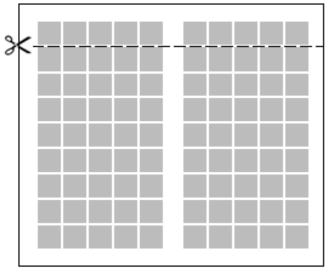
Abitur 2011 G9 Abitur Mathematik LK Stochastik IV

Der im Jahr 1849 in Bayern herausgegebene „Schwarze Einser“ ist die erste in Deutschland erschienene Briefmarke.

An die Postschalter kam der Schwarze Einser in Bögen zu je 90 Stück. In der Mitte jedes Bogens befand sich der unbedruckte Zwischensteg, so dass die Marken in zwei Blöcken angeordnet waren (vgl. Abbildung). Ein gewissenhafter Postbeamter schnitt seinerzeit mit einer Schere die jeweils gewünschte Stückzahl Zeile für Zeile von oben nach unten aus einem Bogen, wobei das Abschneiden des Randes und das Trennen in einzelne Marken dem Kunden oblagen. War dieser Bogen zu Ende, griff der Beamte zum nächsten.



Teilaufgabe 1a (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde beim Kauf einer einzelnen Briefmarke eine Marke vom Rand eines Blocks erhielt.

Teilaufgabe 1b (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde beim Kauf von drei Briefmarken einen aus drei Marken bestehenden Streifen erhielt, der nicht durch den Zwischensteg unterbrochen war.

Wegen seines hohen Sammlerwerts wurden auch viele Fälschungen des Schwarzen Einsers produziert. Erfahrene Prüfer können sowohl Fälschungen als auch echte Marken eindeutig identifizieren. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass sowohl 30% der gestempelten als auch 30% der ungestempelten Schwarzen Einser gefälscht sind und dass die Prüfergebnisse für einzelne Marken unabhängig voneinander sind.

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Wie viele Schwarze Einser - gestempelt oder ungestempelt - müssen mindestens geprüft werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens eine Fälschung dabei ist?

Teilaufgabe 2b (4 BE)

Ein Auktionshaus verschickt zehn einzelne Schwarze Einser, unter denen sich genau vier Fälschungen befinden, in einer zweizeiligen Einsteckkarte an einen Prüfer. Wie viele verschiedene Anordnungen der Briefmarken sind dabei möglich, wenn in jeder Zeile fünf Marken stecken und nur zwischen echten und gefälschten Marken unterschieden wird?

Da gestempelte Schwarze Einser noch wertvoller sind als ungestempelte, werden häufig auch die Poststempel auf den Marken gefälscht. Gehen Sie davon aus, dass 40% aller Stempel auf Schwarzen Einsern gefälscht sind, wobei gefälschte Stempel sowohl auf echten als auch auf gefälschten Marken zu finden sind. Echte Stempel auf gefälschten Marken kommen hingegen nicht vor.

Teilaufgabe 3a (4 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stempel auf einem echten Schwarzen Einser gefälscht ist.

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Ein Prüfer untersucht bei einem Schwarzen Einser zuerst den Stempel und stellt fest, dass dieser gefälscht ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann die Briefmarke selbst echt?

Heinz erbt von seinem Großvater 15 ungestempelte Schwarze Einser, die dieser unabhängig voneinander als Einzelstücke erworben hat. Z beschreibe allgemein die Anzahl der Fälschungen in einer aus 15 Marken bestehenden zufälligen Auswahl ungestempelter Schwarzer Einser.

Teilaufgabe 4a (5 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der gefälschten Schwarzen Einser in Heinz' Erbschaft vom Erwartungswert von Z um höchstens eine Standardabweichung von Z abweicht.

Da ungeprüfte Marken nicht zu einem angemessenen Preis verkauft werden können, entschließt sich Heinz, seine Marken prüfen zu lassen. Falls sich eine Marke als echt herausstellt, werden 6% des Katalogpreises als Prüfgebühr verlangt, andernfalls nur 2%.
Bei einem Katalogpreis von 1300 Euro kann für einen echten Schwarzen Einser tatsächlich ein Verkaufspreis von 800 Euro erzielt werden. Ein als gefälscht deklarierter Schwarzer Einser kann für 30 Euro verkauft werden.

