Abitur 2011 G8 Musterabitur Mathematik Infinitesimalrechnung I

Teilaufgabe 1 (3 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f : x \mapsto (e^x - 2) \cdot \left(x^3 - 2x\right)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2 (6 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x-2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f.
Geben Sie D_f an und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 1$.

Teilaufgabe 3 (3 BE)

Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f an, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- Der Graph von f berührt an der Stelle $x = 1$ die x-Achse.
- f hat $x = 3$ als Polstelle.

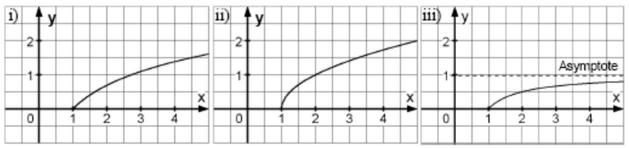
Teilaufgabe 4 (3 BE)

Bestimmen Sie den Term einer Stammfunktion der Funktion $f : x \mapsto \ln(2x)$, $D_f = \mathbb{R}^+$.

Teilaufgabe 5 (5 BE)

Für $x \geq 1$ sind die Funktionen mit den folgenden Termen gegeben:
$f(x) = \sqrt{x-a}$, $\quad g(x) = \ln x$, $\quad h(x) = -\dfrac{1}{x} + b \quad$ mit $a, b \in \mathbb{N}$

Ordnen Sie die Funktionen den nachfolgenden Graphen zu und bestimmen Sie die Parameter a und b. Erklären Sie Ihr Vorgehen.



Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 6a (2 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f in ein Koordinatensystem.

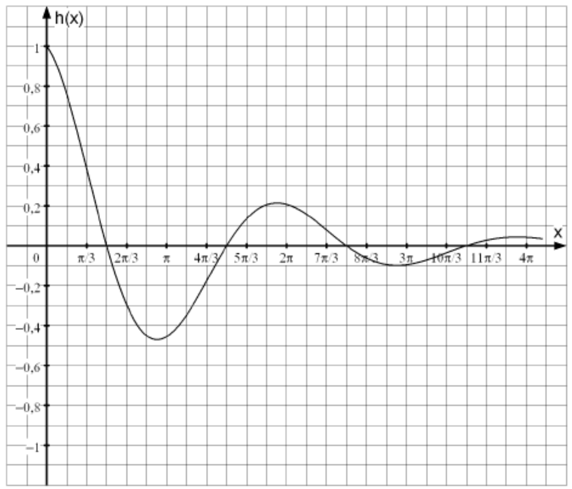
Teilaufgabe 6b (6 BE)

Dem Flächenstück, das G_f mit der x-Achse einschließt, werden Rechtecke so einbeschrieben, dass jeweils eine Rechteckseite auf der x-Achse liegt. Berechnen Sie den größtmöglichen Flächeninhalt A eines solchen Rechtecks.
[Ergebnis: $A = \dfrac{16}{9}\sqrt{3}$]

Teilaufgabe 6c (5 BE)

Berechnen Sie, wie viel Prozent des Flächenstücks, das G_f mit der x-Achse einschließt, vom Rechteck maximalen Flächeninhalts aus Teilaufgabe 6b bedeckt werden.

Gegeben sind die Funktionen $g : x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x}$, $D_g = \mathbb{R}$, und $h : x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x$, $D_h = \mathbb{R}$. Der Graph von h ist für $x \geq 0$ im nachfolgenden Diagramm dargestellt.



Teilaufgabe 7a (8 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von g und geben Sie das Verhalten von g für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.
Berechnen Sie die Funktionswerte $g(0)$, $g(\pi)$, $g(2\pi)$, $g(3\pi)$, und $g(4\pi)$ und zeichnen Sie damit die Graphen von g und von $-g$ in obiges Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe 7b (3 BE)

Die Funktion h entsteht aus der Kosinusfunktion $x \mapsto \cos x$, $D = \mathbb{R}$, durch Multiplikation mit der Funktion g. Beschreiben Sie, inwiefern sich der Graph von h aufgrund dieser Multiplikation vom Graph der Kosinusfunktion unterscheidet. Gehen Sie dabei auch auf die Nullstellen von h und die Funktionswerte $h(n\,\pi)$, $n \in \mathbb{N}$ ein.

Teilaufgabe 7c (6 BE)

Berechnen Sie den Term $h'(x)$ der ersten Ableitung von h und weisen Sie nach, dass für Extremstellen von h gilt: $\tan x = -0,25$. Zeigen Sie damit, dass die Extremstellen von h gegenüber den Extremstellen der Kosinusfunktion verschoben sind.

