Abitur 2011 G8 Musterabitur Mathematik Geometrie V

In einem kartesischen Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse zeigt in Richtung Osten, die x_2-Achse in Richtung Norden, die Längeneinheit ist 1 km.

Ein Flugzeug F_1 steigt unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt $P(-10|0|0)$ längs der Geraden $g_1 : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auf. Flugzeug F_2 fliegt entlang der Geraden $g_2 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1a (3 BE)

Geben Sie die Himmelsrichtung an, in der F_1 fliegt und begründen Sie, dass F_2 eine konstante Flughöhe hält.

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1 gegen die Horizontale.

Teilaufgabe 1c (3 BE)

F_1 überfliegt in einer Höhe von 6 km eine Radarstation im Punkt Z der x_1x_2-Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten von Z. [Ergebnis: $Z(20|30|0)$]

Teilaufgabe 1d (5 BE)

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge senkrecht schneiden.
Legen Sie dar, dass daraus auch bei unveränderten Flugbahnen nicht zwingend eine Kollision der beiden Flugzeuge folgt.

Teilaufgabe 1e (2 BE)

Der Richtungsvektor von g_2 beschreibt die konstante Geschwindigkeit des Flugzeugs F_2 in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Geben Sie die physikalische Bedeutung des Parameters μ an.

Teilaufgabe 1f (6 BE)

Das Radar in Z erfasst alle Objekte im Luftraum bis zu einer Entfernung von 50 km. Berechnen Sie die Länge der Flugstrecke von F_2 im Überwachungsbereich des Radars.

Teilaufgabe 2 (3 BE)

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q(2|3|-1)$ von der Ebene $E : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$.

Teilaufgabe 3 (4 BE)

Gegeben sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC, das sich durch einen Punkt D zu einem Drachenviereck $ABCD$ ergänzen lässt.
Beschreiben Sie eine Abfolge von Schritten zur rechnerischen Ermittlung der Koordinaten von D.

Lösung

Teilaufgabe 1a (3 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem beschreibt die $x_1 x_2$-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse zeigt in Richtung Osten, die x_2-Achse in Richtung Norden, die Längeneinheit ist 1 km.

Ein Flugzeug F_1 steigt unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt $P(-10|0|0)$ längs der Geraden $g_1 : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auf. Flugzeug F_2 fliegt entlang der Geraden $g_2 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Geben Sie die Himmelsrichtung an, in der F_1 fliegt und begründen Sie, dass F_2 eine konstante Flughöhe hält.

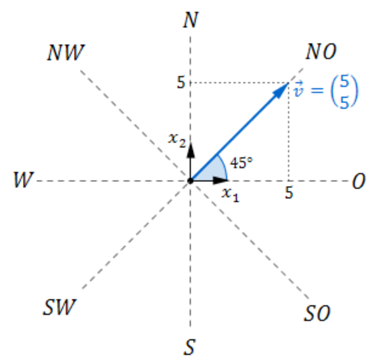
Lösung zu Teilaufgabe 1a

Lage des Vektors

$P(-10|0|0)$

$$g_1 : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \lambda \in \mathbb{R}$$

Erläuterung: *Richtungsvektor*



Der Richtungvektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Geraden g_1 gibt Auskunft über die Flugrichtung von F_1.

Da die x_1- und x_2-Koordinate gleich sind, zeigt der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ in der $x_1 x_2$-Ebene in positiver Richtung der Winkelhalbierenden des ersten Quadraten. Dies entspricht der Himmelsrichtung Nord-Osten.

$\Rightarrow$ Das Flugzeug F_1 fliegt in Richtung NO (Nord-Osten).

$$g_2 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die x_3-Koordinate des Richtungsvektors ist Null, somit hat F_2 eine konstante Flughöhe.

