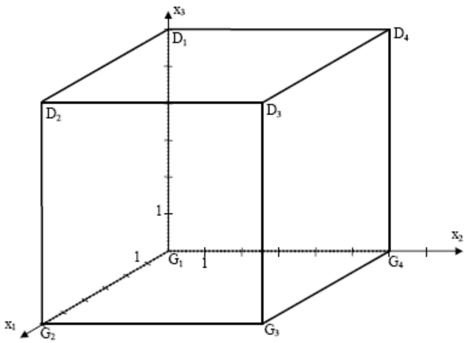
Abitur 2011 G8 Musterabitur Mathematik Geometrie VI

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Würfel W der Kantenlänge 6 gegeben. Die Eckpunkte $G_1(0|0|0)$ und $D_3(6|6|6)$ legen eine Raumdiagonale fest.



Teilaufgabe 1a (5 BE)

Bestimmen Sie in Koordinatenform eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte D_1, G_2 und D_3 verläuft, und zeichnen Sie die Schnittfigur der Ebene E mit dem Würfel W ein.
[mögliches Ergebnis: $E: x_1 - x_2 + x_3 = 6$]

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die E vom Würfel W abschneidet.
Wieviel Prozent des Würfelvolumens nimmt die Pyramide ein?

Teilaufgabe 1c (4 BE)

Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene E gegen die Grundfläche $G_1 G_2 G_3 G_4$.
Geben Sie drei Eckpunkte des Würfels W an, die eine Ebene so festlegen, dass sie mit der Grundfläche einen $45°$-Winkel einschließt.

Teilaufgabe 1d (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Ebene F mit der Gleichung $F: x_1 - x_2 + x_3 = 3$ parallel zu E mit Abstand $\sqrt{3}$ ist.

Teilaufgabe 1e (10 BE)

Die Ebene F schneidet den Würfel W in einem regulären Sechseck.
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene F mit der x_1- und der x_3-Koordinatenachse und bestätigen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke $[G_2 G_3]$ auf F liegt.
Zeichnen Sie alle sechs Schnittpunkte der Ebene F mit Kanten des Würfels sowie den Rand der sechseckigen Schnittfigur ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des betrachteten Sechsecks.

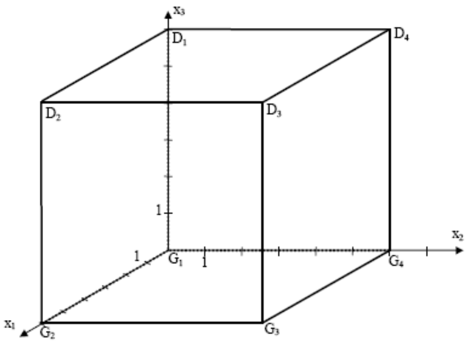
Teilaufgabe 1f (4 BE)

Alle Ebenen parallel zu F werden durch Gleichungen der Form $x_1 - x_2 + x_3 = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben.
Geben Sie an, welche Arten von Figuren als Schnitt einer solchen Ebene mit dem Würfel W auftreten. Geben Sie die Menge aller Werte von a an, für die die Schnittfigur ein Sechseck ist.

Lösung

Teilaufgabe 1a (5 BE)

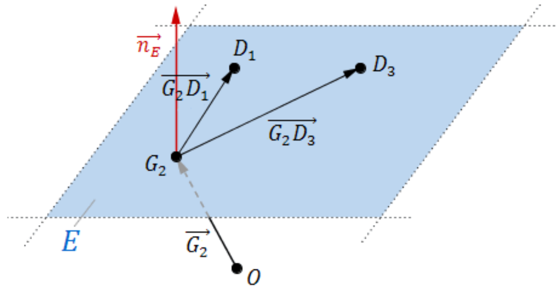
In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Würfel W der Kantenlänge 6 gegeben. Die Eckpunkte $G_1(0|0|0)$ und $D_3(6|6|6)$ legen eine Raumdiagonale fest.



Bestimmen Sie in Koordinatenform eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte D_1, G_2 und D_3 verläuft, und zeichnen Sie die Schnittfigur der Ebene E mit dem Würfel W ein.
[mögliches Ergebnis: $E: x_1 - x_2 + x_3 = 6$]

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Ebene aus drei Punkte



$D_1(0|0|6),\ G_2(6|0|0),\ D_3(6|6|6)$

Richtungsvektoren der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{G_2D_1} = \overrightarrow{D_1} - \overrightarrow{G_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{G_2D_3} = \overrightarrow{D_3} - \overrightarrow{G_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

G_2 sei der Aufpunkt der Ebene.

