Abitur 2011 G8 Musterabitur Mathematik Stochastik IV

Graphologen beschäftigen sich mit der Analyse von Handschriften. Ein Graphologe bewirbt sich um eine Stelle. Der Personalchef der betreffenden Firma möchte ihn testen und legt ihm dazu Schriftproben vor. Jede Schriftprobe stammt entweder von einer entscheidungsfreudigen oder einer zögerlichen Person. Dies wird dem Bewerber mitgeteilt.

Teilaufgabe 1a (5 BE)

Man plant, den Bewerber einzustellen, wenn er bei mehr als zwei Drittel von zwölf vorgelegten Schriftproben richtig entscheidet.
Begründen Sie, dass der Bewerber die Stelle mit mehr als 7% Wahrscheinlichkeit bekommen würde, wenn er nur rät.

Dem Personalchef ist es zu riskant, dass ein nur ratender Bewerber die Stelle mit mehr als 7% Wahrscheinlichkeit bekommt. Er fordert, den Test so zu modifizieren, dass die Einstellungschance eines nur ratenden Bewerbers unter 3% gedrückt wird. Man entscheidet sich, die Anzahl vorgelegter Schriftproben auf 30 zu erhöhen und bei mehr als zwei Drittel eine richtige Entscheidung zu verlangen.

Teilaufgabe 1b (3 BE)

Zeigen Sie, dass bei dem modifizierten Testverfahren die Forderung des Personalchefs erfüllt wird.

Teilaufgabe 1c (3 BE)

Der Graphologe interessiert sich anders als der Personalchef mehr dafür, dass seine Fähigkeiten fälschlicherweise nicht erkannt werden. Er schätzt, dass er bei jeder einzelnen Schriftprobe mit 75% Wahrscheinlichkeit richtig entscheidet. Bestimmen Sie, wie hoch in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit ist, dass er bei dem modifizierten Test als ratend eingestuft wird.

Teilaufgabe 1d (2 BE)

Das modifizierte Testverfahren kann als einseitiger Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau 3% gedeutet werden. Geben Sie die zugehörige Nullhypothese und den Ablehnungsbereich an.

Man liest gelegentlich, dass eine nach rechts geneigte Handschrift einen Hinweis auf Aufgeschlossenheit darstellt. In einer Abteilung mit 50 Angestellten gelten 35 als aufgeschlossen. 40% der als aufgeschlossen geltenden Angestellten haben eine Handschrift, die nicht nach rechts geneigt ist. Weiter ist bei 6 Angestellten, die nicht als aufgeschlossen gelten, die Handschrift nach rechts geneigt.
Die Ereignisse R: „Ein zufällig ausgewählter Angestellter hat eine nach rechts geneigte Handschrift“ und A: „Ein zufällig ausgewählter Angestellter gilt als aufgeschlossen“ sollen auf stochastische Abhängigkeit untersucht werden.

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Stellen Sie die beschriebene Situation in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm oder in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

Teilaufgabe 2b (2 BE)

Begründen Sie, dass die Ereignisse A und R stochastisch abhängig sind.

Teilaufgabe 2c (2 BE)

Von den im Vortext gegebenen Zahlenwerten soll nur der Prozentsatz 40% so abgeändert werden, dass die Ereignisse R und A stochastisch unabhängig sind. Geben Sie den geänderten Wert an.

Es ist bekannt, dass 25% aller Unternehmen bei Neueinstellungen ein graphologisches Gutachten, d. h. eine Analyse der Handschrift des Bewerbers, zu Rate ziehen.
Ein Stellensuchender bewirbt sich bei 20 Firmen.

Teilaufgabe 3a (2 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau fünf dieser Unternehmen ein graphologisches Gutachten einholen.

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Unternehmen, die ein graphologisches Gutachten einholen, kleiner als der zugehörige Erwartungswert ist.

Teilaufgabe 3c (4 BE)

Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: „Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable einen Wert annimmt, der kleiner als ihr Erwartungswert ist, beträgt höchstens 50%.“

Lösung

Teilaufgabe 1a (5 BE)

Graphologen beschäftigen sich mit der Analyse von Handschriften. Ein Graphologe bewirbt sich um eine Stelle. Der Personalchef der betreffenden Firma möchte ihn testen und legt ihm dazu Schriftproben vor. Jede Schriftprobe stammt entweder von einer entscheidungsfreudigen oder einer zögerlichen Person. Dies wird dem Bewerber mitgeteilt.