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1 gegen die Horizontale.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Winkel zwischen Gerade und Ebene

$$g_1 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor der Flugbahn von F_1

$\Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der $x_1\,x_2$-Ebene (Horizontale)

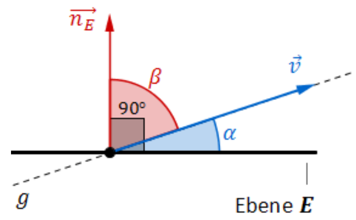
Länge der Vektoren bestimmen:

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{51}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^2} = 1$$

Winkel zwischen $\overrightarrow{n_E}$ und g_1 bestimmen:

> Erläuterung: *Winkel zwischen Ebene und Gerade*
>
> 
>
>
> Der Winkel α zwischen einer Ebene E und einer Geraden g entspricht dem von $90°$ abgezogene Winkel β zwischen dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der Geraden.
>
> $\measuredangle(g, E) = 90° - \measuredangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n_E})$

$$\measuredangle(g_1, E) = 90° - \underbrace{\measuredangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n_E})}_{\beta}$$

Winkel β bestimmen:

> Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*
>
> Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$
>
> $$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\beta}$$
>
> folgt für den Winkel β zwischen den beiden Vektoren:
>
> $$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$
>
> (Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos \beta = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{51} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{51}}$$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{51}}\right) \approx 82°$

$\Rightarrow \quad \measuredangle(g_1, E) = 90° - \underbrace{\measuredangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n_E})}_{\beta} = 90° - 82° = 8°$

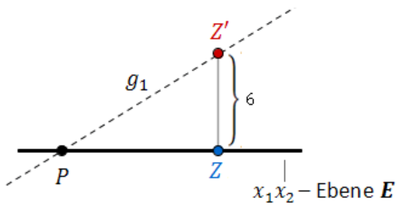
$\Rightarrow$ Der Steigungswinkel beträgt $8°$.

Teilaufgabe 1c (3 BE)

F_1 überfliegt in einer Höhe von 6 km eine Radarstation im Punkt Z der $x_1 x_2$-Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten von Z. [Ergebnis: $Z(20|30|0)$]

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Abstand Punkt - Ebene



$g_1 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \lambda \in \mathbb{R}$

$E : \overrightarrow{X} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad E : x_3 = 0 \quad (x_1 x_2\text{-Ebene})$

$Z \in E \quad \Rightarrow \quad Z(x_1|x_2|0)$

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Der Punkt auf der Geraden g_1 mit Abstand 6 von der $x_1 x_2$-Ebene, hat als x_3-Koordinate $x_3 = 6$. Die x_3-Koordinate eines jeden Punktes im Raum sagt aus, wie weit dieser Punkt von der $x_1 x_2$-Ebene entfernt ist.

Der allgemeine Punkt der Geraden g_1 ist: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -10 + 5\lambda \\ 5\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Für $\lambda = 6$ hat die x_3-Koordinate des Punkts den Wert 6.

$d(g_1, E) = 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 6$

$\lambda = 6$ in die Geradengleichung einsetzen:

$\overrightarrow{Z'} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Z'(20|30|6)$

Erläuterung: *Lage des Punktes*

Der Punkt Z' liegt auf der Geraden g_1 und ist von der $x_1 x_2$-Ebene 6 (km) entfernt.

Der Punkt Z liegt direkt „unterhalb“ von Z' in der $x_1 x_2$-Ebene. Seine Koordinaten stimmen somit bis auf die x_3-Koordinate mit Z' überein. Da Z in der $x_1 x_2$-Ebene liegt, ist seine x_3-Koordinate Null.

(Man sagt auch, Z ist die orthogonale Projektion des Punktes Z' auf die Ebene. Oder auch der Lotfußpunkt des Lotes durch Z'.)

$\Rightarrow Z(20|30|0)$

Teilaufgabe 1d (5 BE)

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge senkrecht schneiden.
Legen Sie dar, dass daraus auch bei unveränderten Flugbahnen nicht zwingend eine Kollision der beiden Flugzeuge folgt.

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Lagebeziehung von Vektoren

$$g_1 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor der Flugbahn von F_1

$$g_2 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \mu \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor der Flugbahn von F_2

Skalarprodukt der Richtungsvektoren bilden:

$$\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = 50 - 50 + 0 = 0$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$\Rightarrow$ Die Richtungsvektoren, und somit die Flugbahnen, stehen senkrecht zueinander

Lagebeziehung von Geraden

Geraden schneiden: $g_1 \cap g_2$

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Big| \ - \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 5\lambda = 50 + 10\mu \\ 5\lambda = 50 - 10\mu \\ \lambda = 10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \mu = 0 \\ \mu = 0 \\ \lambda = 10 \end{array}$$

Das Gleichungssystem geht auf.

