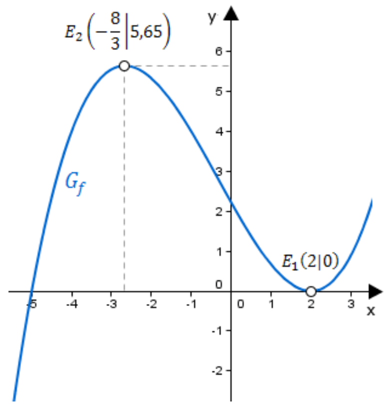
Lösung zu Teilaufgabe 2.4

Skizze

$f(x) = \frac{1}{9}(x-2)(x^2+3x-10)$

$E_1(2|0)$ Tiefpunkt

$E_2\left(-\frac{8}{3} \mid 5,65\right)$ Hochpunkt



Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Gegeben ist weiterhin eine quadratische Funktion p. Der Graph von p besitzt an der Stelle $x = -\frac{9}{4}$ den Scheitelpunkt und berührt den Graphen der Funktion f (aus Aufgabe 2) an der Stelle $x = -1$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.
[Ergebnis: $p(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}$]

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Funktionsgleichung ermitteln

$f(x) = \frac{1}{9}\left(x^3 + x^2 - 16x + 20\right)$

p ist quadratische Funktion: $p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Bedingungen analysieren:

Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*

Über die gegebenen Bedingungen lassen sich Gleichungen aufstellen, welche die Parameter a, b und c enthalten. Durch das Lösen des dadurch entstandenen Gleichungssystems erhält man die gesuchten Werte.

1. Scheitel bei $x = -\frac{9}{4}$, p hat also bei $x = -\frac{9}{4}$ eine waagrechte Tangente: $p'\left(-\frac{9}{4}\right) = 0$
   Erste Ableitung bilden:

   $p'(x) = 2a\,x + b$

   $p'\left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{9}{2}a + b = 0$ (I)

2. p und f berühren sich bei $x = -1$, haben also die gleiche Steigung bei $x = -1$:
   $p'(-1) = f'(-1)$

   $p'(-1) = -2a + b$

   $f'(-1) = \frac{1}{9}\left(3(-1)^2 + 2\cdot(-1) - 16\right) = \frac{1}{9}\cdot(-15) = -\frac{5}{3}$

   $p'(-1) = f'(-1)$

   $-2a + b = -\frac{5}{3}$ (II)

3. p und f berühren sich bei $x = -1$, haben also den gleichen Funktionswert bei $x = -1$:
   $p(-1) = f(-1)$

   $p(-1) = a - b + c$

   $f(-1) = \frac{1}{9}\left((-1)^3 + (-1)^2 - 16\cdot(-1) + 20\right) = \frac{1}{9}\cdot 36 = 4$

   $p(-1) = f(-1)$

   $a - b + c = 4$ (III)

Gleichungssystem:

(I) $-\frac{9}{2}a + b = 0$

(II) $-2a + b = -\frac{5}{3}$

(III) $a - b + c = 4$

(I)-(II):

$-\frac{5}{2}a = \frac{5}{3} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$

Einsetzen von $a = -\frac{2}{3}$ in (I):

$-\frac{9}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + b = 0$

$b = -3$

Einsetzen von $a = -\frac{2}{3}$ und $b = -3$ in (III):

$-\frac{2}{3} - (-3) + c = 4$

$c = \frac{5}{3}$

Berechnete Werte für a, b und c in $p(x)$ einsetzen:
$p(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}$

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von p im Bereich $-5{,}5 \leq x \leq 1$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 2.4. Berechnen Sie dazu die Nullstellen von p sowie die Koordinaten des Scheitels.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Nullstellen einer Funktion

$p(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$p(x) = 0$

$-\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3} = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$

$$x_{1,2}^N = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{5}{3}}}{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{\frac{121}{9}}}{-\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{3 \pm \frac{11}{3}}{-\frac{4}{3}}$$

$$x_1^N = \frac{3 + \frac{11}{3}}{-\frac{4}{3}} = -5$$

$$x_2^N = \frac{3 - \frac{11}{3}}{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

Funktionswert berechnen

Bestimmung des Scheitelpunkts:

Scheitel von p bei $x = -\frac{9}{4}$ (s. Angabe 3.0)

$$y = p\left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{4}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + \frac{5}{3} = \frac{121}{24}$$

Der Scheitelpunkt befindet sich bei $S\left(-\frac{9}{4} \mid \frac{121}{24}\right)$.

