Abitur 2011 G8 Musterabitur Mathematik Infinitesimalrechnung II

Teilaufgabe 1 (5 BE)

Geben Sie für die Funktionen mit den folgenden Termen jeweils die maximale Definitionsmenge an und untersuchen Sie die Funktionen auf Nullstellen.

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad f_2(x) = \sqrt{x-1}, \qquad f_3(x) = \ln(x-1)$$

Teilaufgabe 2 (5 BE)

Es gibt genau eine Tangente an den Graphen der Funktion $f : x \mapsto x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, deren Neigungswinkel gegen die x-Achse 135° beträgt. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Tangente.

Der Graph einer auf $\mathbb{R}$ definierten, integrierbaren Funktion f sei punktsymmetrisch zum Ursprung.

Teilaufgabe 3a (3 BE)

Begründen Sie allgemein, dass dann für alle $a > 0$ gilt: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Teilaufgabe 3b (4 BE)

Wählen Sie selbst eine Funktion f, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist, und bestätigen Sie für dieses f die Aussage aus Teilaufgabe 3a, indem Sie das Integral für die gewählte Funktion f mithilfe einer Stammfunktion berechnen.

Teilaufgabe 4 (3 BE)

Welcher der angegebenen Terme nähert die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x} + x + 1$ für große Werte von x am besten? Machen Sie Ihre Antwort plausibel.

(i) $\frac{1}{x}$ (ii) x (iii) $x+1$ (iv) $\frac{1}{x}+1$ (v) $\frac{1}{x}+x$

Die Funktion $f : t \mapsto 3(1-e^{-t}) - t$ wird im Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}_0^+$ betrachtet. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 5a (10 BE)

Bestimmen Sie das Verhalten von f an den Grenzen von D_f.
Zeigen Sie, dass G_f genau einen Hochpunkt besitzt, und berechnen Sie dessen Koordinaten.
Berechnen Sie $f(3)$ und skizzieren Sie G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse. [Zur Kontrolle: Hochpunkt an der Stelle $t = \ln 3$]

Teilaufgabe 5b (3 BE)

Im Intervall $[2;3]$ besitzt f genau eine Nullstelle a. Führen Sie mit dem Startwert 3 den ersten Schritt des Newton-Verfahrens zur näherungsweisen Berechnung von a durch.
Man erhält dadurch a auf zwei Dezimalen genau.
[Ergebnis: $a \approx 2{,}82$]

Teilaufgabe 5c (5 BE)

Berechnen Sie mithilfe des Näherungswerts aus Teilaufgabe 5b den Inhalt des Flächenstücks, das G_f im I. Quadranten mit der t-Achse einschließt.

Teilaufgabe 5d (5 BE)

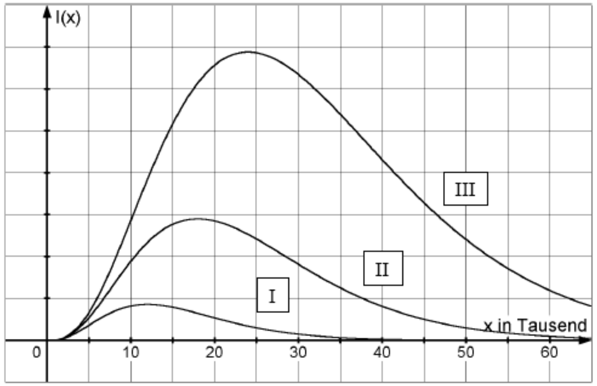
Betrachtet wird die Funktion $F : x \mapsto \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$, $D_F = D_f$.

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von F in der Nähe des Punktes $N\,(a|f(a))$.
Begründen Sie Ihre Ausführungen.
Welche Bedeutung hat das Ergebnis der Teilaufgabe 5c für die Funktion F?

Jeder Körper sendet elektromagnetische Strahlung unterschiedlicher Frequenzen aus. Die Intensität der Strahlung hängt von der Frequenz der Strahlung ab. Im Idealfall gilt nach Max Planck für diese Intensität bei einem Körper der Temperatur T:

$$I_T(x) = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1} \quad , \quad D_{I_T} = \mathbb{R}^+.$$

Dabei entspricht x bis auf eine Konstante der Frequenz der Strahlung und der Parameter T (Temperatur in Kelvin) ist positiv.
Die Graphik zeigt die zu drei Werten des Parameters T gehörenden Graphen von I_T.
Jede Scharfunktion I_T hat genau eine Maximalstelle x_{max}.



In den folgenden Teilaufgaben kann ohne Einheiten gerechnet werden.

Teilaufgabe 6a (3 BE)

Weisen Sie am Funktionsterm nach, dass $I_T(x)$ stets positiv ist.