$\Rightarrow$ Die Flugbahnen schneiden sich!

Eine Kollision der beiden Flugzeuge muss nicht zwingend erfolgen. Dafür wäre ein zeitgleiches Erreichen des Schnittpunktes der Flugbahnen notwendig.

Teilaufgabe 1e (2 BE)

Der Richtungsvektor von g_2 beschreibt die konstante Geschwindigkeit des Flugzeugs F_2 in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Geben Sie die physikalische Bedeutung des Parameters μ an.

Lösung zu Teilaufgabe 1e

Anwendungszusammenhang - Bewegungslehre

$$g_2 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \mu \in \mathbb{R}$$

Die Geradengleichung g_2 beschreibt den Ort des Flugzeuges für ein bestimmtes μ.

Wenn $\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$ der Startpunkt ist und der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ die konstante Geschwindigkeit darstellt, dann muss μ die Zeit sein, die vergangen ist, seitdem das Flugzeug den Punkt (40|50|10) passiert hat.

$$\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Worten:

$$\underbrace{Endpunkt - Anfangspunkt}_{\text{Weg}} = Zeit \cdot Geschwindigkeit$$

In Messeinheiten:

$$km = min \cdot \frac{km}{min}$$

Teilaufgabe 1f (6 BE)

Das Radar in Z erfasst alle Objekte im Luftraum bis zu einer Entfernung von 50 km. Berechnen Sie die Länge der Flugstrecke von F_2 im Überwachungsbereich des Radars.

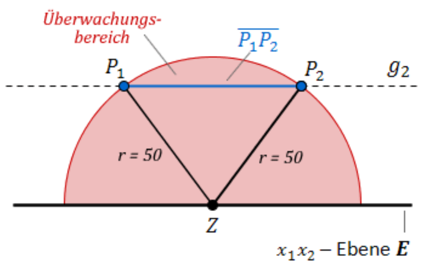
Lösung zu Teilaufgabe 1f

Länge eines Vektors

$$g_2 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \mu \in \mathbb{R}$$

Allgemeiner Geradenpunkt $\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 40+10\mu \\ 50-10\mu \\ 10 \end{pmatrix}$

$Z(20|30|0)$ (siehe Teilaufgabe 1c)



Punkte auf der Geraden g_2 bestimmten, die vom Punkt Z 50 km entfernt sind:

$$d(Z,P) = 50 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\overrightarrow{ZP}\right| = 50$$

$$\left|\overrightarrow{ZP}\right| = \left|\overrightarrow{P} - \overrightarrow{Z}\right| = \left| \begin{pmatrix} 40+10\mu \\ 50-10\mu \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 20+10\mu \\ 20-10\mu \\ 10 \end{pmatrix} \right|$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$= \sqrt{\begin{pmatrix} 20+10\mu \\ 20-10\mu \\ 10 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{(20+10\mu)^2 + (20-10\mu)^2 + 10^2}$$

$$= \sqrt{400 + 400\mu + 100\mu^2 + 400 - 400\mu + 100\mu^2 + 100}$$

$$= \sqrt{900 + 200\mu^2}$$

$\sqrt{900 + 200\mu^2} = 50$ (Quadrieren)

$900 + 200\mu^2 = 2500 \quad \Rightarrow \quad \mu^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \mu_{1,2} = \pm\sqrt{8}$

$\mu_{1,2}$ in g_2 einsetzen:

$$\overrightarrow{P_1} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \sqrt{8} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40+10\sqrt{8} \\ 50-10\sqrt{8} \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_2} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} - \sqrt{8} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40-10\sqrt{8} \\ 50+10\sqrt{8} \\ 10 \end{pmatrix}$$

Länge der Flugstrecke im Überwachungsbereich bestimmen:

$$\left|\overrightarrow{P_2P_1}\right| = \left|\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2}\right| = \left| \begin{pmatrix} 40+10\sqrt{8} \\ 50-10\sqrt{8} \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40-10\sqrt{8} \\ 50+10\sqrt{8} \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 20\sqrt{8} \\ -20\sqrt{8} \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$= \sqrt{\begin{pmatrix} 20\sqrt{8} \\ -20\sqrt{8} \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{\left(20\sqrt{8}\right)^2 + \left(-20\sqrt{8}\right)^2}$$