Skizze

Nullstellen:

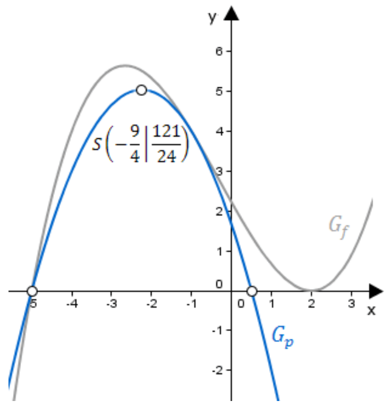
$x_1^N = -5$
$x_2^N = \frac{1}{2}$

Scheitel:

$S\left(-\frac{9}{4} \mid \frac{121}{24}\right)$

Wertetabelle: (nicht erforderlich)

x	−5,5	−5	−4	−3	−2	1	0	0,5	1
$p(x)$	−2	0	3	4,67	5	4	1,67	0	−2

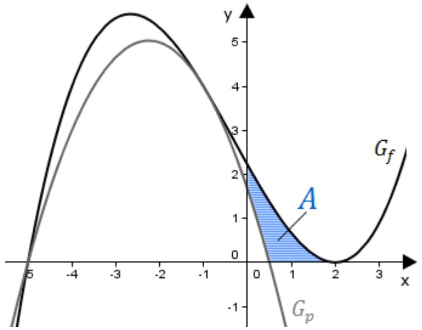


Teilaufgabe 3.3 (7 BE)

Die Koordinatenachsen und die Graphen der Funktionen f (aus Aufgabe 2) und p schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau.

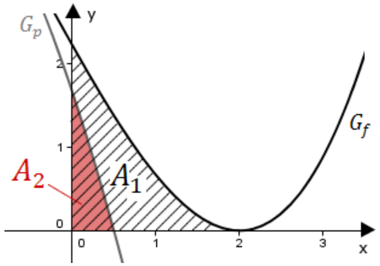
Lösung zu Teilaufgabe 3.3

Skizze



Flächenberechnung

Die Fläche A wird über zwei Teilflächen berechnet:



$A = A_1 - A_2$

Berechnung der Teilfläche A_1:

A_1 ist die Fläche unter dem Graphen von f begrenzt durch die y-Achse ($x = 0$) und der Nullstelle $x = 2$.

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen 0 und 2 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A_1 = \int_0^2 f(x)\mathrm{dx}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^2 f(x)\mathrm{dx} \\ &= \int_0^2 \frac{1}{9}\left(x^3 + x^2 - 16x + 20\right)\,\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 20x\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{9}\left[\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 + \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 8\cdot 2^2 + 20\cdot 2\right) - 0\right] \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{44}{3} = \frac{44}{27} \end{aligned}$$

Berechnung der Teilfläche A_2:

A_2 ist die Fläche unter dem Graphen von p begrenzt durch die y-Achse ($x = 0$) und der Nullstelle $x = \frac{1}{2}$.

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_p mit der x-Achse zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} p(x)\mathrm{dx}$$

$$A_2 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} p(x)\mathrm{dx}$$
$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}\right)\ \mathrm{dx}$$
$$= \left[-\frac{2}{9}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[\left(-\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) - 0\right] = \frac{31}{72}$$

Berechnen der Gesamtfläche A:

$$A = A_1 - A_2$$

$$A = \frac{44}{27} - \frac{31}{72} = \frac{259}{216} \approx 1,20$$

Die Maßzahl der gesuchten Fläche beträgt $1,20$.