Teilaufgabe 6b (6 BE)

Weisen Sie nach, dass für die erste Ableitung der Funktion I_T gilt:

$$I'_T(x) = \frac{x^2\, e^{\frac{x}{T}} \left[3\left(1 - e^{-\frac{x}{T}}\right) - \frac{x}{T}\right]}{\left(e^{\frac{x}{T}} - 1\right)^2}$$

Vergleichen Sie diesen Term mit dem der Funktion f aus Aufgabe 5 und zeigen Sie, dass für die Maximalstelle x_{max} von I_T gilt: $\frac{x_{max}}{T} = a$, wobei a die positive Nullstelle von f ist.

Teilaufgabe 6c (5 BE)

Unsere Sonne liefert maximale Intensität für $x_{max} = 17 \cdot 10^3$ (gelbgrüner Farbbereich). Welche Oberflächentemperatur ergibt sich hieraus für die Sonne?
Ordnen Sie die gezeichneten Graphen der Funktionsschar I_T den Temperaturen $T_1 = 4000$ Kelvin, $T_2 = 6000$ Kelvin und $T_3 = 8000$ Kelvin zu. Begründen Sie Ihre Antwort.

Teilaufgabe 6d (3 BE)

Ein Körper der Temperatur T liefert für x_{max} die Intensität $I_T(x_{max})$. Begründen Sie, dass sich $I_T(x_{max})$ verachtfacht, wenn ein Körper mit doppelt so hoher Temperatur betrachtet wird.

Lösung

Teilaufgabe 1 (5 BE)

Geben Sie für die Funktionen mit den folgenden Termen jeweils die maximale Definitionsmenge an und untersuchen Sie die Funktionen auf Nullstellen.

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}\,, \qquad f_2(x) = \sqrt{x-1}\,, \qquad f_3(x) = \ln(x-1)$$

Lösung zu Teilaufgabe 1

Definitionsbereich bestimmen

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}$$

> Erläuterung: *Nullstellen der Nennerfunktion*
>
> $f_1(x)$ besteht aus einem Bruch. Die Nennerfunktion $x-1$ darf den Wert Null nicht annehmen. Es werden also die Nullstellen der Nennerfunktion gesucht und aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.

$$x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$f_2(x) = \sqrt{x-1}$$

> Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*
>
> $f_2(x)$ ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand $x-1$, muss größer oder gleich Null sein. Man untersucht somit für welche x-Werte gilt: $x-1 \geq 0$

$$x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad D_f = [1;\infty[$$

$$f_3(x) = \ln(x-1)$$

> Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*
>
> $f_3(x)$ ist eine Logarithmusfunktion. Sie ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche x-Werte gilt: $x-1>0$

$$x-1>0 \quad \Rightarrow \quad x>1 \quad \Rightarrow \quad D_f =]1;\infty[$$

Nullstellen einer Funktion

$$f_1(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x-1}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Nullstellen}$$

$$f_2(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x-1}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x^E=1$$

$$f_3(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(x-1)=0$$

> Erläuterung: *Nullstellen einer Logarithmusfunktion*
>
> Da $\ln 1 = 0$, nimmt die Logarithmusfunktion $\ln(x-1)$ den Wert Null an, wenn das Argument $x-1=1$ ist.

$$\Longleftrightarrow \quad x-1=1 \quad \Rightarrow \quad x^E=2$$

Teilaufgabe 2 (5 BE)

Es gibt genau eine Tangente an den Graphen der Funktion $f: x \mapsto x^2$, $D_f=\mathbb{R}$, deren Neigungswinkel gegen die x-Achse $135°$ beträgt. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Tangente.

Lösung zu Teilaufgabe 2

Tangentengleichung ermitteln

$$f(x)=x^2 \quad , \quad D_f=\mathbb{R}$$

Erste Ableitung bilden:

$f'(x) = 2x$

Berührungspunkt x_0 bestimmen:

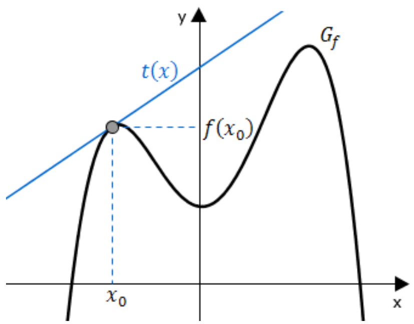
> Erläuterung: *Tangentensteigung*
>
> Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion an der Stelle x_0, ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.
>
> Sie entspricht auch dem Tangens des Winkels α welcher die Tangente mit der x-Achse bildet.
>
> $f'(x_0) = \tan\alpha$

$f'(x_0) = \tan(135°) \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_0 = \tan(135°)$