Teilaufgabe 7d (4 BE)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen I und II wahr oder falsch sind, und machen Sie Ihre Antworten plausibel:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$

Teilaufgabe 7e (3 BE)

Die Funktion $H : x \mapsto \dfrac{16}{17} e^{-\frac{1}{4}x} \left(\sin x - \dfrac{1}{4} \cos x \right)$, $D_H = \mathbb{R}$, ist Stammfunktion von h.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass $\displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)\,dx$ positiv ist, und deuten Sie diesen Zusammenhang am Graph von h.

Teilaufgabe 7f (3 BE)

Es gibt Werte $a > 0$, für die $\displaystyle\int_0^{a} h(x)\,dx$ negativ ist. Geben Sie einen solchen Wert an und begründen Sie Ihre Wahl ohne Rechnung.

Lösung

Teilaufgabe 1 (3 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f : x \mapsto (e^x - 2) \cdot \left(x^3 - 2x\right)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

Lösung zu Teilaufgabe 1

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = (e^x - 2) \cdot \left(x^3 - 2x\right)$

$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (e^x - 2) \cdot \left(x^3 - 2x\right) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Das Produkt zweier Terme a und b ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Terme Null ist:

$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{und/oder} \quad b = 0$

$e^x - 2 = 0$

$e^x = 2 \quad | \quad \text{logarithmieren}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Der Logarithmus wird auf beiden Seiten der Gleichung $e^x = 2$ angewendet.

$\ln e^x = \ln 2$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt:

$\ln e^{f(x)} = f(x) \quad$ für beliebige Funktion $f(x)$

Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$x = \ln 2$

$\ln\,(e^x) = \ln 2$

$\Rightarrow x_1^N = \ln 2$

2.Funktionsterm Null setzen:

$x^3 - 2x = 0$

$x \cdot (x^2 - 2) = 0$

$\Rightarrow x_2^N = 0$

$x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 2$

$\Rightarrow x_{3,4}^N = \pm\sqrt{2}$

Die gesuchten Nullstellen sind: $x_1^N = \ln 2\,,\ x_2^N = 0\,,\ x_3^N = -\sqrt{2}$ und $x_4^N = \sqrt{2}$

Teilaufgabe 2 (6 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x-2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f.
Geben Sie D_f an und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 1$.

Lösung zu Teilaufgabe 2

Definitionsbereich bestimmen

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x-2}$

Definitionsbereich der Zählerfunktion: $\mathbb{R}^+$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion $\ln x$ ist nur für postive x-Werte definiert.
Ihr Definitionsbereich ist $D_f = \mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$.

Nullstelle der Nennerfunktion bestimmen:

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{2\}$

Tangentengleichung ermitteln

Erste Ableitung bilden:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-2}\right)'$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = \ln x$ und $v(x) = x - 2$.
Dann ist $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v'(x) = 1$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cdot(x-2) - \ln x \cdot 1}{(x-2)^2}$$

Gleichung der Tangente $t(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ bestimmen:

$x_0 = 1$

$$f\,(x_0) = f(1) = \frac{\overbrace{\ln 1}^{0}}{1-2} = 0$$

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{\frac{1}{1} \cdot (1-2) - \ln 1 \cdot 1}{(1-2)^2} = -1$$

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$ (Formel)

$= (x-1) \cdot (-1) + 0$

$\Rightarrow t(x) = -x + 1$

Alternative Lösung

Steigung m der Tangente an der Stelle $x_0 = 1$ ermitteln:

> Erläuterung: *Tangentensteigung*
>
> Die Steigung m der Tangente an dem Graphen G_f einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $T(x_0|y_0)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.
>
> $m = f'(x_0)$

$m = f'(1)$

$$m = \frac{\frac{1}{1} \cdot (1-2) - \overbrace{\ln 1}^{0} \cdot 1}{(1-2)^2} = -1$$

Konstanten Term t der Tangentengleichung ermitteln:

> Erläuterung: *Konstanter Term*
>
> Die allgemeine Geradengleichung lautet: $y = m \cdot x + t$
>
> Um den konstanten Term t zu bestimmen, setzt man in die Geradengleichung die Koordinaten eines (der Geraden zugehörigen) Punktes $T(x_0|y_0)$ und löst die Gleichung nach t auf
>
> In diesem Fall soll die Tangente an der Stelle $x_0 = 1$ bestimmt werden. Die Tangente verläuft somit im Punkt $(1|f(1))$.

$$f(1) = \frac{\ln 1}{1-2} = 0$$

$y = m \cdot x + t$

$0 = -1 \cdot 1 + t$

$t = 1$

$\Rightarrow$ Tangente im Punkt $(1|0)$: $y = -x + 1$

Teilaufgabe 3 (3 BE)

Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f an, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- Der Graph von f berührt an der Stelle $x = 1$ die x-Achse.
- f hat $x = 3$ als Polstelle.

