Abitur 2011 G9 Abitur Mathematik LK Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^+$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1a (4 BE)

Bestimmen Sie die Nullstelle von f und geben Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs an.

Teilaufgabe 1b (8 BE)

Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts $E\ (x_E|y_E)$ sowie das Krümmungsverhalten von G_f.
[Teilergebnis: $x_E = \frac{2}{e}$]

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Geben Sie das Verhalten von $f'(x)$ für $x \to 0$ an. Berechnen Sie $f(3)$ und zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

Die Einschränkung von f auf das Intervall $]0; x_E]$ besitzt die Umkehrfunktion g_1, die Einschränkung von f auf das Intervall $[x_E; +\infty[$ die Umkehrfunktion g_2.

Teilaufgabe 1d (5 BE)

Die Graphen von f und g_2 haben den Punkt $S\ (x_S|y_S)$ gemeinsam. Berechnen Sie die Koordinaten von S. Zeichnen Sie die Graphen von g_1 und g_2 in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1c ein.
[Teilergebnis: $x_S = 2\sqrt{e}$]

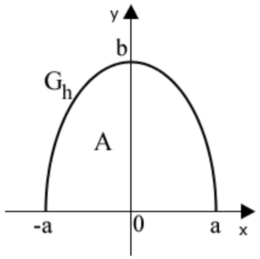
Teilaufgabe 1e (4 BE)

Ermitteln Sie den Term einer Stammfunktion F von f.
[mögliches Ergebnis: $F(X) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}x^2$]

Teilaufgabe 1f (5 BE)

Die Graphen von f, g_1 und g_2 bilden, ergänzt durch den Koordinatenursprung, den Rand eines endlichen Flächenstücks. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

Der Graph G_h der in $[-a; a]$ definierten Funktion h ist eine halbe Ellipse, die die y-Achse im Punkt $(0|b)$ schneidet und mit der x-Achse ein Flächenstück des Inhalts A einschließt ($a, b \in \mathbb{R}^+$; siehe Abbildung). Der Funktionsterm von h wird im Folgenden nicht benötigt.



Teilaufgabe 2a (4 BE)

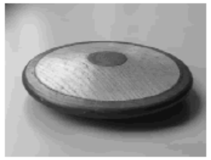
Weisen Sie nach, dass für jede reelle Zahl r die Beziehung

$$\pi \int_{-a}^{a} (h(x) + r)^2 \, dx - \pi \int_{-a}^{a} (-h(x) + r)^2 \, dx = 2\pi r \cdot 2A$$

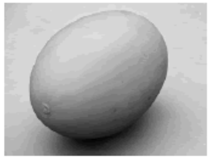
gilt, indem Sie die linke Seite der Gleichung geeignet umformen.

Teilaufgabe 2b (5 BE)

Geben Sie an, wie die Graphen der in $[-a;a]$ definierten Funktionen $h_1 : x \mapsto h(x) + r$ und $h_2 : x \mapsto -h(x) + r$ aus G_h hervorgehen.
Durch den Term auf der linken Seite der Gleichung aus Teilaufgabe 2a wird für $r > b$ das Volumen eines Rotationskörpers beschrieben. Für welchen der abgebildeten Gegenstände stellt dieser Rotationskörper bei passender Wahl von a und b ein geeignetes Modell dar? Begründen Sie Ihre Antwort.


Diskus


Donut


Melone

Lösung

Teilaufgabe 1a (4 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^+$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Bestimmen Sie die Nullstelle von f und geben Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs an.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right), \qquad D_f = \mathbb{R}^+$

$f(x) = 0$

$0 = 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$x_1^N = 0$ liegt nicht im Definitionsbereich und wird ausgeschlossen.

$\ln\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

Erläuterung: *Nullstellen einer Logarithmusfunktion*

Da $\ln 1 = 0$, nimmt die Logarithmusfunktion $\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ den Wert Null an, wenn das Argument $\frac{x}{2} = 1$ ist.

$\frac{x}{2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_2^N = 2$

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$\lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{2x}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}_{\to\infty} = \infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{2x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{\to 0}}_{\to -\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{2\cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)}^{\to -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \infty}}$$

Erläuterung: *L'Hospitalsche Regel*

Liegt bei $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ein „unbestimmter Ausdruck“ der Form “ $\dfrac{0}{0}$“ oder “ $\dfrac{\infty}{\infty}$“ vor, dann besagt die Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Zähler und Nenner werden einzeln abgeleitet)

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -2x = 0^-$$

(Bemerkung: dieser Grenzwert kann auch mit Hilfe der Merkhilfe für Mathematik (G8) bestimmt werden.)

Teilaufgabe 1b (8 BE)

Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts $E\ (x_E|y_E)$ sowie das Krümmungsverhalten von G_f.

[Teilergebnis: $x_E = \dfrac{2}{e}$]

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

$$f(x) = g(x)\cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$$

In diesem Fall ist $g(x) = 2x$ und $h(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

Für die Logarithmusfunktion gilt: $\quad [\ln(u(x))]' = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

$$f'(x) = 2\cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 2x \cdot \frac{1}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 2$$

Lage von Extrempunkten ermitteln

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, $\quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$

$$2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 2 = 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{2}\right) = -1$$

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Die Exponentialfunktion wird auf beiden Seiten der Gleichung $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = -1$ angewendet.