$2x_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -0,5$

Gleichung der Tangente $t(x)$ an der Stelle $x_0 = -0,5$ bestimmen:

> Erläuterung: *Gleichung der Tangente*
>
> Formel für die Tangentengleichung: $t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$



Werte berechnen:

$x_0 = -0,5$

$f(x_0) = f(-0,5) = (-0,5)^2 = 0,25$

$f'(x_0) = f'(-0,5) = 2 \cdot (-0,5) = -1$

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$ (Formel für die Tangentengleichung)

$= (x + 0,5) \cdot (-1) + 0,25$

$\Rightarrow t(x) = -x - 0,25$

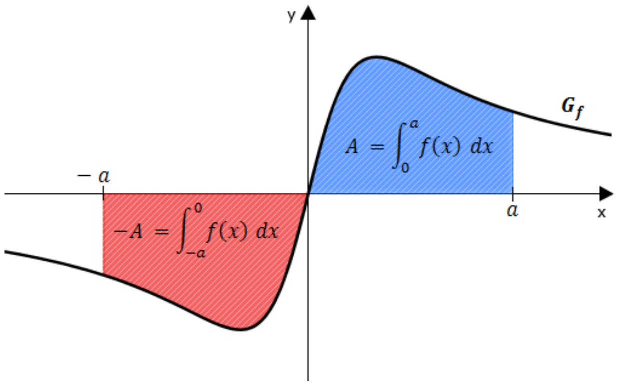
Teilaufgabe 3a (3 BE)

Der Graph einer auf $\mathbb{R}$ definierten, integrierbaren Funktion f sei punktsymmetrisch zum Ursprung.

Begründen Sie allgemein, dass dann für alle $a > 0$ gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Geometrische Interpretation eines Integrals



Begründung:

$A = \int\limits_0^a f(x)d\,x$ entspricht dem Inhalt der Fläche die der Graph von f mit der x-Achse einschließt zwischen 0 und a.

$-A = \int\limits_{-a}^0 f(x)d\,x$ entspricht dem Inhalt der Fläche die der Graph von f mit der x-Achse einschließt zwischen $-a$ und 0.

Die Flächenstücke sind wegen der Punktsymmetrie inhaltsgleich und haben in der Berechnung des Integrals unterschiedliches Vorzeichen. Ihre Summe ist somit gleich Null.

$$\int\limits_{-a}^a f(x)d\,x = \int\limits_{-a}^0 f(x)d\,x + \int\limits_0^a f(x)d\,x = -A + A = 0$$

Teilaufgabe 3b (4 BE)

Wählen Sie selbst eine Funktion f, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist, und bestätigen Sie für dieses f die Aussage aus Teilaufgabe 3a, indem Sie das Integral für die gewählte Funktion f mithilfe einer Stammfunktion berechnen.

Lösung zu Teilaufgabe 3b

Bestimmtes Integral

Funktion auswählen: $f(x) = 2x$

f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da $f(-x) = -2x = -f(x)$.

Sei $a > 0$. Integral bestimmen:

$$\int\limits_{-a}^a 2x\,d\,x =$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Eine Stammfunktion von $2x$ ist x^2.

$$= \left[x^2\right]_{-a}^a = a^2 - (-a)^2 = 0$$

Teilaufgabe 4 (3 BE)

Welcher der angegebenen Terme nähert die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x} + x + 1$ für große Werte von x am besten? Machen Sie Ihre Antwort plausibel.

(i) $\frac{1}{x}$ (ii) x (iii) $x+1$ (iv) $\frac{1}{x}+1$ (v) $\frac{1}{x}+x$

Lösung zu Teilaufgabe 4

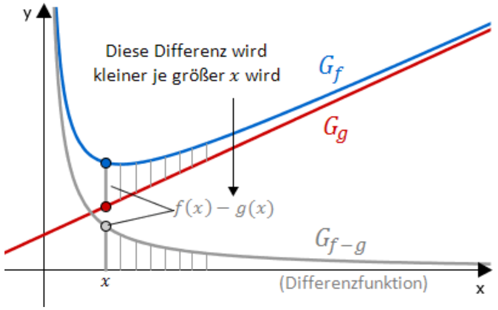
Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$f(x) = \frac{1}{x} + x + 1.$

Term (iii) nähert die Funktion $f(x)$ für große Werte von x am besten, da:

Erläuterung: *Differenzfunktion*

Wenn sich zwei Funktion f und g für große x-Werte nähern, dann bedeutet dies, dass sich ihre Funktionswerte $f(x)$ und $g(x)$ immer mehr gleichen.
Die Differenz " $f(x) - g(x)$" wird, mit größer werdenden x-Werten, gegen Null gehen.