Ebenengleichung in Normalenform

(hier auch Koordinatenform genannt)

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E aus den beiden Richtungsvektoren bestimmen:

$$\overrightarrow{G_2D_1} \times \overrightarrow{G_2D_3} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \cdot 6 - 0 \cdot 0 \\ 6 \cdot 0 - (-6) \cdot 6 \\ 0 \cdot 6 - 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -36 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor vereinfachen:

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch -36 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\overrightarrow{n_E} = -\frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} -36 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenform E^N der Ebene E:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{n_E} = 0$$

Hier:

$$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

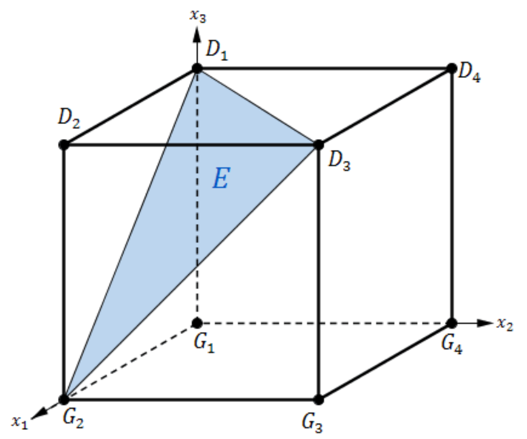
Kann auch geschrieben werden:

$$\overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E^N : \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E^N : x_1 - x_2 + x_3 = 6$$

Skizze

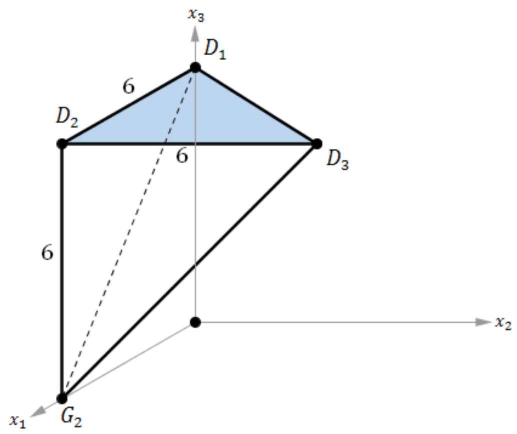


Teilaufgabe 1b (4 BE)

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die E vom Würfel W abschneidet.
Wieviel Prozent des Würfelvolumens nimmt die Pyramide ein?

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Volumen einer Pyramide



$D_1(0|0|0)$, $D_2(6|0|6)$, $D_3(6|6|6)$, $G_2(6|0|0)$

$\triangle D_1\,D_2\,D_3$ ist die Grundfläche G der Pyramide

$[G_2\,D_2] = 6$ ist die Höhe h der Pyramide

Volumen der Pyramide bestimmen:

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36$$

Verhältnis der Rauminhalte von Teilkörpern

Volumen des Würfels W:

$$V_W = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

Verhältnis der Volumnia:

$$\frac{V_{Pyr}}{V_W} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} \approx 0,17$$

$\Rightarrow$ Die Pyramide nimmt ca. 17% des Würfelvolumens ein

Teilaufgabe 1c (4 BE)

Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene E gegen die Grundfläche $G_1\,G_2\,G_3\,G_4$.
Geben Sie drei Eckpunkte des Würfels W an, die eine Ebene so festlegen, dass sie mit der Grundfläche einen $45°$-Winkel einschließt.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Winkel zwischen zwei Ebenen

$E : x_1 - x_2 + x_3 = 6$

Grundfläche $G_1\,G_2\,G_3\,G_4$ liegt in der $x_1\,x_2$-Ebene $G : x_3 = 0$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der Ebene E.

$\overrightarrow{n_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der Ebene G.

Länge der Normalenvektoren bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

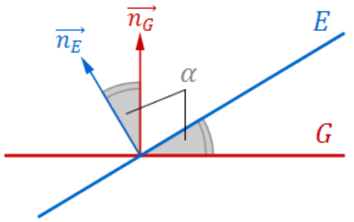
$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{n_G}| = 1$$

Neigungswinkel α bestimmen:

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

$$\alpha = \measuredangle(E, G) = \measuredangle(\overrightarrow{n_E}, \overrightarrow{n_G})$$

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

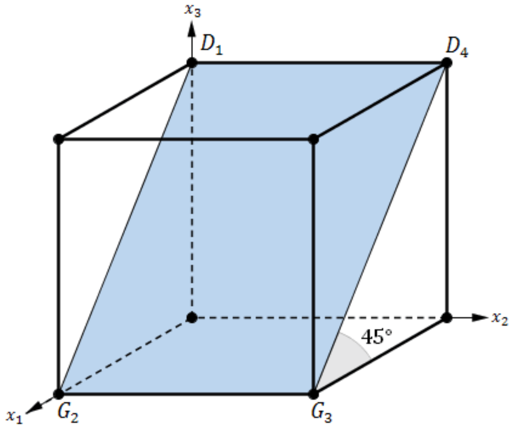
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_G}}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_G}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54,7°$$

Lagebeziehung von Ebenen



Zum Beispiel:

Die Punkte D_1, D_4 und G_3 legen eine Ebene fest, die mit der Grundfläche einen 45°-Winkel einschließt.