Teilaufgabe 4. (5 BE)

Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x^3 + x^2 - 16x + 20) & \text{für } x < -1 \\ \frac{4}{9}(x^2 - 4x + 4) & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Funktion h an der Nahtstelle $x_0 = -1$ differenzierbar ist.

Lösung zu Teilaufgabe 4.

Stetigkeit einer Funktion

Stetigkeit überprüfen:

Erläuterung: *Stetigkeit einer Funktion*

Untersucht man eine Funktion $g(x)$ auf Stetigkeit an der Stelle x_0, so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x)$ (rechtsseitiger Grenzwert)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} g(x)$ (linksseitiger Grenzwert)

Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von rechts.
Ist $g(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x > x_0$ definiert ist.

Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von links.
Ist $g(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x < x_0$ definiert ist.

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{9}\left(x^3 + x^2 - 16x + 20\right) = 4$$
$$\lim_{x \to -1^+} h(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{4}{9}\left(x^2 - 4x + 4\right) = -4$$
$$h(-1) = \frac{4}{9}\left((-1)^2 - 4\cdot(-1) + 4\right) = 4$$

Erläuterung: *Stetigkeit einer Funktion*

Eine Funktion f ist genau dann an der Stelle x_0 stetig, wenn der Funktionswert an dieser Stelle sowohl mit dem links- als auch mit dem rechtsseitigem Grenzwert identisch ist, d.h. wenn gilt:

$$f\ (x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle x_0 keinen Sprung.

$\Rightarrow$ h ist an der Stelle $x_0 = -1$ stetig.

Differenzierbarkeit einer Funktion

Erste Ableitung $h'(x)$ bestimmen:

Erläuterung: *Ableitung einer abschnittsweise definierten Funktion*

Eine abschnittsweise definierte Funktion wird auch abschnittsweise abgeleitet. Man bildet die Ableitungen der Teilfunktionen:

$$g(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x < x_0 \\ v(x) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{für } x < x_0 \\ v'(x) & \text{für } x \geq x_0 \end{cases}$$

Ist g an der Stelle x_0 nicht differenzierbar oder ist nicht bekannt, ob g bei x_0 differenzierbar ist, muss x_0 bei der Ableitung ausgeschlossen werden:

$$g'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{für } x < x_0 \\ v'(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(3x^2 + 2x - 16) & \text{für } x < -1 \\ \frac{4}{9}(2x - 4) & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

Prüfen, ob h an der Stelle $x_0 = -1$ differenzierbar ist:

Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*

Untersucht man eine Funktion $g(x)$ auf Differenzierbarkeit an der Stelle x_0, so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} g'(x)$ (rechtsseitiger Grenzwert)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} g'(x)$ (linksseitiger Grenzwert)

Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von rechts.
Ist $g'(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x > x_0$ definiert ist.

Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich x_0 von links.
Ist $g'(x)$ abschnittsweise definiert, so muss die Teilfunktion betrachtet werden, die für $x < x_0$ definiert ist.

$$\lim_{x \to -1^-} h'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{9}\left(3x^2 + 2x - 16\right) = -\frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \to -1^+} h'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{4}{9}(2x - 4) = -\frac{8}{3}$$

Erläuterung: *Differenzierbarkeit einer Funktion*

Eine Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn gilt:

1. G_f ist in x_0 stetig

2. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$

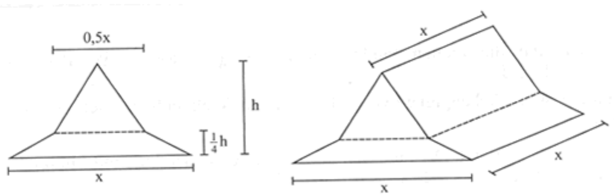
Anders ausgedrückt:

Eine Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es an dieser Stelle eine eindeutige Tangente an den Graphen gibt.
Dies ist nur der Fall, wenn der Graph an dieser Stelle weder einen Sprung noch einen Knick aufweist.