Man bildet also den Grenzwert der Differenzfunktion für x gegen Unendlich.
Nähern sich die Funktionen, so muss der Grenzwert gleich Null sein.

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Teilaufgabe 5a (10 BE)

Die Funktion $f : t \mapsto 3(1 - e^{-t}) - t$ wird im Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}_0^+$ betrachtet. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Bestimmen Sie das Verhalten von f an den Grenzen von D_f.
Zeigen Sie, dass G_f genau einen Hochpunkt besitzt, und berechnen Sie dessen Koordinaten.
Berechnen Sie $f(3)$ und skizzieren Sie G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse. [Zur Kontrolle: Hochpunkt an der Stelle $t = \ln 3$]

Lösung zu Teilaufgabe 5a

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$$f(t) = 3\,\left(1 - e^{-t}\right) - t \qquad , \qquad D_f = \mathbb{R}_0^+ = [0;\infty[$$

$$f(0) = 3\,\left(1 - \underbrace{e^0}_{1}\right) - 0 = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{3\,\left(1 - \underbrace{e^{-t}}_{\to 0}\right)}_{\to 3} - \underbrace{t}_{\to\infty} = -\infty$$

Erläuterung:

$$f(x) = 3\,\left(1 - e^{-t}\right) - t = -3e^{-t} + 3 - t$$

$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{\left(-3e^{-t}\right)}_{\to 0} + \underbrace{(3 - t)}_{\to -\infty} = -\infty$$

Die Funktion $f(t)$ nähert sich für große positive t-Werte an die Gerade $3 - t$.

$\Rightarrow \quad y = 3 - t \quad$ ist schräge Asymptote

Ermitteln der Art von Extrempunkten

Erste Ableitung bilden:

$$f'(t) = \left[3\,\left(1 - e^{-t}\right) - t\right]'$$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Formel für Exponentialfunktionen:

$$f(x) = e^{v(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$$

Hier ist $\quad v(t) = -t$.
Dann ist $\quad v'(t) = -1$.

$$= -3e^{-t} \cdot (-1) - 1$$

$$= 3e^{-t} - 1$$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$f'(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3e^{-t} - 1 = 0$

$\frac{3}{e^t} = 1 \quad | \cdot e^t$

$e^t = 3 \quad |$ logarithmieren

$\ln e^t = \ln 3$

Erläuterung: *Logarithmus einer Potenz*

Dritte Logarithmusregel: $\ln\left(s^t\right) = t \cdot \ln s$

$\Rightarrow \quad \ln e^t = t \cdot \underbrace{\ln e}_{1} = t$

$t^E = \ln 3$

Zweite Ableitung bilden:

$f''(t) = \left(3e^{-t} - 1\right)'$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Formel für Exponentialfunktionen:

$f(x) = e^{v(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$

Hier ist $v(t) = -t$.
Dann ist $v'(t) = -1$.

$= 3e^{-t} \cdot (-1)$

$= \overbrace{-3\underbrace{e^{-t}}_{>0}}^{<0}$

$\Rightarrow \quad f''(t) < 0$ für alle $t \in D_f$

Art des Extrempunktes:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum)

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum)

G_f hat an der Stelle $t^E = \ln 3$ ein Hochpunkt.

Ermitteln der Lage von Extrempunkten

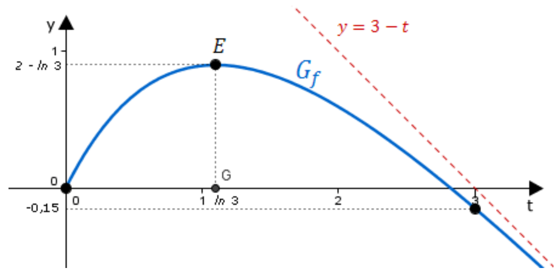
$y^E = f\left(t^E\right) = f(\ln 3) = 3\left(1 - e^{-\ln 3}\right) - \ln 3 = 3\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \ln 3 = 2 - \ln 3$

$\Rightarrow \quad E(\ln 3|2 - \ln 3) \quad$ Hochpunkt

Funktionswert berechnen

$f(3) = 3(1 - e^{-3}) - 3 \approx -0,15$

Skizze



Teilaufgabe 5b (3 BE)

Im Intervall $[2;3]$ besitzt f genau eine Nullstelle a. Führen Sie mit dem Startwert 3 den ersten Schritt des Newton-Verfahrens zur näherungsweisen Berechnung von a durch. Man erhält dadurch a auf zwei Dezimalen genau.
[Ergebnis: $a \approx 2,82$]

Lösung zu Teilaufgabe 5b

Newton-Verfahren

$f(t) = 3\left(1 - e^{-t}\right) - t$

$f'(t) = 3e^{-t} - 1$ (siehe Teilaufgabe 5a)