Man plant, den Bewerber einzustellen, wenn er bei mehr als zwei Drittel von zwölf vorgelegten Schriftproben richtig entscheidet.
Begründen Sie, dass der Bewerber die Stelle mit mehr als 7% Wahrscheinlichkeit bekommen würde, wenn er nur rät.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Binomialverteilung

Text analysieren und Daten herauslesen:

" ...zwölf vorgelegte Schriftproben.." $\Rightarrow n = 12$

" ... mehr als zwei Drittel von zwölf..." $\Rightarrow Z > \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$

" ...wenn er nur rät." $\Rightarrow p = P(\text{ richtig mit Raten }) = 0,5$
$q = 1 - p = 0,5$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$P_{0,5}^{12}(Z > 8) = P_{0,5}^{12}(Z \geq 9)$

Erläuterung:

$Z \geq 9$ bedeutet entweder 9 Treffer oder 10 oder 11 oder 12.
Da es sich um Alternativen handelt, werden die Wahrscheinlichkeiten addiert.

$P_{0,5}^{12}(Z > 8) = P_{0,5}^{12}(Z = 9) + P_{0,5}^{12}(Z = 10) + P_{0,5}^{12}(Z = 11) + P_{0,5}^{12}(Z = 12)$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$P_{0,5}^{12}(Z > 8) = \binom{12}{9} \cdot \overbrace{0,5^9 \cdot 0,5^3}^{0,5^{12}} + \binom{12}{10} \cdot \overbrace{0,5^{10} \cdot 0,5^2}^{0,5^{12}} + \binom{12}{11} \cdot \overbrace{0,5^{11} \cdot 0,5^1}^{0,5^{12}} + \binom{12}{12} \cdot \overbrace{0,5^{12} \cdot 0,5^0}^{0,5^{12}}$$

$$P_{0,5}^{12}(Z > 8) = \underbrace{\left[\binom{12}{9} + \binom{12}{10} + \binom{12}{11} + \binom{12}{12}\right]}_{299} \cdot 0,5^{12}$$

$\Rightarrow P_{0,5}^{12}(Z > 8) \approx 0,073 = 7,3\% > 7\%$

Hinweis:

$P_{0,5}^{12}(Z > 8) = 1 - P_{0,5}^{12}(Z \leq 8) = ?$

Die Wahrscheinlichkeit kann nicht über das Gegenereignis bestimmt werden, da in den stochastischen Tabellen des Tafelwerks der Fall $n = 12$ nicht berücksichtigt ist.

Teilaufgabe 1b (3 BE)

Dem Personalchef ist es zu riskant, dass ein nur ratender Bewerber die Stelle mit mehr als 7% Wahrscheinlichkeit bekommt. Er fordert, den Test so zu modifizieren, dass die Einstellungschance eines nur ratenden Bewerbers unter 3% gedrückt wird. Man entscheidet sich, die Anzahl vorgelegter Schriftproben auf 30 zu erhöhen und bei mehr als zwei Drittel eine richtige Entscheidung zu verlangen.

Zeigen Sie, dass bei dem modifizierten Testverfahren die Forderung des Personalchefs erfüllt wird.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Binomialverteilung

Text analysieren und Daten herauslesen:

" ...Schriftproben auf 30 erhöhen.." $\Rightarrow n = 30$

" ... mehr als zwei Drittel..." $\Rightarrow Z > \frac{2}{3} \cdot 30 = 20$

Die Wahrscheinlichkeit eines Treffers (Bewerber liegt richtig beim Raten) ist (wie in Teilaufgabe 1a) gleich $p = 0,5$.