$\Rightarrow$ h ist an der Stelle $x_0 = -1$ nicht differenzierbar.

Teilaufgabe 5.1 (7 BE)

Eine Schokoladenfirma will eine neue Praline auf den Markt bringen. Die Länge und Breite der Praline beträgt x cm. Die weiteren Größenverhältnisse sind den folgenden Abbildungen zu entnehmen.



Aus verpackungstechnischen Gründen gilt für die Summe aus Höhe h, Breite und Länge 8 cm. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.

Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(x)$ der Praline in Abhängigkeit von x auf und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge an.
[Teilergebnis: $V(x) = -0,75x^3 + 3x^2$]

Lösung zu Teilaufgabe 5.1

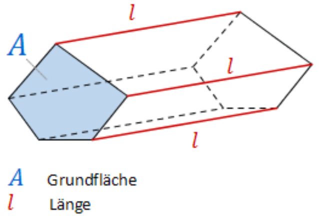
Volumen eines Prismas

Die Praline hat die Form eines geraden Prismas.

Erläuterung: *Volumen eines Prismas*

Das Volumen eines Prismas berechnet sich aus dem Produkt aus Grundfläche und Länge:

$$V_{\text{Prisma}} = A \cdot l$$



Die Grundfläche setzt sich zusammen aus einem Trapez und einem Dreieck.

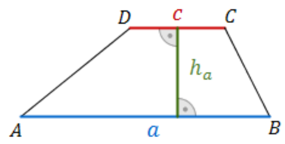
$$A = A_{\text{Trapez}} + A_{\text{Dreieck}}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Trapezes*

Der Flächeninhalt eines Trapezes $ABCD$ mit den parallelen Seiten a und c berechnet sich mit der Formel:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2}\,(a+c)\cdot h_a$$

wobei h_a die Höhe des Trapezes auf die Seite a ist.



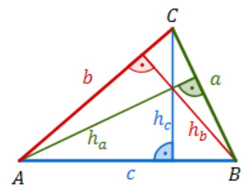
(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2}(x+0,5x)\cdot\frac{1}{4}h = \frac{3}{16}x\,h$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC berechnet sich aus der Hälfte des Produkts aus einer Seite und der zugehörigen Höhe:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}a\cdot h_a = \frac{1}{2}b\cdot h_b = \frac{1}{2}c\cdot h_c$$



(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}\cdot 0,5x\cdot\frac{3}{4}h = \frac{3}{16}x\,h$$

Für die Gesamtfläche gilt:

$$A = A_{\text{Trapez}} + A_{\text{Dreieck}} = \frac{3}{16}x\,h + \frac{3}{16}x\,h = \frac{3}{8}x\,h$$

Damit ist das Volumen der Praline:

$$V_{\text{Prisma}} = A \cdot x = \frac{3}{8}x^2\,h$$

Erläuterung:

Während man für x einen beliebigen Wert wählen kann, muss die Höhe h so gewählt werden (in Abhängigkeit von x), dass die genannte Bedingung für die Summe aus Höhe, Länge und Breite erfüllt ist. Da diese Summe den Wert 8 annehmen muss, gilt die nachfolgende Bedingung.

$$h + x + x = 8$$
$$h + 2x = 8$$

Erläuterung:

Um die Bedingung für h zu erhalten, lösen wir die Gleichung nach h auf.

$$h = 8 - 2x$$

Einsetzen in die Volumenformel:

$$V(x) = \frac{3}{8}x^2 \cdot (8 - 2x)$$
$$V(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 3x^2$$

Für die Größe x gibt es folgende Bedingungen, die **alle** erfüllt sein müssen:

Erläuterung:

x und h müssen beide Positiv sein, da sie Breite und Höhe eines realen Prismas darstellen.