$t_0 = 3$ (Startwert)

$f(t_0) = f(3) \approx -0,15$ (siehe Teilaufgabe 5a)

$f'(t_0) = f'(3) = 3e^{-3} - 1 \approx -0,85$

Nullstelle a bestimmen:

Erläuterung: *Newtonsche Iterationsformel*

Newtonsche Iterationsformel zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für den ersten Schritt, mit Startwert x_0, gilt somit: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$a = t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{-0,15}{-0,85} \approx 2,82$$

Teilaufgabe 5c (5 BE)

Berechnen Sie mithilfe des Näherungswerts aus Teilaufgabe 5b den Inhalt des Flächenstücks, das G_f im I. Quadranten mit der t-Achse einschließt.

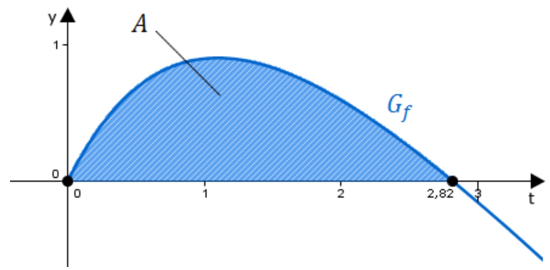
Lösung zu Teilaufgabe 5c

Flächenberechnung

$f(t) = 3\left(1 - e^{-t}\right) - t$

$a \approx 2,82$ Nullstelle von $f(t)$ (siehe Teilaufgabe 5b)

Nebenrechnung: $\displaystyle\int e^{-t}\,dt = -e^{-t}$ (siehe auch Merkhilfe)



> Erläuterung: *Bestimmtes Integral*
>
> Das bestimmte Integral $\int\limits_0^a f(t)dt$ ist gleich der Fläche A, die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen 0 und a einschließt.

Inhalt A bestimmen:

$$A = \int\limits_0^a f(t)dt$$

$$= \int\limits_0^a \left[3\left(1 - e^{-t}\right) - t\right]\ dt$$

$$= \int\limits_0^a \left(3 - 3e^{-t} - t\right)\ dt$$

> Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*
>
> Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:
>
> $$\int\limits_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$
>
> Hier ist $3t$ Stammfunktion von 3, $3e^{-t}$ Stammfunktion von $-3e^{-t}$ und $\frac{t^2}{2}$ Stammfunktion von t.

$$= \left[3t + 3e^{-t} - \frac{t^2}{2}\right]_0^a$$

$$= \left(3a + 3e^{-a} - \frac{a^2}{2}\right) - \left(3 \cdot 0 + 3e^{-0} - \frac{0^2}{2}\right)$$

$$= 3 \cdot 2{,}82 + 3e^{-2{,}82} - \frac{2{,}82^2}{2} - 3$$

$$\approx 1{,}7$$

Teilaufgabe 5d (5 BE)

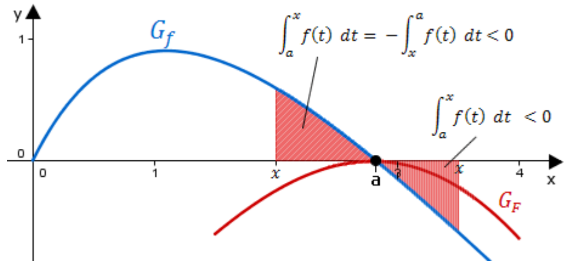
Betrachtet wird die Funktion $F : x \mapsto \int\limits_a^x f(t)dt$, $D_F = D_f$.

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von F in der Nähe des Punktes $N\ (a|f(a))$.
Begründen Sie Ihre Ausführungen.
Welche Bedeutung hat das Ergebnis der Teilaufgabe 5c für die Funktion F?

Lösung zu Teilaufgabe 5d

Eigenschaften der Integralfunktion

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \quad , D_F = D_f$$



$$F(a) = \int\limits_a^a f(t)dt = 0 \qquad \text{(da } a \text{ Integrationsanfang)}$$

$\Rightarrow \quad N\ (a|F(a))$ liegt auf der x-Achse

> Erläuterung: *Ableitung der Integralfunktion*
>
> Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Ableitung der Integralfunktion (hier F) gleich der Integrandenfunktion (hier f).

$F' = f \quad \Rightarrow \quad F'(a) = f(a) = 0 \quad$ (siehe Teilaufgabe b)

Erläuterung: *Vorzeichenwechsel*

Der Graph der Funktion f ist der Graph der ersten Ableitung der Funktion F. Man erkennt am Graphen, dass die Funktion f links von der Stelle a positive Funktionswerte hat, die x-Achse dann an der Stelle a schneidet und rechts davon negative Funktionswerte hat.