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$P_{0,5}^{30}(Z > 20) = P_{0,5}^{30}(Z \geq 21)$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(mindestens k Treffer) = 1 - P(weniger als k Treffer)

In mathematischen Zeichen:

$P(Z \geq k) = 1 - P(Z < k)$ bzw. $P(Z \geq k) = 1 - P(Z \leq k-1)$

Angewendet auf diese Aufgabenstellung:

$P(Z \geq 21) = 1 - P(Z \leq 20)$

$$P_{0,5}^{30}(Z > 20) = 1 - \underbrace{P_{0,5}^{30}(Z \leq 20)}_{\text{Tafelwerk: } 0,97861}$$

$P_{0,5}^{30}(Z > 20) = 1 - 0,97861$

$P_{0,5}^{30}(Z > 20) = 0,02139$

$\Rightarrow P_{0,5}^{30}(Z > 20) \approx 2,1\% < 3\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein nur ratender Bewerber eingestellt wird, liegt unter 3%. Die Forderung des Personalchefs wird bei dem modifizierten Testverfahren erfüllt.

Teilaufgabe 1c (3 BE)

Der Graphologe interessiert sich anders als der Personalchef mehr dafür, dass seine Fähigkeiten fälschlicherweise nicht erkannt werden. Er schätzt, dass er bei jeder einzelnen Schriftprobe mit 75% Wahrscheinlichkeit richtig entscheidet. Bestimmen Sie, wie hoch in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit ist, dass er bei dem modifizierten Test als ratend eingestuft wird.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

„30 Schriftproben" $\Rightarrow n = 30$

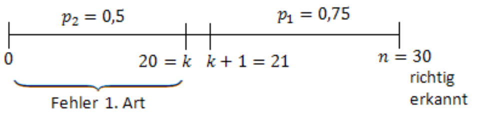
" ... mit 75% Wahrscheinlichkeit..." $\Rightarrow p_1 = 0,75$

$p_2 = P(\text{richtig beim Raten}) = 0,5$ (siehe Teilaufgabe 1a)

$k + 1 = 21$
(Anzahl der Fragen die mindestens richtig beantwortet werden müssen, siehe Teilaufgabe 1b.)

" ... fälschlicherweise nicht erkannt werden." $\iff$ Fehler 1. Art

Entscheidungsregel erstellen:



Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass der Graphologe fälschlicherweise als ratend eingestuft wird.

Das ist der Fall wenn $k \leq 20$ ist, man sich aber im vorderen Bereich $k \geq 21$ befindet, also $Z \leq k$. Da p_1 stimmt, rechnet man mit dieser Wahrscheinlichkeit.

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $\quad P_{0,75}^{30}(Z \leq k)$

Man spricht von „Fehler erster Art" wenn eine Hypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Fehler erster Art (= Signifikanzniveau) bestimmen:

$$P_{0,75}^{30}(Z \leq 20) \overset{\text{Tafelwerk}}{=} 0,19659$$

$$\Rightarrow P_{0,75}^{30}(Z \leq 20) \approx 19,7\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Graphologe beim modifizierten Test als ratend einstuft wird, ist gleich $19,7\%$.

Teilaufgabe 1d (2 BE)

Das modifizierte Testverfahren kann als einseitiger Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau 3% gedeutet werden. Geben Sie die zugehörige Nullhypothese und den Ablehnungsbereich an.

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Signifikanztest

Nullhypothese: $\quad H_0 : p_0 \leq 0,5$

Ablehnungsbereich : $\quad \overline{A} = \{21, 22, 23, \ldots, 30\}$

Erläuterung: *Nullhypothese*

Aus Teilaufgabe 1b ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewerber nur rät, den Test aber dennoch besteht, ungefähr $P_{0,5}^{30}(Z > 20) \approx 2,1\%$ beträgt.

Sie liegt somit unter dem Signifikanzniveau von 3%.

Betrachtet man das Testverfahren als einseitigen Hypothesentest mit einem Signifikanzniveau von 3%, so stellt die Wahrscheinlichkeit $P_{0,5}^{30}(Z > 20)$ den Fehler 1. Art dar und die Nullhypothese entspricht einem nur ratenden Bewerber.