Teilaufgabe 4b (8 BE)

Zeigen Sie, dass Heinz für seine Erbschaft insgesamt - nach Abzug der Prüfgebühren - einen Erlös in Höhe von 10830 € $-k \cdot 718$ € erzielen kann, wenn sich bei der Prüfung k Schwarze Einser als gefälscht herausstellen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt Heinz insgesamt einen Erlös von weniger als 7500 Euro?

Teilaufgabe 5 (6 BE)

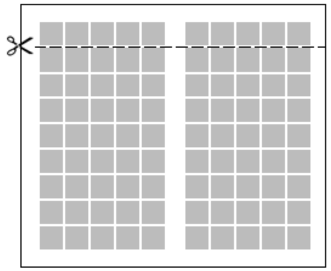
Berichten der Europäischen Zentralbank zufolge war in der ersten Hälfte des Jahres 2009 etwa jeder 12700-ste 20-Euro-Schein gefälscht.
Es wird vermutet, dass die Fälschungsquote bei den 20-Euro-Scheinen inzwischen auf über $8 \cdot 10^{-5}$ angestiegen ist. Um diese Vermutung (Nullhypothese) zu testen, werden von der Bundesbank zehn Millionen zufällig ausgewählte 20-Euro-Scheine geprüft. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf einem Signifikanzniveau von 5% unter Verwendung der Normalverteilung als Näherung.

Lösung

Teilaufgabe 1a (3 BE)

Der im Jahr 1849 in Bayern herausgegebene „Schwarze Einser“ ist die erste in Deutschland erschienene Briefmarke.

An die Postschalter kam der Schwarze Einser in Bögen zu je 90 Stück. In der Mitte jedes Bogens befand sich der unbedruckte Zwischensteg, so dass die Marken in zwei Blöcken angeordnet waren (vgl. Abbildung). Ein gewissenhafter Postbeamter schnitt seinerzeit mit einer Schere die jeweils gewünschte Stückzahl Zeile für Zeile von oben nach unten aus einem Bogen, wobei das Abschneiden des Randes und das Trennen in einzelne Marken dem Kunden oblagen. War dieser Bogen zu Ende, griff der Beamte zum nächsten.



Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde beim Kauf einer einzelnen Briefmarke eine Marke vom Rand eines Blocks erhielt.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Wahrscheinlichkeit

A: „Briefmarke liegt auf dem Rand eines Blocks“

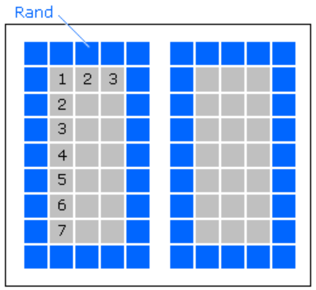
$|\Omega| = 90$ (Gesamtanzahl Briefmarken)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Erläuterung:

Innere Briefmarken: 3 Spalten x 7 Zeilen, jeweils auf 2 Blöcke

$|A| = 90 - [2 \cdot (3 \cdot 7)] = 48$



$P(A) = \dfrac{48}{90} \approx 53{,}3\%$

Teilaufgabe 1b (3 BE)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde beim Kauf von drei Briefmarken einen aus drei Marken bestehenden Streifen erhielt, der nicht durch den Zwischensteg unterbrochen war.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

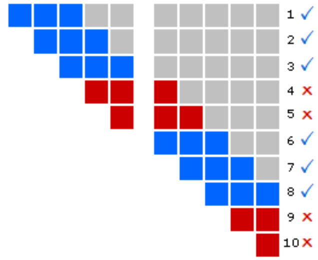
Wahrscheinlichkeit

B : „Marken liegen auf einem Streifen, der nicht durch den Zwischensteg unterbrochen ist“

Erläuterung:

Eine Zeile besteht aus 10 Briefmarken, also gibt es 10 Möglichkeiten einen Streifen heraus zu schneiden.