Es liegt somit ein Vorzeichenwechsel vor.

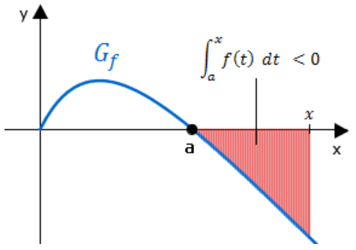
$F(x)$ hat an der Stelle $x = a$ ein Hochpunkt, da $F'(a) = 0$ und Vorzeichenwechsel von " +" nach " -" von f (siehe Skizze aus Teilaufgabe 5a bzw. oberes Bild)

Verlauf des Graphen:

Erläuterung: *Funktionswert der Integralfunktion*

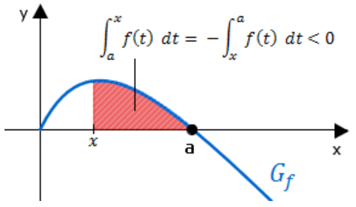
Die y-Werte der Integralfunktion F sind Flächenstücke, welche die Integrandenfunktion f mit der x-Achse einschließt.

Ist $x > a$, so ist $\int\limits_a^x f(t)dt$ gleich der Fläche die der Graph von $f(t)$ mit der x-Achse zwischen a und x einschließt . Da die Fläche unterhalb der x-Achse ist, ist der Wert negativ.



Ist nun $x < a$, so ist $\int\limits_a^x f(t)dt$ gleich der Fläche die der Graph von $f(t)$ mit der x-Achse zwischen x und a einschließt. Obwohl die Fläche oberhalb der x-Achse liegt, ist der Wert negativ, da die Integrationsgrenzen vertauscht sind (vom Wert her). Es gilt nämlich für $x < a$:

$$\int\limits_a^x f(t)dt = -\underbrace{\int\limits_x^a f(t)dt}_{>0} < 0$$



Der Graph von $F(x)$ verläuft in der Nähe des Punktes N unterhalb der x-Achse, berührt die x-Achse im Punkt N und hat an dieser Stelle einen Hochpunkt.

Erläuterung:

Ergebnis aus Teilaufgabe 5c: $\int_0^a f(t)dt \approx 1,7$

Durch Vertauschen der Integrationsgrenzen, folgt:

$$F(0) = \int_a^0 f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt \approx -1,7$$

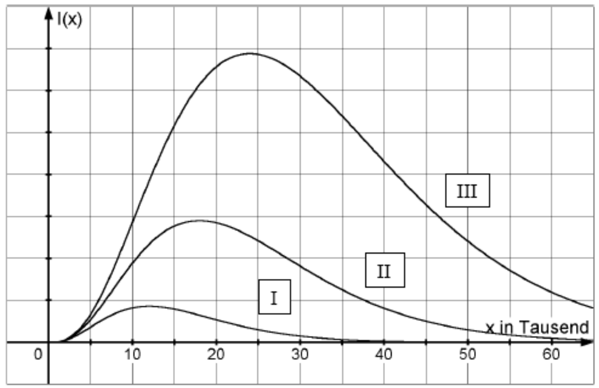
Bedeutung des Resultats aus Teilaufgabe 5c: $F(0) \approx -1,7$

Teilaufgabe 6a (3 BE)

Jeder Körper sendet elektromagnetische Strahlung unterschiedlicher Frequenzen aus. Die Intensität der Strahlung hängt von der Frequenz der Strahlung ab. Im Idealfall gilt nach Max Planck für diese Intensität bei einem Körper der Temperatur T:

$$I_T(x) = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1} \quad , \quad D_{I_T} = \mathbb{R}^+.$$

Dabei entspricht x bis auf eine Konstante der Frequenz der Strahlung und der Parameter T (Temperatur in Kelvin) ist positiv.
Die Graphik zeigt die zu drei Werten des Parameters T gehörenden Graphen von I_T.
Jede Scharfunktion I_T hat genau eine Maximalstelle x_{max}.



In den folgenden Teilaufgaben kann ohne Einheiten gerechnet werden.

Weisen Sie am Funktionsterm nach, dass $I_T(x)$ stets positiv ist.

Lösung zu Teilaufgabe 6a

Wertebereich bestimmen

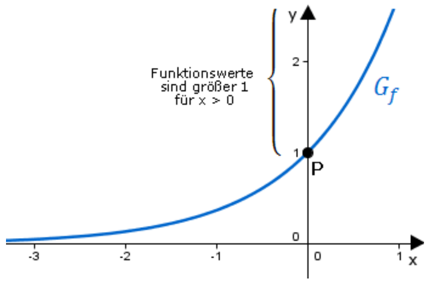
$$I_T(x) = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1} \quad , \quad D_{I_T} = \mathbb{R}^+ =]0;\infty[$$

Zählerfunktion: $x^3 > 0$ für alle $x \in D_{I_T}$.