Lösung zu Teilaufgabe 3

Funktionsgleichung ermitteln

Beispiel einer Vorgehensweise:

Schritt 1:

$$f(x) = \frac{...}{x-3}$$

$\rightarrow$ Die Funktion hat an der Stelle $x = 3$ eine Polstelle.

Schritt 2:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{...}$$

$\rightarrow$ Die Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine doppelte Nullstelle.
$\rightarrow$ Der Graph der Funktion berührt somit die x-Achse nur.

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-3}$$

Teilaufgabe 4 (3 BE)

Bestimmen Sie den Term einer Stammfunktion der Funktion $f : x \mapsto \ln(2x),\ D_f = \mathbb{R}^+$.

Lösung zu Teilaufgabe 4

Stammfunktion bestimmen

$f(x) = \ln(2x),\ D_f = \mathbb{R}$

Funktionsterm umformen:

Erläuterung: *Logarithmus eines Produkts*

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$f(x) = \ln 2 + \ln x$

Unbestimmtes Integral bestimmen:

$$\int f(x) d\,x = \int (\ln 2 + \ln x)\ \ d\,x$$

Erläuterung: *Integral einer Summe*

$$\int [g(x) + h(x)]\ \ d\,x = \int g(x) d\,x + \int h(x) d\,x$$

$$= \int \ln 2\, d\,x + \int \ln x\, d\,x$$

Erläuterung: *Stammfunktion der Logarithmusfunktion*

Aus der Merkhilfe für das G8 Abitur (Seite 3):

$$\int \ln\, d\,x = -x + x \ln x + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$= \ln 2 \cdot x - x + x \ln x + C$$

$$= -x + x(\ln 2 + \ln x) + C$$

Erläuterung: *Logarithmus eines Produkts*

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$$= -x + x \ln(2x) + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Die Aufgabenstellung verlangt die Angabe des Terms einer Stammfunktion. Man wählt also für C einen beliebigen Wert aus (wie z.B. $C = 0$).

$\Rightarrow \quad F(x) = -x + x \ln(2x)$ ist z.B. eine Stammfunktion von f.

Alternative Lösung

Aus der Merkhilfe für das G8 Abitur (Seite 3) folgt:

$$\int f(a\,x + b) d\,x = \frac{1}{a} F(a\,x + b) + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ und } F \text{ Stammfunktion von } f.$$

Mit $a = 2\,,\ b = 0$ und $F(x) = -x + x \ln x$:

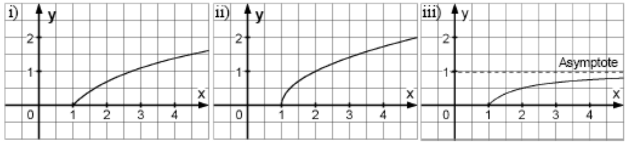
$$\int \ln(2x) d\,x = \frac{1}{2}\ [-(2x) + (2x)\ln(2x)] + C$$

$$= -x + x \ln(2x) + C$$

Teilaufgabe 5 (5 BE)

Für $x \geq 1$ sind die Funktionen mit den folgenden Termen gegeben:
$f(x) = \sqrt{x-a}\,, \quad g(x) = \ln x\,, \quad h(x) = -\frac{1}{x} + b \quad$ mit $a, b \in \mathbb{N}$

Ordnen Sie die Funktionen den nachfolgenden Graphen zu und bestimmen Sie die Parameter a und b. Erklären Sie Ihr Vorgehen.



Lösung zu Teilaufgabe 5

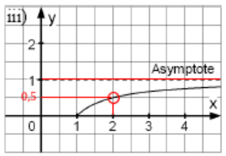
Funktionsgraphen zuordnen

i) entspricht dem Graphen der Funktion $g(x) = \ln x$

ii) entspricht dem Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x-a}$ mit $a = 1$.

iii) entspricht dem Graphen der Funktion $h(x) = -\frac{1}{x} + b$ mit $b = 1$

Erläuterung:



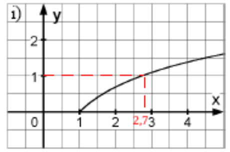
$h(x)$ gehört zu iii), da der Graph von $h(x)$ als einziger eine waagerechte Asymptote besitzt.