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Man liest gelegentlich, dass eine nach rechts geneigte Handschrift einen Hinweis auf Aufgeschlossenheit darstellt. In einer Abteilung mit 50 Angestellten gelten 35 als aufgeschlossen. 40% der als aufgeschlossen geltenden Angestellten haben eine Handschrift, die nicht nach rechts geneigt ist. Weiter ist bei 6 Angestellten, die nicht als aufgeschlossen gelten, die Handschrift nach rechts geneigt.
Die Ereignisse R: „Ein zufällig ausgewählter Angestellter hat eine nach rechts geneigte Handschrift" und A: „Ein zufällig ausgewählter Angestellter gilt als aufgeschlossen" sollen auf stochastische Abhängigkeit untersucht werden.

Stellen Sie die beschriebene Situation in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm oder in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ereignisse:

A: „Ein zufällig ausgewählter Angestellter gilt als aufgeschlossen"
R: „Ein zufällig ausgewählter Angestellter hat eine nach rechts geneigte Handschrift"

Aus der Einleitung der Teilaufgabe 2a:

„In einer Abteilung mit 50 Angestellten gelten 35 als aufgeschlossen"

$\Rightarrow P(A) = \frac{35}{50}$

$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - \frac{35}{50} = \frac{15}{50}$

	R	$\overline{R}$	
A			$P(A) = \frac{35}{50}$
$\overline{A}$			$P(\overline{A}) = \frac{15}{50}$
			1

“ 40% der als aufgeschlossen geltenden Angestellten haben eine Handschrift, die nicht nach rechts geneigt ist.“

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Unter $P_A(\overline{R})$ versteht man die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\overline{R}$ unter der Bedingung des Ereignisses A.

D.h. man betrachtet nicht den gesamten Ergebnisraum, sondern nur die Teilmenge des Ereignisses A.
Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(\overline{R})$ ist also die Wahrscheinlichkeit für $\overline{R}$, wenn man nur A betrachtet.

$\Rightarrow P_A(\overline{R}) = 0,4$

Erläuterung: *Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$P_A(\overline{R}) = \frac{P(A \cap \overline{R})}{P(A)}$$

Auflösen nach $P(A \cap \overline{R})$:

$$P(A \cap \overline{R}) = P(A) \cdot P_A(\overline{R})$$

$P(A \cap \overline{R}) = P(A) \cdot P_A(\overline{R})$

$P(A \cap \overline{R}) = \frac{35}{50} \cdot 0,4$

$\Rightarrow P(A \cap \overline{R}) = \frac{7}{25}$

$\Rightarrow P(A \cap R) = \frac{35}{50} - \frac{7}{25} = \frac{21}{50}$

	R	$\overline{R}$	
A	$P(A \cap R) = \frac{21}{50}$	$P(A \cap \overline{R}) = \frac{7}{25}$	$P(A) = \frac{35}{50}$
$\overline{A}$			$P(\overline{A}) = \frac{15}{50}$
			1

„Weiter ist bei 6 Angestellten, die nicht als aufgeschlossen gelten, die Handschrift nach rechts geneigt.“

$\Rightarrow P(\overline{A} \cap R) = \frac{6}{50}$

$\Rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{R}) = \frac{15}{50} - \frac{6}{50} = \frac{9}{50}$

	R	$\overline{R}$	
A	$P(A \cap R) = \frac{21}{50}$	$P(A \cap \overline{R}) = \frac{7}{25}$	$P(A) = \frac{35}{50}$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap R) = \frac{6}{50}$	$P(\overline{A} \cap \overline{R}) = \frac{9}{50}$	$P(\overline{A}) = \frac{15}{50}$
			1

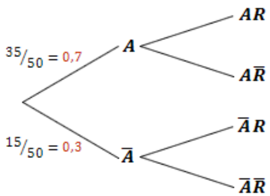
$P(R) = \frac{21}{50} + \frac{6}{50} = \frac{27}{50}$

$P(\overline{R}) = \frac{7}{25} + \frac{9}{50} = \frac{23}{50}$

	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{\overline{R}}$	
$\boldsymbol{A}$	$P(A\cap R)=\frac{21}{50}$	$P(A\cap \overline{R})=\frac{7}{25}$	$P(A)=\frac{35}{50}$
$\boldsymbol{\overline{A}}$	$P(\overline{A}\cap R)=\frac{6}{50}$	$P(\overline{A}\cap \overline{R})=\frac{9}{50}$	$P(\overline{A})=\frac{15}{50}$
	$P(R)=\frac{27}{50}$	$P(\overline{R})=\frac{23}{50}$	1

Alternative Lösung

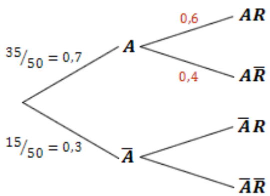
Bei der Variante Baumdiagramm benötigt man die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(\overline{A})$.