$T > 0$ laut Angabe $\Rightarrow$ $\frac{x}{T} > 0$ für $x \in D_{I_T}$.

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*

Eine Exponentialfunktion vom Typ $e^{k\,x}$ mit $k > 0$ hat immer positive Funktionswerte, schneidet die x-Achse im Punkt $P(0,1)$ und ist streng monoton steigend. Das bedeutet, dass die Funktionswerte größer als 1 sind für $x > 0$.



Nennerfunktion: $e^{\frac{x}{T}} > 1$ für alle $x \in D_{I_T}$.

$\Rightarrow \quad e^{\frac{x}{T}} - 1 > 0$ für alle $x \in D_{I_T}$.

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Der Funktionsterm ist ein Bruch.

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

In diesem Fall sind sie beide stets positiv.

$$\Rightarrow \quad I_T(x) = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1} > 0 \text{ für alle } x \in D_{I_T}\,.$$

Teilaufgabe 6b (6 BE)

Weisen Sie nach, dass für die erste Ableitung der Funktion I_T gilt:

$$I_T'(x) = \frac{x^2\, e^{\frac{x}{T}} \left[3\left(1 - e^{-\frac{x}{T}}\right) - \frac{x}{T}\right]}{\left(e^{\frac{x}{T}} - 1\right)^2}$$

Vergleichen Sie diesen Term mit dem der Funktion f aus Aufgabe 5 und zeigen Sie, dass für die Maximalstelle x_{max} von I_T gilt: $\frac{x_{max}}{T} = a$, wobei a die positive Nullstelle von f ist.

Lösung zu Teilaufgabe 6b

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$$I_T(x) = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1} \quad , \quad D_{I_T} = \mathbb{R}^+ =]0;\infty[$$

Erste Ableitung bestimmen:

$$I_T'(x) = \left(\frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1}\right)'$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung, Kettenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = x^3$ *und* $v(x) = e^{\frac{x}{T}} - 1$.
Dann ist $u'(x) = 3x^2$ *und* $v'(x) = e^{\frac{x}{T}} \cdot \frac{1}{T}$

Bemerkung: für die Ableitung der Exponentialfunktion $v(x)$ wird die Kettenregel verwendet.

Kettenregel:

$$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$= \frac{3x^2 \cdot \left(e^{\frac{x}{T}} - 1\right) - x^3 \cdot e^{\frac{x}{T}} \cdot \frac{1}{T}}{\left(e^{\frac{x}{T}} - 1\right)^2} \quad | \quad \text{Klammern auflösen}$$

$$= \frac{3x^2\,e^{\frac{x}{T}} - 3x^2 - \frac{x^3}{T}\,e^{\frac{x}{T}}}{\left(e^{\frac{x}{T}}-1\right)^2} \qquad \Big| \quad \text{Term } 3x^2 \text{ mit } \frac{e^{\frac{x}{T}}}{e^{\frac{x}{T}}} \text{ erweitern}$$

$$= \frac{3x^2\,e^{\frac{x}{T}} - 3x^2\,\frac{e^{\frac{x}{T}}}{e^{\frac{x}{T}}} - \frac{x^3}{T}\,e^{\frac{x}{T}}}{\left(e^{\frac{x}{T}}-1\right)^2} \qquad \Big| \quad x^2\,e^{\frac{x}{T}} \text{ ausklammern}$$

$$= \frac{x^2\,e^{\frac{x}{T}}\cdot\left(3 - \frac{3}{e^{\frac{x}{T}}} - \frac{x}{T}\right)}{\left(e^{\frac{x}{T}}-1\right)^2} \qquad \Big| \quad 3 \text{ ausklammern und } \frac{1}{e^{\frac{x}{T}}} \text{ in } e^{-\frac{x}{T}} \text{ umschreiben}$$

$$= \frac{x^2\,e^{\frac{x}{T}}\left[3\left(1-e^{-\frac{x}{T}}\right) - \frac{x}{T}\right]}{\left(e^{\frac{x}{T}}-1\right)^2}$$