1. $x > 0$

2. $h > 0$

$8 - 2x > 0 \Rightarrow x < 4$

Für die Definitionsmenge gilt:

Erläuterung:

x muss größer als Null sein (1. Bedingung) und gleichzeitig kleiner als 4 (2. Bedingung).
Die für x möglichen Werte liegen also zwischen 0 und 4. Die Ränder sind ausgeschlossen, da für $x = 0$ bzw. $h = 0$ kein Prisma entstehen kann. Es folgt also für die Definitionsmenge:

$$D_V =]0; 4[$$

Teilaufgabe 5.2 (6 BE)

Berechnen Sie x so, dass das Volumen der Praline den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die Höhe h der Praline.

Lösung zu Teilaufgabe 5.2

Extremwertaufgabe

$$V(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 3x^2 \qquad D_V =]0; 4[$$

Erste Ableitung bilden:

$$V'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 6x$$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für einen Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$$f'\left(x^E\right) = 0, \quad \text{daher immer der Ansatz:} \quad f'(x) = 0$$

$V'(x) = 0$

$-\frac{9}{4}x^2 + 6x = 0$

$x \cdot \left(-\frac{9}{4}x + 6\right) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Jeder Faktor wird untersucht.

$\left(\Rightarrow x_1^E = 0 \notin D_V\right)$

$-\frac{9}{4}x + 6 = 0$

$\Rightarrow x_2^E = \frac{8}{3}$

Da $x_1^E = 0 \notin D_V$ bleibt als Lösung nur $x_2^E = \frac{8}{3}$

Zweite Ableitung bilden:

$V''(x) = -\frac{9}{2}x + 6$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Stelle $x_2^E = \frac{8}{3}$ bestimmen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum)

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum)

$V''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{9}{2} \cdot \frac{8}{3} + 6 = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ rel. Hochpunkt bei $x^E = \frac{8}{3}$

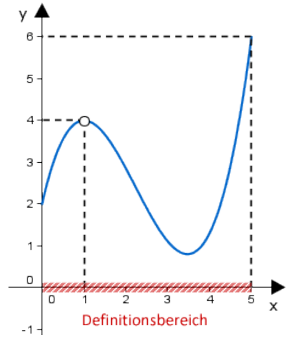
Bestimmen des Volumens für $x^E = \frac{8}{3}$: $\quad V\left(\frac{8}{3}\right) \approx 7{,}11$

Erläuterung: *Randbetrachtung*

Bei Extremwertaufgaben ist der Definitionsbereich einer Funktion oft aufgrund realer Bedingungen eingeschränkt.

Die Funktionswerte können an den Rändern des Definitionsbereichs größer sein als das relative Maximum. Dies muss überprüft werden.

Beispiel:



Diese Funktion hat zwar ein relatives Maximum im Punkt $HOP(1|4)$, dies ist jedoch nicht der größte Wert, den die Funktion im gesamten Definitionsbereich annehmen kann.
Bei $(5|6)$ gibt es am Rand des Definitionsbereichs damit noch einen größeren Wert. Dies wäre dann hier das globale Maximum.

Randbetrachtung:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\frac{3}{4}x^3 + 3x^2\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 4^-} \left(-\frac{3}{4}x^3 + 3x^2\right) = 0 \end{array}\right\} < V\left(\frac{8}{3}\right) \approx 7{,}11$$

$\Rightarrow \quad$ abs. Maximum $x^E = \frac{8}{3}$

Alternative zur Randbetrachtung: Da $x_2^E = \frac{8}{3}$ die einzige Nullstelle von $V'(x)$ im Definitionsbereich $]0;4[$ ist und somit keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen

Bereich auftritt, gilt: $x_2^E = \dfrac{8}{3}$ ist absolutes Maximum von V.

Funktionswert berechnen

Bestimmen der zu $x^E = \dfrac{8}{3}$ gehörenden Höhe $h_{\max}$:

$h_{\max} = 8 - 2x^E = 8 - 2 \cdot \dfrac{8}{3} = \dfrac{8}{3}$

Die Praline mit dem maximalen Volumen hat eine Breite von $x^E = \dfrac{8}{3}$ und eine Höhe von $h_{\max} = \dfrac{8}{3}$.