Zu dem werden alle 4 bedingten Wahrscheinlichkeiten benötigt.

Gegeben: $P_A(\overline{R}) = 0,4$

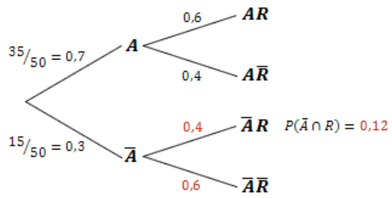
$\Rightarrow P_A(R) = 1 - 0,4 = 0,6$



Gegeben: $P(\overline{A}\cap R) = \dfrac{6}{50} = 0,12$

$\Rightarrow P_{\overline{A}}(R) = \dfrac{P(\overline{A}\cap R)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,12}{0,3} = 0,4$

$\Rightarrow P_{\overline{A}}(\overline{R}) = 1 - 0,4 = 0,6$



Die fehlendenden Schnittwahrscheinlichkeiten können dann mit der 1. Pfadregel bestimmt werden.

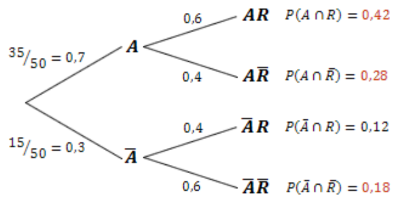
Erläuterung: *1. Pfadregel*

1.Pfadregel:

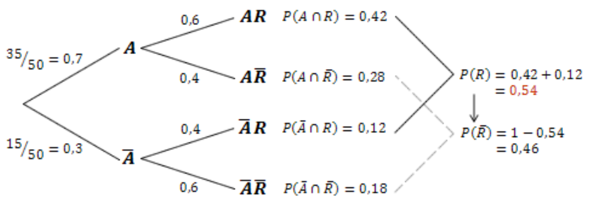
In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Beispiel:

$P(A\cap R) = P(A)\cdot P(R) = 0,7\cdot 0,6 = 0,42$



$P(R)$ ergibt sich als Summe der Schnittwahrscheinlichkeiten $P(A\cap R)$ und $P(\overline{A}\cap R)$.
$P(\overline{R})$ kann dann über das Gegenereignis berechnet werden.



Teilaufgabe 2b (2 BE)

Begründen Sie, dass die Ereignisse A und R stochastisch abhängig sind.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Stochastische Unabhängigkeit

Benötigte Angaben aus der vorherigen Teilaufgabe:

$P(A) = 0,7$

$P(R) = 0,54$

$P(A \cap R) = 0,42$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und R heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(A \cap R) = P(A) \cdot P(R)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

Ist das nicht der Fall, so sind die Ereignisse stochastisch abhängig.

Zu zeigen ist: $P(A \cap R) \overset{!}{=} P(A) \cdot P(R)$

$$\underbrace{P(A \cap R)}_{0{,}42} \neq \underbrace{P(A) \cdot P(R)}_{0{,}7 \cdot 0{,}54\ =\ 0{,}378}$$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse A und R sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 2c (2 BE)

Von den im Vortext gegebenen Zahlenwerten soll nur der Prozentsatz 40% so abgeändert werden, dass die Ereignisse R und A stochastisch unabhängig sind. Geben Sie den geänderten Wert an.

Lösung zu Teilaufgabe 2c

Stochastische Unabhängigkeit

Änderung des Prozentsatzes:

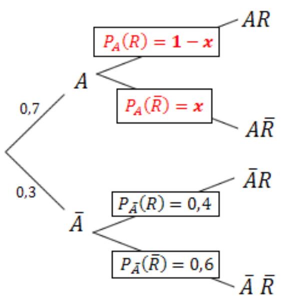
Erläuterung:

Der Prozentsatz von 40%, der abgeändert werden soll, bezieht sich auf den Anteil der aufgeschlossenen Angestellten die eine nicht nach rechts geneigte Handschrift haben.