2 Streifen sind durch den Zwischensteg unterbrochen; 2 Streifen ergeben keinen Streifen aus 3 Briefmarken.



$\Rightarrow$ 6 von 10 Streifen.

$|\Omega| = 10$ (Anzahl mögliche Streifen)

$|B| = 6$

$P(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|}$

$P(B) = \dfrac{6}{10} = 60\%$

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Wegen seines hohen Sammlerwerts wurden auch viele Fälschungen des Schwarzen Einsers produziert. Erfahrene Prüfer können sowohl Fälschungen als auch echte Marken eindeutig identifizieren. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass sowohl 30% der gestempelten als auch 30% der ungestempelten Schwarzen Einser gefälscht sind und dass die Prüfergebnisse für einzelne Marken unabhängig voneinander sind.

Wie viele Schwarze Einser - gestempelt oder ungestempelt - müssen mindestens geprüft werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens eine Fälschung dabei ist?

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Zufallsexperiment

Text analysieren:

$p = P(\text{Fälschnug}) = 30\% = 0,3 \quad$ (Trefferwahrscheinlichkeit)

„Wahrscheinlichkeit von mehr als 99%“ $\quad \Rightarrow \quad P > 0,99$

„Wenigstens eine Fälschung“ $\quad \Rightarrow \quad Z \geq 1$

Gesucht ist nach der Anzahl n der zu überprüfenden Schwarze Einser.

Es soll gelten:

$P_{0,3}^n(Z \geq 1) > 0,99$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Es wird das Gegenereignis betrachtet:

P(wenigstens 1 Treffer) = 1 - P(kein Treffer)

$1 - P_{0,3}^n(Z = 0) > 0,99$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P_p^n(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$1 - 0,7^n > 0,99$

Erläuterung: *Rechenweg*

$1 - 0,7^n > 0,99$

$0,7^n < 1 - 0,99 \quad | \quad$ logarithmieren

$\ln 0,7^n < \ln(1 - 0,99)$

$n \cdot \ln 0,7 < \ln(1 - 0,99) \quad | \quad : \underbrace{(\ln 0,7)}_{<0}$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$n > \dfrac{\ln(1 - 0,99)}{\ln 0,7}$

$n > \dfrac{\ln(1 - 0,99)}{\ln 0,7}$

$n > 12,9$

$\Rightarrow \quad n \geq 13$

Es müssen mindestens 13 Schwarze Einser überprüft werden.

Teilaufgabe 2b (4 BE)

Ein Auktionshaus verschickt zehn einzelne Schwarze Einser, unter denen sich genau vier Fälschungen befinden, in einer zweizeiligen Einsteckkarte an einen Prüfer. Wie viele verschiedene Anordnungen der Briefmarken sind dabei möglich, wenn in jeder Zeile fünf Marken stecken und nur zwischen echten und gefälschten Marken unterschieden wird?

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Kombinatorik

2 Zeilen mit jeweils 5 Briefmarken, 4 Fälschungen.

Erläuterung:

Man betrachtet die verschiedenen Möglichkeiten die 4 Fälschungen anzuordnen:

1. Fall: alle 4 Fälschungen befinden sich in einer Zeile.

$$\Rightarrow \overbrace{\binom{5}{4}}^{\text{1.Zeile}} \cdot \overbrace{\binom{5}{0}}^{\text{2.Zeile}} \cdot \underbrace{2}_{\text{Zeilentausch}}$$

2. Fall: 3 Fälschungen in einer Zeile und 1 Fälschung in der anderen Zeile.

$$\Rightarrow \overbrace{\binom{5}{3}}^{\text{1.Zeile}} \cdot \overbrace{\binom{5}{1}}^{\text{2.Zeile}} \cdot \underbrace{2}_{\text{Zeilentausch}}$$

3. Fall: 2 Fälschungen jeweils in einer Zeile

$$\Rightarrow \overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{1.Zeile}} \cdot \overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{2.Zeile}}$$

$$|B| = \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{0} \cdot 2 + \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{1} \cdot 2 + \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 10 + 100 + 100 = 210$$

Alternative Lösung

$$|B| = \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{6} = 210$$

Teilaufgabe 3a (4 BE)

Da gestempelte Schwarze Einser noch wertvoller sind als ungestempelte, werden häufig auch die Poststempel auf den Marken gefälscht. Gehen Sie davon aus, dass 40% aller Stempel auf Schwarzen Einsern gefälscht sind, wobei gefälschte Stempel sowohl auf echten als auch auf gefälschten Marken zu finden sind. Echte Stempel auf gefälschten Marken kommen hingegen nicht vor.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stempel auf einem echten Schwarzen Einser gefälscht ist.