Teilaufgabe 1d (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Ebene F mit der Gleichung $F : x_1 - x_2 + x_3 = 3$ parallel zu E mit Abstand $\sqrt{3}$ ist.

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Lagebeziehung von Ebenen

$E : x_1 - x_2 + x_3 = 6$

$F : x_1 - x_2 + x_3 = 3$

E und F sind parallel, da sie den gleichen Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzen.

Abstand paralleler Ebenen

$D_1(0|0|6) \in E$

Hesse-Normalenform F^{HNF} der Ebene F bilden:

> Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*
>
> Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform E^N der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors.
>
> $E^N : \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d = 0$
>
> $\Rightarrow E^{HNF} : \dfrac{\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} = 0$
>
> d ist das Ergebnis des Skalarprodukts aus $\overrightarrow{n_E}$ und dem Ortsvektor des Aufpunkts von E.
>
> In Teilaufgabe 1c ist der Betrag des Normalenvektors bereits bestimmt worden: $|\overrightarrow{n_E}| = |\overrightarrow{n_F}| = \sqrt{3}$

$F^{HNF} : \dfrac{1}{\sqrt{3}} (x_1 - x_2 + x_3 - 3) = 0$

Abstand bestimmen:

> Erläuterung: *Abstand paralleler Ebenen*
>
> Um den Abstand paralleler Ebenen zu ermitteln, wählt man einen beliebigen Punkt einer Ebene und berechnet den Abstand zwischen diesem Punkt und der anderen Ebene.
>
> Hier wird D_1 als Punkt von E gewählt.

$d(E, F) = d(D_1, F)$

> Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*
>
> Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes S in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand des Punktes zur Ebene.
>
> $E^{HNF} : \dfrac{\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} = 0$
>
> $\Rightarrow d(S, E) = \left| \dfrac{\overrightarrow{S} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} \right|$
>
> d ist das Ergebnis des Skalarprodukts aus $\overrightarrow{n_E}$ und dem Ortsvektor des Aufpunkts von E.

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} (0 - 0 + 6 - 3)$
$= \dfrac{3}{\sqrt{3}}$
$= \dfrac{3}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
$= \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ E und F sind parallel und haben den Abstand $\sqrt{3}$.

Teilaufgabe 1e (10 BE)

Die Ebene F schneidet den Würfel W in einem regulären Sechseck.
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene F mit der x_1- und der x_3-Koordinatenachse und bestätigen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke $[G_2G_3]$ auf F liegt.
Zeichnen Sie alle sechs Schnittpunkte der Ebene F mit Kanten des Würfels sowie den Rand der sechseckigen Schnittfigur ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des betrachteten Sechsecks.

Lösung zu Teilaufgabe 1e

Spurpunkte einer Ebene

$F: x_1 - x_2 + x_3 = 3$

x_1-Koordinatenachse: $\overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

x_3-Koordinatenachse: $\overrightarrow{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Spurpunkte einer Ebene*

Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen nennt man Spurpunkte.
Um sie zu bestimmen, setzt man die Gleichung der Koordinatenachse in die Normalenform (Koordinatenform) der Ebenen ein, löst nach dem Parameter λ auf und setzt diesen Wert in die Geradengleichung ein.

Spurpunkt mit der x_1-Koordinatenachse:

$$\lambda - 0 + 0 = 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{S_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Ebene F schneidet die x_1-Achse im Punkt $S_1(3|0|0)$.

Spurpunkt mit der x_3-Koordinatenachse:

$$0 - 0 + \lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Ebene F schneidet die x_3-Achse im Punkt $S_3(0|0|3)$.

Lage eines Punktes

$G_2(6|0|0),\ G_3(6|6|0)$

Mittelpunkt M_1 der Strecke $[G_2G_3]$ bestimmen:

$$\overrightarrow{M_1} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{G_2} + \overrightarrow{G_3}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen, dass $M_1(6|3|0) \in F$:

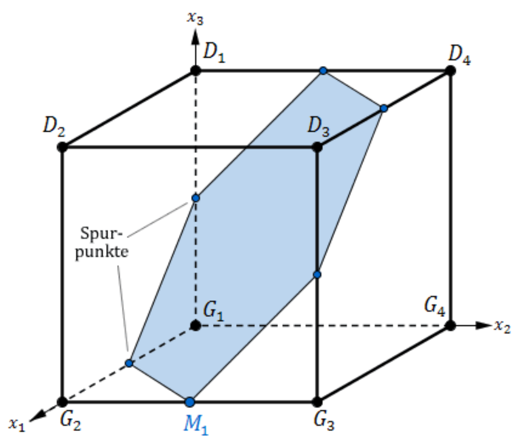
$F: x_1 - x_2 + x_3 = 3$

M_1 in F einsetzen:

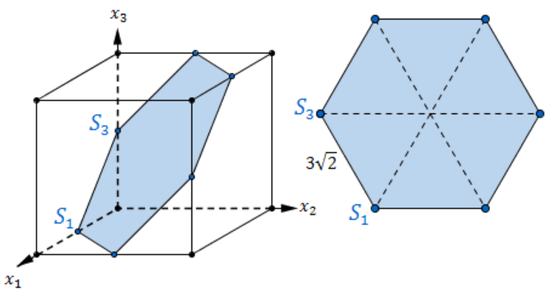
$6 - 3 + 0 = 3$ wahre Aussage

$\Rightarrow$ Der Punkt F liegt auf der Ebene F

Skizze



Flächeninhalt eines regulären Sechsecks



Erläuterung: *Reguläres Sechseck*

Die Ebene F schneidet den Würfel in einen regulären Sechseck.

Ein reguläres Sechseck hat gleich lange Seiten und gleich große Winkel.

Das reguläre Sechseck lässt sich in 6 gleichseitige Dreieckecke aufteilen.

Seitenlänge a des Sechsecks bestimmen:

$$a = [S_1\,S_3] = \left|\overrightarrow{S_1\,S_3}\right| = \left|\overrightarrow{S_3} - \overrightarrow{S_1}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right|$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$= \sqrt{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a bestimmen:

$$A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \underbrace{(a \cdot cos\;(30°))}_{h_\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Flächeninhalt des Sechsecks bestimmen:

$$A_{6eck} = 6 \cdot A_\triangle = 6 \cdot 9\frac{\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$$

Das Sechseck hat einen Flächeninhalt von $27\sqrt{3}$ FE (Flächeneinheiten)

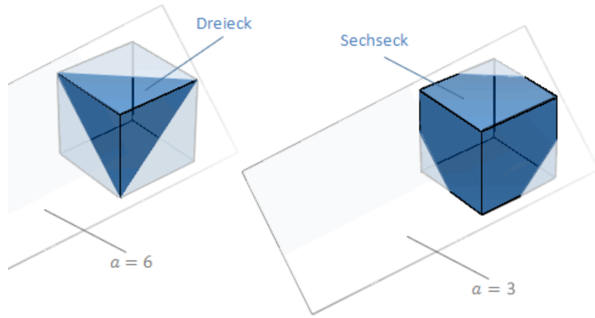
Teilaufgabe 1f (4 BE)

Alle Ebenen parallel zu F werden durch Gleichungen der Form $x_1 - x_2 + x_3 = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben.
Geben Sie an, welche Arten von Figuren als Schnitt einer solchen Ebene mit dem Würfel W auftreten. Geben Sie die Menge aller Werte von a an, für die die Schnittfigur ein Sechseck ist.

Lösung zu Teilaufgabe 1f

Schnitt Ebene - Würfel

$x_1 - x_2 + x_3 = a\,,\; a \in \mathbb{R}$ (Ebenenschar)



Erläuterung: *Schnitt Ebene - Würfel*

Die Ebenen aus der Schar $x_1 - x_2 + x_3 = a\,,\ \ a \in \mathbb{R}$ schneiden den Würfel W für verschiedene Werte von a.

In Teilaufgabe 1a) wurde gezeigt, dass der Schnitt zwischen der Ebene E ($a = 6$) und dem Würfel W ein (gleichseitiges) Dreieck ist.

In Teilaufgabe 1e) wurde gezeigt, dass der Schnitt zwischen der Ebene F ($a = 3$) und dem Würfel W ein Sechseck ist.

Es bleibt also zu erwähnen, dass die Ebenen den Würfel auch in nur einem Punkt schneiden können.

Als Schnittfiguren treten Punkt, (gleichseitiges) Dreieck und Sechseck.

Überlegung:

Für $a = 6$ ist die Schnittfigur ein Dreieck (Teilaufgabe 1a).
Für $a = 3$ ist die Schnittfigur ein Sechseck (Teilaufgabe 1e).
Alle Ebenen aus der Schar sind parallel (Teilaufgabe 1d).

$\Rightarrow$ Für $a < 6$ ist der Schnitt ein Sechseck.

Für welches $a < 6$ ist der Schnitt kein Sechseck mehr?
Das ist der Fall wenn die Ebene durch den Punkt D_4 geht.

D_4 in Ebenenschar einsetzen: $0 - 6 + 6 = a \quad \Rightarrow \quad a = 0$

$\Rightarrow$ Für $a \in]0;6[$ schneiden die Ebenen den Würfel in einem Sechseck