Ermitteln der Lage von Extrempunkten

$f(t) = 3\,\left(1-e^{-t}\right) - t \qquad$ (Funktion aus Teilaufgabe 5)

$$\Rightarrow \quad I'_T(x) = \frac{x^2\,e^{\frac{x}{T}}\left[3\left(1-e^{-\frac{x}{T}}\right) - \frac{x}{T}\right]}{\left(e^{\frac{x}{T}}-1\right)^2}$$

$$= \frac{x^2\,e^{\frac{x}{T}}}{\left(e^{\frac{x}{T}}-1\right)^2}\cdot\underbrace{\left[3\left(1-e^{-\frac{x}{T}}\right) - \frac{x}{T}\right]}_{f\left(\frac{x}{T}\right)}$$

$$= \frac{x^2\,e^{\frac{x}{T}}}{\left(e^{\frac{x}{T}}-1\right)^2}\cdot f(t) \qquad \text{mit } t = \frac{x}{T}$$

Erste Ableitung Null setzen:

$$I'_T(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overbrace{\frac{x^2\,e^{\frac{x}{T}}}{\left(e^{\frac{x}{T}}-1\right)^2}}^{>0}\cdot f(t) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(t) = 0$$

Nach Teilaufgabe 5b gilt: $f(a) = 0$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{x_{max}}{T}$$

Teilaufgabe 6c (5 BE)

Unsere Sonne liefert maximale Intensität für $x_{max} = 17\cdot 10^3$ (gelbgrüner Farbbereich). Welche Oberflächentemperatur ergibt sich hieraus für die Sonne?
Ordnen Sie die gezeichneten Graphen der Funktionsschar I_T den Temperaturen $T_1 = 4000$ Kelvin, $T_2 = 6000$ Kelvin und $T_3 = 8000$ Kelvin zu. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Teilaufgabe 6c

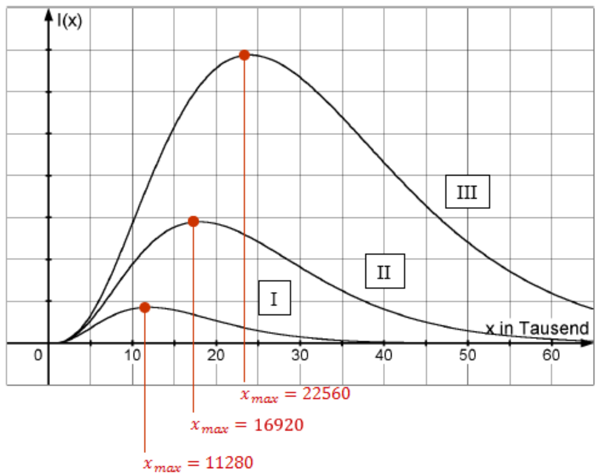
Parameterwerte ermitteln

$x_{max} = 17\cdot 10^3$

Nach Teilaufgabe 6b) gilt: $\quad \frac{x_{max}}{T} = a \quad$ mit $\quad a = 2,82$

$$\Rightarrow \quad T_{Sonne} = \frac{x_{max}}{a} = \frac{17\cdot 10^3}{2,82} \approx 6028 \text{ (Kelvin)}$$

Funktionsgraphen einer Funktionsschar zuordnen



$$\frac{x_{max}}{T} = a \quad \Rightarrow \quad x_{max} = 2,82\cdot T$$

$T_1: \quad x_{max} = 2,82\cdot T_1 = 2,82\cdot 4000 = 11280$
$\Rightarrow$ Graph I gehört zu T_1.

$T_2: \quad x_{max} = 2,82\cdot T_2 = 2,82\cdot 6000 = 16920$

$\Rightarrow$ Graph II gehört zu T_2.

T_3 : $x_{max} = 2,82 \cdot T_1 = 2,82 \cdot 8000 = 22560$
$\Rightarrow$ Graph III gehört zu T_3.

Teilaufgabe 6d (3 BE)

Ein Körper der Temperatur T liefert für x_{max} die Intensität $I_T\ (x_{max})$. Begründen Sie, dass sich $I_T\ (x_{max})$ verachtfacht, wenn ein Körper mit doppelt so hoher Temperatur betrachtet wird.

Lösung zu Teilaufgabe 6d

Funktionswert berechnen

$$I_T(x) = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1}$$

Aus Teilaufgabe 6b folgt: $x_{max} = a \cdot T$ mit $a = 2,82$

$$\Rightarrow \quad I_T(x_{max}) = I_T(a\,T) = \frac{(a\,T)^3}{e^{\frac{a\,T}{T}} - 1} = \frac{a^3\,T^3}{e^a - 1}$$

Bei doppelter Temperatur $T_1 = 2T$ gilt dann für $I_{T_1}(x_{max})$:

$$I_{T_1}(x_{max}) = I_{2T}(x_{max}) = \frac{a^3(2T)^3}{e^a - 1} = 8 \cdot \frac{a^3\,T^3}{e^a - 1}$$

$\Rightarrow$ Bei doppelter Temperatur verachtfacht sich der Wert der Intensität I an der Stelle x_{max}.