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ereignisse:

E: „Schwarzer Einser ist echt“
S: „Stempel ist echt“

Gegeben: $\quad P(\overline{S}) = 40\% = 0,4 \quad , \qquad P(\overline{E}) = 0,3$ (s. Teilaufgabe 2a)

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

$P_E(\overline{S})$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stempel gefälscht ist, wenn dieser sich auf einem echten Schwarzen Einser befindet.

$P_E(\overline{S})$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\overline{S}$ unter der Bedingung des Ereignisses E.

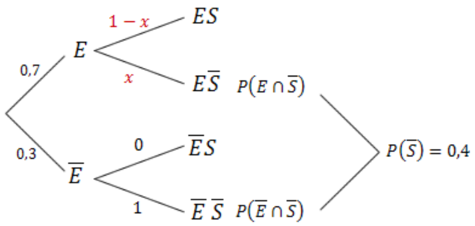
Gesucht: $\quad P_E(\overline{S}) \qquad$ (entspricht x im Baumdiagramm)

Baumdiagramm erstellen:

Erläuterung:

$P(\overline{E}) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0,3 = 0,7$

„Echte Stempel auf gefälschten Marken kommen hingegen nicht vor.“ $\Rightarrow$ $P_{\overline{E}}(S) = 0$



$P(\overline{S}) = P(E \cap \overline{S}) + P(\overline{E} \cap \overline{S})$

$0,4 = 0,7 \cdot x + 0,3 \cdot 1$

$0,1 = 0,7x$

$x = \dfrac{0,1}{0,7}$

$\Rightarrow \quad P_E(\overline{S}) = \dfrac{0,1}{0,7} \approx 14,2\%$

Alternative Lösung

Vierfeldertafel mit Angaben aus den Teilaufgaben:

	E	$\overline{E}$	
S			0,6
$\overline{S}$			0,4
	0,7	0,3	1

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Es gilt: $\quad P_{\overline{E}}(S) = \dfrac{P(\overline{E} \cap S)}{P(\overline{E})}$

$\Rightarrow \quad P(\overline{E} \cap S) = P_{\overline{E}}(S) \cdot P(\overline{E}) = 0 \cdot 0,3 = 0$

$P_{\overline{E}}(S) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{E} \cap S) = 0$

Vierfeldertafel vervollständigen:

	E	$\overline{E}$	
S	0,6	0	0,6
$\overline{S}$	0,1	0,3	0,4
	0,7	0,3	1

$P_E(\overline{S}) = \dfrac{P(E \cap \overline{S})}{P(E)} = \dfrac{0,1}{0,7} \approx 14,2\%$

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Ein Prüfer untersucht bei einem Schwarzen Einser zuerst den Stempel und stellt fest, dass dieser gefälscht ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann die Briefmarke selbst echt?

Lösung zu Teilaufgabe 3b

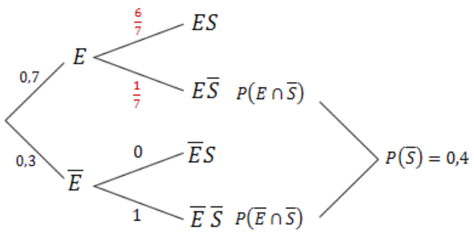
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ereignisse:

E: „Schwarzer Einser ist echt“
S: „Stempel ist echt“

Gegeben: $P(\overline{S}) = 40\% = 0,4$

Baumdiagramm aus Teilaufgabe 3a:



Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

$P_{\overline{S}}(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schwarzen Einser echt ist, wenn der Stempel gefälscht ist.

$P_{\overline{S}}(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E unter der Bedingung des Ereignisses $\overline{S}$.