Aus dem Graphen iii) ließt man ab: $h(2) = 0,5$

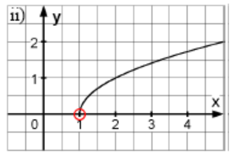
$h(2) = -\frac{1}{2} + b = -0,5 + b$

$-0,5 + b = 0,5$

$\Rightarrow b = 1$



$g(x)$ gehört zu i), da $\ln(2,7) = 1$. Bekanntlich gilt: $\ln(e) = 1$ mit $e \approx 2,7$.



Nach dem Ausschlussprinzip, gehört $f(x)$ zu ii).

Aus dem Graphen ii) ließ man ab: $\quad f(1) = 0$

$f(1) = \sqrt{1-a}$

$\sqrt{1-a} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

Teilaufgabe 6a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

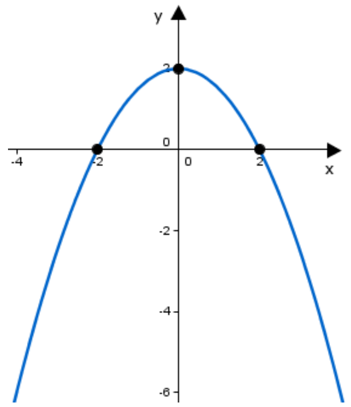
Zeichnen Sie den Graphen G_f in ein Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe 6a

Skizze

Wertetabelle:

x	0	±0,5	±1	±1,5	±2	±2,5	±3	±3,5	±4
$f(x)$	2	1,875	1,5	0,875	0	−1,125	−2,5	−4,125	−6

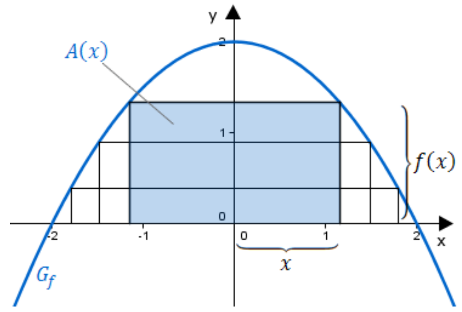


Teilaufgabe 6b (6 BE)

Dem Flächenstück, das G_f mit der x-Achse einschließt, werden Rechtecke so einbeschrieben, dass jeweils eine Rechteckseite auf der x-Achse liegt. Berechnen Sie den größtmöglichen Flächeninhalt A eines solchen Rechtecks.
[Ergebnis: $A = \frac{16}{9}\sqrt{3}$]

Lösung zu Teilaufgabe 6b

Extremwertaufgabe



Flächeninhalt A des Rechtecks:

Erläuterung: *Einbeschriebenes Rechteck*

Für $0 < x < 2$ ist die Länge des einbeschriebenen Rechtecks gleich $2x$ und die Höhe gleich $f(x)$.

$$A(x) = 2x \cdot f(x) = 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) = -x^3 + 4x \qquad \text{mit } \ 0 < x < 2$$

Erste Ableitung bilden:

$$A'(x) = -3x^2 + 4$$

Erste Ableitung Null setzen:

$A'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x^2 + 4 = 0$

$x^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

Zweite Ableitung bilden:

$A''(x) = -6x$

Prüfen ob es sich bei $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ um ein Maximum handelt:

$A''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{12}{\sqrt{3}} < 0$

$\Rightarrow$ An der Stelle $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ hat die Funktion $A(x)$ ein Maximum.

Größtmögliche Fläche eines Rechtecks bestimmen:

$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \approx 3,08$

$\Rightarrow$ Das größtmögliche Rechteck hat einen Flächeninhalt von ca. $3,08$ FE (Flächeneinheit)

Teilaufgabe 6c (5 BE)

Berechnen Sie, wie viel Prozent des Flächenstücks, das G_f mit der x-Achse einschließt, vom Rechteck maximalen Flächeninhalts aus Teilaufgabe 6b bedeckt werden.