Mit x bezeichnet man den neuen unbekannten Prozentsatz.

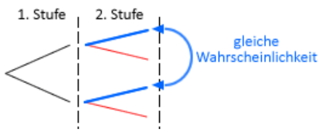
$P_A(\overline{R}) = x$ und $P_A(R) = 1 - x$

Eintragen der neuen Werte im Baumdiagramm aus Teilaufgabe 2a:



Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Sind zwei Ereignisse stochastisch unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis immer dieselbe, unabhängig von einer Bedingung. Somit sind im Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten der Äste der zweiten Stufe, die in die gleiche Richtung (oben bzw. unten) zeigen, gleich.



Wenn A und R stochastisch unabhängig sein sollen, dann muss gelten:

$P_A(R) = P_{\overline{A}}(R) = P(R)$

Neuen Prozentsatz bestimmen:

$P_A(R) = P_{\overline{A}}(R)$

$1 - x = 0,4$

$\Rightarrow x = 0,6$

Teilaufgabe 3a (2 BE)

Es ist bekannt, dass 25% aller Unternehmen bei Neueinstellungen ein graphologisches Gutachten, d. h. eine Analyse der Handschrift des Bewerbers, zu Rate ziehen.
Ein Stellensuchender bewirbt sich bei 20 Firmen.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau fünf dieser Unternehmen ein graphologisches Gutachten einholen.

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Binomialverteilung

Text analysieren und Daten herauslesen:

“ ... 25% aller Unternehmen ...“ $\Rightarrow p = P(\text{Treffer}) = 0,25$

“ ... bewirbt sich bei 20 Firmen.“ $\Rightarrow n = 20$

“ ... dass genau fünf ...“ $\Rightarrow Z = 5$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$P_{0,25}^{20}(Z = 5) \overset{\text{Tafelwerk}}{=} 0,20233 \approx 20,2\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 von diesen 20 Unternehmen ein graphologisches Gutachten einholen, ist ca. 20,2% groß.

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Unternehmen, die ein graphologisches Gutachten einholen, kleiner als der zugehörige Erwartungswert ist.

Lösung zu Teilaufgabe 3b

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Angaben aus der vorherigen Teilaufgabe:

$n = 20$
$p = 0,25$

Erwartungswert bestimmen:

$E(Z) = \mu = n \cdot p = 20 \cdot 0,25 = 5$

Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeit soll kleiner als der Erwartungswert sein, also $Z < 5$ bzw. $Z \leq 4$.

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$P_{0,25}^{20}(Z \leq 4) \overset{\text{Tafelwerk}}{=} 0,41484 \approx 41,5\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Unternehemen, die ein graphologisches Gutachten einholen, kleiner ist als der zugehörige Erwartungswert, beträgt ca. $41,5\%$.

Teilaufgabe 3c (4 BE)

Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: „Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable einen Wert annimmt, der kleiner als ihr Erwartungswert ist, beträgt höchstens 50%."

Lösung zu Teilaufgabe 3c

Binomialverteilung

Die Aussage ist falsch.

Begründung über Gegenbeispiele (eins reicht jedoch aus):

Beispiel 1

Sei $n = 1$ und $p = 0,1$.

$\Rightarrow$ Erwartungswert $E(Z) = n \cdot p = 0,1$

Zufallsvariable soll kleiner sein als der Erwartungswert: $Z < E(Z)$

$\Rightarrow Z = 0$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$P_{0,1}^{1}(Z = 0) = \binom{1}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^1 = 0,9 > 0,5$

$\Rightarrow$ Aussage ist falsch.

Beispiel 2

Sei $n = 5$ und $p = 0,1$.

$\Rightarrow$ Erwartungswert $E(Z) = n \cdot p = 0,5$

Zufallsvariable soll kleiner sein als der Erwartungswert: $Z < E(Z)$

$\Rightarrow Z = 0$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$$P_{0,1}^{5}(Z = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0,1^{0} \cdot 0,9^{5} = 0,59049 > 0,5$$

$\Rightarrow$ Aussage ist falsch.