Gesucht: $P_{\overline{S}}(E)$

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

Für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P_{\overline{S}}(E) = \frac{P(\overline{S} \cap E)}{P(\overline{S})} = \frac{0,7 \cdot \frac{1}{7}}{0,4} = \frac{0,1}{0,4} = 25\%$$

Teilaufgabe 4a (5 BE)

Heinz erbt von seinem Großvater 15 ungestempelte Schwarze Einser, die dieser unabhängig voneinander als Einzelstücke erworben hat. Z beschreibe allgemein die Anzahl der Fälschungen in einer aus 15 Marken bestehenden zufälligen Auswahl ungestempelter Schwarzer Einser.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der gefälschten Schwarzen Einser in Heinz' Erbschaft vom Erwartungswert von Z um höchstens eine Standardabweichung von Z abweicht.

Lösung zu Teilaufgabe 4a

Binomialverteilung

„15 ungestempelte Schwarze Einser, die dieser unabhängig voneinander als Einzelstücke erworben hat“
$\Rightarrow$ Bernoulli-Kette

Gegeben: $n = 15$, $p = 0,3$ (s. Teilaufgabe 2a)

Gesucht: $P(|Z - \mu| \leq \sigma)$

Erwartungswert bestimmen:

$\mu = n \cdot p = 15 \cdot 0,3 = 4,5$

Standardabweichung bestimmen:

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{15 \cdot 0,3 \cdot 0,7} \approx 1,77$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$P_{0,3}^{15}(|Z-\mu| \leq \sigma) = P_{0,3}^{15}(|Z-4,5| \leq 1,77)$

Erläuterung: *Rechenweg*

$|Z-4,5| \leq 1,77$

$\pm(Z-4,5) \leq 1,77$

$Z-4,5 \leq 1,77 \quad \Rightarrow \quad Z \leq 6,27$

$-Z+4,5 \leq 1,77 \quad \Rightarrow \quad Z \geq 2,73$

$= P_{0,3}^{15}(2,73 \leq Z \leq 6,27)$

Erläuterung:

Briefmarken gibt es nur als ganze Stücke. Deswegen wird hier auf- bzw. abgerundet.

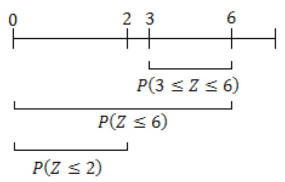
$= P_{0,3}^{15}(3 \leq Z \leq 6)$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Wenn die Zufallsvariable Z zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a-1)$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“



$= P_{0,3}^{15}(Z \leq 6) - P_{0,3}^{15}(Z \leq 2)$

(Werte werden aus dem stochastischen Tafelwerk entnommen)

$\approx 0,86886 - 0,12683$

$\approx 74,2\%$

Teilaufgabe 4b (8 BE)

Da ungeprüfte Marken nicht zu einem angemessenen Preis verkauft werden können, entschließt sich Heinz, seine Marken prüfen zu lassen. Falls sich eine Marke als echt herausstellt, werden 6% des Katalogpreises als Prüfgebühr verlangt, andernfalls nur 2%.
Bei einem Katalogpreis von 1300 Euro kann für einen echten Schwarzen Einser tatsächlich ein Verkaufspreis von 800 Euro erzielt werden. Ein als gefälscht deklarierter Schwarzer Einser kann für 30 Euro verkauft werden.

Zeigen Sie, dass Heinz für seine Erbschaft insgesamt - nach Abzug der Prüfgebühren - einen Erlös in Höhe von 10830 € $-k \cdot 718$ € erzielen kann, wenn sich bei der Prüfung k Schwarze Einser als gefälscht herausstellen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt Heinz insgesamt einen Erlös von weniger als 7500 Euro?