Lösung zu Teilaufgabe 6c

Bestimmtes Integral

$A_{Rechteck} = \frac{16}{9}\sqrt{3} \qquad$ (siehe Teilaufgabe 1b)

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

Fläche, die der Graph G_f mit der x-Achse einschließt, bestimmen:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A_{G_f} = \int_{-2}^{2} f(x)d\,x$$

Da $f(x)$ die x-Achse an den Stellen $x = 2$ und $x = -2$ schneidet, bilden diese auch die Integrationsgrenzen.

$$A_{G_f} = \int_{-2}^{2} f(x)d\,x$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right)\,d\,x$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

In diesem Fall ist $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x$ Stammfunktion von $-\frac{1}{2}x^2 + 2$.

$$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{6} + 4\right) - \left(\frac{8}{6} - 4\right)$$

$$= \frac{16}{3}$$

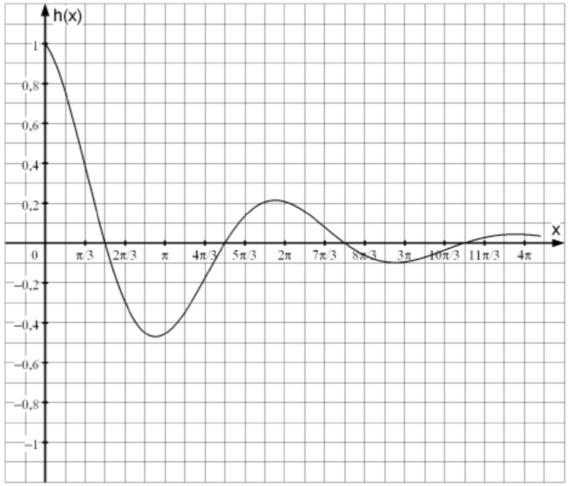
Verhältnis der Flächeninhalte bestimmen:

$\frac{A_{Rechteck}}{A_{G_f}} = \frac{16}{9}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{16} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$

$\Rightarrow$ Das Rechteck mit maximalem Inhalt bedeckt ca. 58% der Fläche, die der Graph G_f mit der x-Achse einschließt.

Teilaufgabe 7a (8 BE)

Gegeben sind die Funktionen $g : x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x}$, $D_g = \mathbb{R}$, und $h : x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x$, $D_h = \mathbb{R}$.
Der Graph von h ist für $x \geq 0$ im nachfolgenden Diagramm dargestellt.



Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von g und geben Sie das Verhalten von g für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.
Berechnen Sie die Funktionswerte $g(0)$, $g(\pi)$, $g(2\pi)$, $g(3\pi)$, und $g(4\pi)$ und zeichnen Sie damit die Graphen von g und von $-g$ in obiges Koordinatensystem ein.

Lösung zu Teilaufgabe 7a

Monotonieverhalten einer Funktion

$g(x) = e^{-\frac{1}{4}x}$, $D_g = \mathbb{R}$

Erste Ableitung bilden:

$$g'(x) = \left(e^{-\frac{1}{4}x}\right)'$$

$$= e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

Prüfen für welche Werte die erste Ableitung positiv bzw. negativ ist:

$$g'(x) = -\frac{1}{4}\underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_{>0} < 0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

$f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

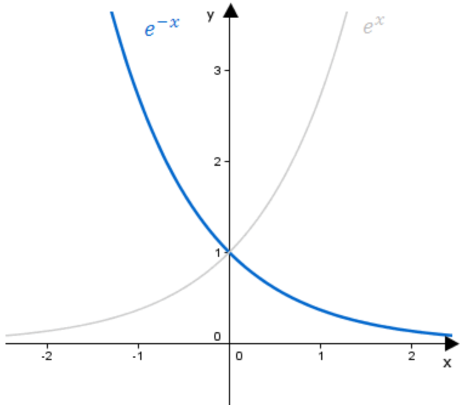
$\Rightarrow$ g ist streng monoton fallend für alle x aus D_f .

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

Grenzwerte bestimmen:

Erläuterung: *Exponentialfunktion*

Graphen der Funktionen e^{-x} und e^x:



$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{4}x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{4}x} = +\infty$$