$= \sqrt{6400}$

$= 80$

$\Rightarrow$ Die Flugstrecke im Überwachungsbereich ist 80 km lang

Alternative Lösung

1. Abstand zwischen der Gerade g_2 und dem Punkt Z bestimmen.

Hilfsebene H in Normalenform aufstellen, die als Aufpunkt Z hat und senkrecht zu g_2 verläuft:

$$H : \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$H : 10x_1 - 10x_2 = -100$

Schnittpunkt S von g_2 mit H:

$$\begin{aligned} 10(40 + 10\mu) - 10(50 - 10\mu) &= -100 \\ 400 + 100\mu - 500 + 100\mu &= -100 \\ 200\mu - 100 &= -100 \\ \mu &= 0 \end{aligned}$$

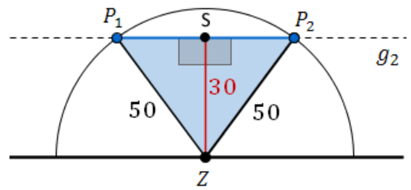
$\mu = 0$ in g_2 einsetzen:

$$\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Abstand bestimmen:

$$d(Z, g_2) = \left|\overrightarrow{ZS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{400 + 400 + 100} = 30$$

Dieser Abstand entspricht der Höhe des Dreiecks $P_2\,Z\,P_1$.



2. Strecke $\overline{P_2\,P_1}$ mit dem Satz des Pythagoras bestimmen.

$\frac{1}{2}\overline{P_2\,P_1} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$

$\overline{P_2\,P_1} = 2 \cdot 40 = 80$

Teilaufgabe 2 (3 BE)

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q(2|3|-1)$ von der Ebene $E : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$.

Lösung zu Teilaufgabe 2

Abstand Punkt - Ebene

$Q(2|3|-1)$

$E^N : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der Ebene.

Betrag des Normalenvektors bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E aufstellen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.

Beispiel:

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$$E^{HNF}: \frac{1}{\sqrt{14}}\,(2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4) = 0$$

Abstand des Punktes Q von der Ebene E:

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P,E)$ des Punktes zur Ebene.

Beispiel:

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$P(1|3|-6)$

$$d(P,E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\frac{9}{3} \right| = 3$$

$$d(Q,E) = \left| \frac{1}{\sqrt{14}}\,(2 \cdot 2 - 3 + 3 \cdot (-1) - 4) \right| = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{7}\sqrt{14}$$

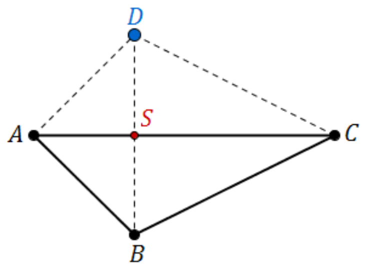
Der Abstand des Punktes Q von der Ebene E beträgt $\frac{3}{7}\sqrt{14}$ LE (Längeneinheiten).

Teilaufgabe 3 (4 BE)

Gegeben sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC, das sich durch einen Punkt D zu einem Drachenviereck $ABCD$ ergänzen lässt.
Beschreiben Sie eine Abfolge von Schritten zur rechnerischen Ermittlung der Koordinaten von D.

Lösung zu Teilaufgabe 3

2-dimensionale Geometrie



Erläuterung: *Drachenviereck*

Ein Viereck mit einer Diagonalen als Symmetrieachse heißt Drachenviereck.

Es gilt: Die Diagonalen sind zueinander senkrecht.

Zum Beispiel:

D ist der Spiegelpunkt von B an der Gerade AC.
Folgende Schritte ermöglichen die rechnerische Ermittlung der Koordinaten von D:

1. Gleichung der Ebene E durch B senkrecht zu AC in Normalenform aufstellen (der Vektor $\overrightarrow{AC}$ ist Normalenvektor der Ebene).

2. Ebene E mit Gerade AC schneiden (Geradengleichung in Ebenengleichung einsetzen). Es wird der Schnittpunkt S bestimmt, der Fußpunkt des Lotes von B auf AC ist.

3. Koordinaten des Punktes D bestimmen: $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{S} + \overrightarrow{BS}$ oder $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{B} + 2 \cdot \overrightarrow{BS}$