Lösung zu Teilaufgabe 4b

Funktionsgleichung ermitteln

Echte Einser:

Gebühr: $6\% \cdot 1300 = 78$
Erlös: $(15-k) \cdot (800-78)$

Gefälschte Einser:

Gebühr: $2\% \cdot 1300 = 26$
Erlös: $k \cdot (30-26)$

Gesamterlös:

$E(k) = (15-k) \cdot (800-78) + k \cdot (30-26)$

$E(k) = 10830 - 722k + 4k$

$E(k) = 10830 - 718k$

Binomialverteilung

$E(k) < 7500$

$10830 - 718k < 7500 \quad \Rightarrow \quad k > 4,6 \quad \Rightarrow \quad k \geq 5$

Damit Heinz einen Erlös von weniger als 7500 € erzielt, müssen mindestens 5 Briefmarken gefälscht sein.

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$n = 15$

$p = 0,3$

$Z \geq 5$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(mindestens k Treffer) = 1 - P(höchsten k-1 Treffer)

$P_{0,3}^{15}(Z \geq 5) = 1 - P_{0,3}^{15}(Z \leq 4)$

(Wert wird aus dem stochastischen Tafelwerk abgelesen)

$\approx 1 - 0,51549$

$\approx 48,5\%$

Teilaufgabe 5 (6 BE)

Berichten der Europäischen Zentralbank zufolge war in der ersten Hälfte des Jahres 2009 etwa jeder 12700-ste 20-Euro-Schein gefälscht.
Es wird vermutet, dass die Fälschungsquote bei den 20-Euro-Scheinen inzwischen auf über $8 \cdot 10^{-5}$ angestiegen ist. Um diese Vermutung (Nullhypothese) zu testen, werden von der Bundesbank zehn Millionen zufällig ausgewählte 20-Euro-Scheine geprüft. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf einem Signifikanzniveau von 5% unter Verwendung

der Normalverteilung als Näherung.

Lösung zu Teilaufgabe 5

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

Nullhypothese: $H_0 : p_0 > 8 \cdot 10^{-5} = 0,00008$

Alternative: $H_1 : p_1 = \dfrac{1}{12700}$

Stichprobenumgang: $n = 10\,000\,000 = 10^7$

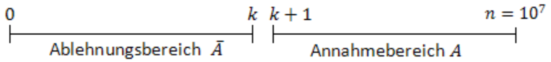
Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Annahmebereich von H_0: $A = [k+1, 10^7]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [0, k]$

Erläuterung: *Nullhypothese*

Es wird vermutet, dass die Fälschungsquote bei den 20-Euro-Scheinen inzwischen auf **über** $8 \cdot 10^{-5}$ angestiegen ist. Somit liegt der Annahmebereich rechts und der Ablehnungsbereich links.



Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Das ist der Fall wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($Z \leq k$).

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{0,00008}^{10^7}(Z \leq k) \leq 0,05$

Gesucht ist nun der Fehler erster Art: $P^{10^7}_{0,00008}(Z \leq k) \leq 0,05$

Binomialverteilung

Erwartungswert und Standardabweichung bestimmen:

$\mu = n \cdot p = 10^7 \cdot 0,00008 = 800$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10^7 \cdot 0,00008 \cdot 0,99992} \approx 28,28$

Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung:

Erläuterung: *Normalverteilung*

Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung:

$$P^n_p(Z \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0,5 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{k + 0,5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right)$$

Dabei ist:

$\mu = n \cdot p$ der Erwartungswert

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ die Standardabweichung

$0,5$ die Stetigkeitskorrektur

$$P^{10^7}_{0,00008}(Z \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0,5 - 800}{28,28}\right) \leq 0,05$$

Erläuterung: *Tafelwerk*

Aus den Quantilen des stochastischen Tafelwerks entnimmt man:

$0,05 = \Phi(-1,645)$

$$\Phi\left(\frac{k + 0,5 - 800}{28,28}\right) \leq \Phi(-1,645)$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Die Funktion Φ ist stetig und streng monoton steigend. Folglich gilt:

$\Phi(Z_1) = \Phi(Z_2) \quad \Longleftrightarrow \quad Z_1 = Z_2$

$$\frac{k - 799,5}{28,28} \leq -1,645$$

$k \leq -1,645 \cdot 28,28 + 799,5$

$k \leq 752,97$

$\Rightarrow \quad k \leq 752$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = [0, 752]$

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens 752 Fälschungen gefunden werden.