Funktionswert berechnen

$g(0) = e^{-\frac{1}{4}\cdot 0} = 1$

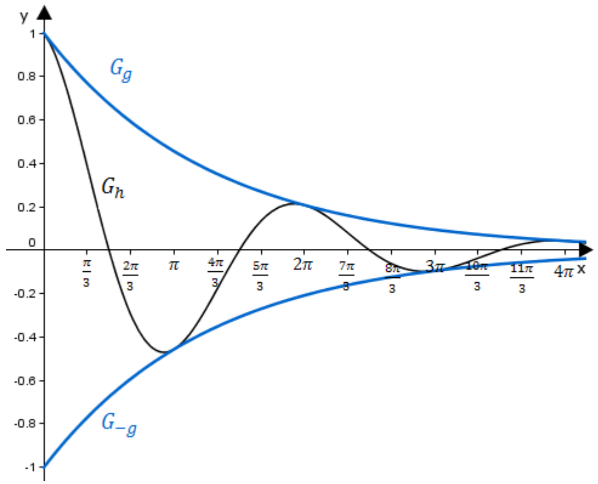
$g(\pi) = e^{-\frac{1}{4}\cdot \pi} \approx 0,45$

$g(2\pi) = e^{-\frac{1}{4}\cdot 2\pi} \approx 0,21$

$g(3\pi) = e^{-\frac{1}{4}\cdot 3\pi} \approx 0,09$

$g(4\pi) = e^{-\frac{1}{4}\cdot 4\pi} \approx 0,043$

Skizze

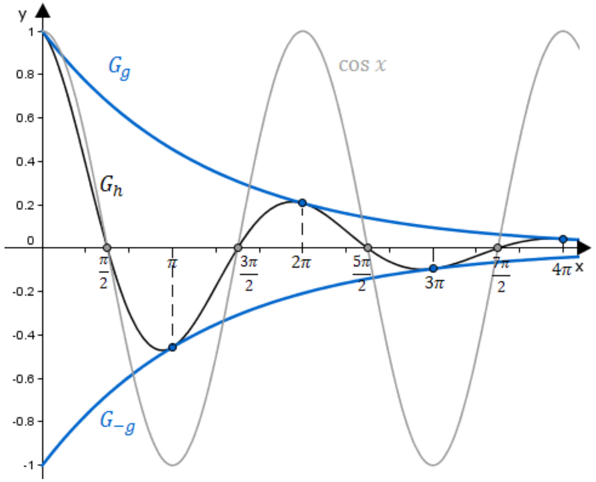


Teilaufgabe 7b (3 BE)

Die Funktion h entsteht aus der Kosinusfunktion $x \mapsto \cos x$, $D = \mathbb{R}$, durch Multiplikation mit der Funktion g. Beschreiben Sie, inwiefern sich der Graph von h aufgrund dieser Multiplikation vom Graph der Kosinusfunktion unterscheidet. Gehen Sie dabei auch auf die Nullstellen von h und die Funktionswerte $h(n\,\pi)$, $n \in \mathbb{N}$ ein.

Lösung zu Teilaufgabe 7b

Erläuterungen zum Entstehen der Funktionsgraphen



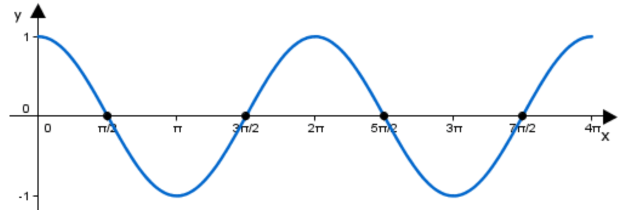
$g(x) = e^{-\frac{1}{4}x}\,,\ D_g = \mathbb{R}$

$h(x) = e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x\,,\ D_h = \mathbb{R}$

Der Faktor $e^{-\frac{1}{4}x}$ verändert die Amplitude der Kosinusfunktion, so dass der Graph von h zwischen den Graphen von g und $-g$ verläuft.

Erläuterung: *Nullstellen der Kosinusfunktion*

Graph der Kosinusfunktion $\cos x$ zwischen 0 und 4π:



Die Nullstellen der Kosinusfunktion, sprich die Schnittpunkte der Funktion mit der x-Achse, wiederholen sich periodisch.

Nullstellen: $x_0 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

Die Nullstellen von h sind die gleichen wie bei der Kosinusfunktion, die Funktionswerte an den Stellen $n\,\pi$ liegen auf dem Graphen der Funktionen g und $-g$.

Teilaufgabe 7c (6 BE)

Berechnen Sie den Term $h'(x)$ der ersten Ableitung von h und weisen Sie nach, dass für Extremstellen von h gilt: $\tan x = -0{,}25$. Zeigen Sie damit, dass die Extremstellen von h gegenüber den Extremstellen der Kosinusfunktion verschoben sind.

Lösung zu Teilaufgabe 7c

Erste Ableitung einer Funktion ermittlen

$h(x) = e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x\,,\ D_h = \mathbb{R}$

Erste Ableitung bilden:

$h'(x) = \left(e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x\right)'$

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

In diesem Fall ist:

$f(x) = e^{-\frac{1}{4}x}$ und $g(x) = \cos x$

Somit ist:

$f'(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$ und $g'(x) = -s\,i\,n\,x$

Bei der Ableitung von $e^{-\frac{1}{4}x}$ wendet man die Kettenregel an:

$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$= -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x + e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (-s\,i\,n\,x)$

$= -e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(\frac{1}{4}\cos x + \sin x\right)$

Ermitteln der Art von Extrempunkten

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$h'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(\frac{1}{4}\cos x + \sin x\right) = 0$

$\frac{1}{4}\cos x + \sin x = 0$

Erläuterung: *Nullstellen der Kosinusfunktion*

Um die Gleichung durch $\cos x$ teilen zu können, müssen all die x-Werte ausgeschlossen werden, für die die Kosinusfunktion Null ist, denn Teilen durch Null ist nicht zulässig.
Man schließt also die Nullstellen der Kosinusfunktion aus.

Die Nullstellen der Kosinusfunktion, sprich die Schnittpunkte der Funktion mit der x-Achse, wiederholen sich periodisch.

Nullstellen: $x_0 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

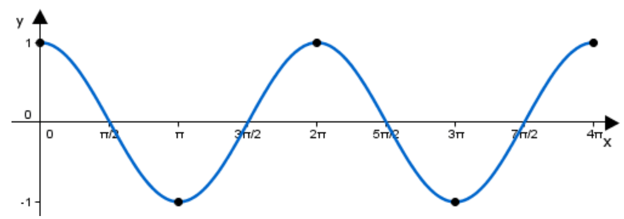
$\sin x = -\frac{1}{4}\cos x \quad | : \cos x \quad$ mit $x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

$\underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{\tan x} = -0,25$

$\Rightarrow$ An Extremstellen von h gilt: $\tan x = -0,25$

Erläuterung: *Extremstellen der Kosinusfunktion*

Graph der Kosinusfunktion $\cos x$ zwischen 0 und 4π:



Die Extremstellen der Kosinusfunktion, sprich die Stellen an denen die Funktion eine waagerechte Tangente besitzt, wiederholen sich periodisch.

Extremstellen: $x^E = k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

Extremstellen der Kosinusfunktion: $x = k\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ An Extremstellen der Kosinusfunktion gilt: $\tan x = 0$

$\Rightarrow$ Die Extremstellen sind verschoben.

Teilaufgabe 7d (4 BE)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen I und II wahr oder falsch sind, und machen Sie Ihre Antworten plausibel:

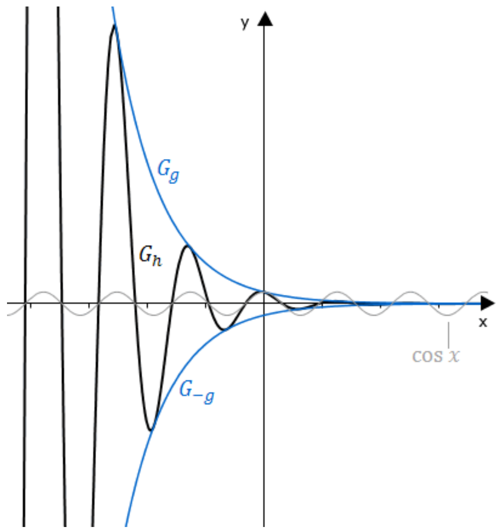
1. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

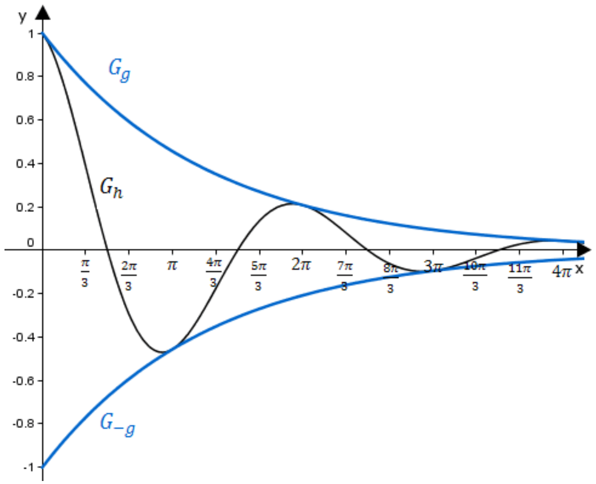
Lösung zu Teilaufgabe 7d

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

Aussage I ist falsch. Der Grenzwert für $x \to -\infty$ existiert nicht, da die Exponentialfunktion gegen Unendlich verläuft, jedoch die Kosinusfunktion Werte zwischen -1 und 1 annimmt. ß



Aussage II ist richtig. Der Graph G_h nähert sich für $x \to \infty$ an die x-Achse, da die Graphen G_g und G_{-g}, die G_h einschließen (siehe Teilaufgabe 7a), sich ebenso verhalten.



Teilaufgabe 7e (3 BE)

Die Funktion $H: x \mapsto \frac{16}{17}e^{-\frac{1}{4}x}\left(\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right)$, $D_H = \mathbb{R}$, ist Stammfunktion von h.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass $\int\limits_0^{2\pi} h(x)\,dx$ positiv ist, und deuten Sie diesen Zusammenhang am Graph von h.

Lösung zu Teilaufgabe 7e

Bestimmtes Integral

$$H: x \mapsto \frac{16}{17}e^{-\frac{1}{4}x}\left(\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right),\ D_H = \mathbb{R}$$

Integral bestimmen:

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int\limits_0^{2\pi} h(x)\,dx = [H(x)]_0^{2\pi}$$

$$= H(2\pi) - H(0)$$

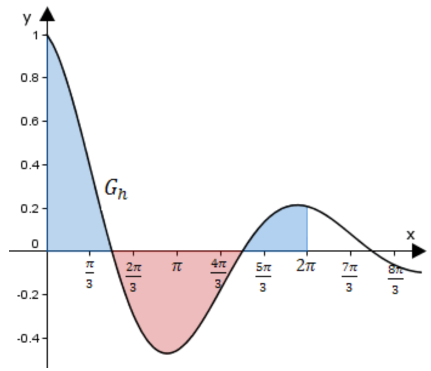
$$= \left[\frac{16}{17}e^{-\frac{1}{4}\cdot 2\pi}\left(\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} - \frac{1}{4}\underbrace{\cos(2\pi)}_{1}\right)\right] - \left[\frac{16}{17}e^{-\frac{1}{4}\cdot 0}\left(\underbrace{\sin(0)}_{0} - \frac{1}{4}\underbrace{\cos(0)}_{1}\right)\right]$$

$$= -\frac{4}{17}e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{17}$$

$$\approx 0,19$$

$$> 0$$

Integral deuten:



Zwischen 0 und 2π schließt der Graph G_h mit der x-Achse 3 Flächenstücke ein.

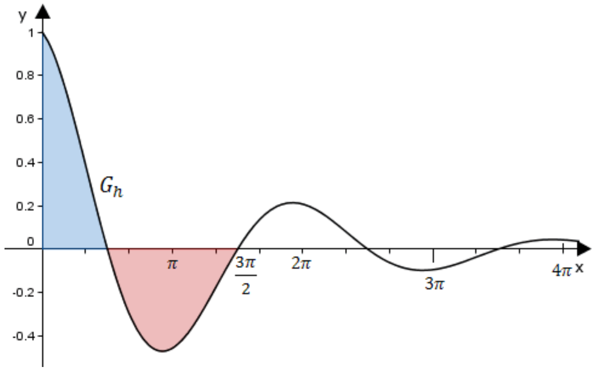
$\int\limits_0^{2\pi} h(x)d\,x > 0$ bedeutet, dass die beiden Flächenstücke die oberhalb der x-Achse liegen, größeren Inhalt haben als das Flächenstück unterhalb.

Teilaufgabe 7f (3 BE)

Es gibt Werte $a > 0$, für die $\int\limits_0^{a} h(x)d\,x$ negativ ist. Geben Sie einen solchen Wert an und begründen Sie Ihre Wahl ohne Rechnung.

Lösung zu Teilaufgabe 7f

Bestimmtes Integral



$$\int\limits_0^{a} h(x)d\,x < 0 \qquad \text{für} \qquad a = \frac{3}{2}\pi$$

Begründung:

Bis zum Wert $a = \frac{3}{2}\pi$ besteht das Integral aus der Summe einer positiven und einer negativen Fläche. Ab diesen Wert käme wieder eine positive Fläche hinzu, die jedoch offensichtlich

größer ist als die nachfolgende (ab dem Wert $\frac{5}{2}$) negative Fläche. Selbiges gilt für die weiteren Flächen nach dem Wert $\frac{7}{2}\pi$.