$e^{\ln\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{-1}$

Da die Exponentialfunktion die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion ist, gilt:

$e^{\ln f(x)} = f(x)$ für beliebige Funktion $f(x)$

Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$\frac{x}{2} = e^{-1}$

$\frac{x}{2} = e^{-1}$

$\Rightarrow \quad x^E = \frac{2}{e}$

Lage des Extrempunkts bestimmen:

$$\begin{aligned} y^E &= f\left(x^E\right) \\ &= f\left(\frac{2}{e}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{2}{e} \cdot \ln\left(\frac{\frac{2}{e}}{2}\right) \\ &= \frac{4}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

Erläuterung: *Logarithmus eines Quotienten*

$\ln\left(\frac{s}{t}\right) = \ln s - \ln t$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{e} \cdot [\underbrace{\ln(1)}_{0} - \underbrace{\ln e}_{1}] \\ &= -\frac{4}{e} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad E\left(\frac{2}{e} \middle| -\frac{4}{e}\right)$ Extrempunkt

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

$f''(x) = \left[2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 2\right]'$

$f''(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{x}$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum)

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum)

$f''\left(x^E\right) = f''\left(\frac{2}{e}\right) = e > 0 \quad \Rightarrow \quad E\left(\frac{2}{e} \middle| -\frac{4}{e}\right)$ Tiefpunkt

Krümmungsverhalten einer Funktion

Vorzeichen der zweiten Ableitung untersuchen:

$f''(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{x} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall rechtsgekrümmt

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall linksgekrümmt

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $f''(x^W) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

$\Rightarrow \quad G_f$ ist für alle $x \in D_f$ linksgekrümmt

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Geben Sie das Verhalten von $f'(x)$ für $x \to 0$ an. Berechnen Sie $f(3)$ und zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Grenzwert bestimmen

$$f'(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 2$$

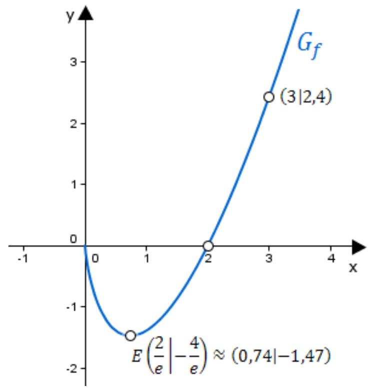
$$\lim_{x\to 0} \underbrace{2\ln\left(\underbrace{\frac{x}{2}}_{\to 0}\right)}_{\to -\infty} + 2 = -\infty$$

Funktionswert berechnen

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(3) = 6\ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,4$$

Skizze



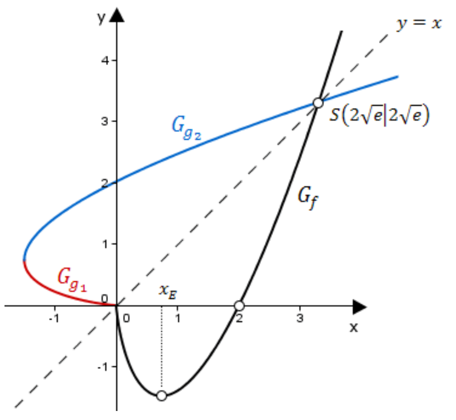
Teilaufgabe 1d (5 BE)

Die Einschränkung von f auf das Intervall $]0;x_E]$ besitzt die Umkehrfunktion g_1, die Einschränkung von f auf das Intervall $[x_E;+\infty[$ die Umkehrfunktion g_2.

Die Graphen von f und g_2 haben den Punkt $S\ (x_S|y_S)$ gemeinsam. Berechnen Sie die Koordinaten von S. Zeichnen Sie die Graphen von g_1 und g_2 in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1c ein.
[Teilergebnis: $x_S = 2\sqrt{e}$]

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Skizze



> Erläuterung: *Umkehrfunktion*
>
> Der Graph der Umkehrfunktion g_1 entsteht durch Spiegelung des Graphen G_f (beschränkt auf das Intervall $]0; x_E[$) an der Winkelhalbierenden $y = x$.
>
> Analoges gilt für g_2 (f beschränkt auf das Intervall $]x_E; \infty[$).

Schnittpunkt zweier Funktionen

Schnittpunkt S zwischen f und der Winkelhalbierenden $y = x$ bestimmen:

> Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*
>
> Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.
>
> Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$$2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) = x \quad | \quad : 2x \quad (x \neq 0)$$

$$\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

> Erläuterung: *Entlogarithmieren*
>
> Die Exponentialfunktion wird (wie in Teilaufgabe 1b)auf beiden Seiten der Gleichung $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$ angewendet.

$$\frac{x}{2} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x^S = 2e^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$$

$$y^S = f\left(x^S\right) = f\left(2\sqrt{e}\right) = 4\sqrt{e}\ln\left(\sqrt{e}\right)$$

> Erläuterung: *Logarithmus einer Potenz*
>
> $\ln\left(s^t\right) = t \cdot \ln s$
>
> Hier:
>
> $\ln(\sqrt{e}) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\ln e}_{1} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad y^S = 2\sqrt{e}$$

$$\Rightarrow \quad S\left(2\sqrt{e}|2\sqrt{e}\right)$$

Teilaufgabe 1e (4 BE)

Ermitteln Sie den Term einer Stammfunktion F von f.
[mögliches Ergebnis: $F(X) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}x^2$]

Lösung zu Teilaufgabe 1e

Stammfunktion bestimmen

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

Stammfunktion bestimmen: $\displaystyle\int 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$

Erläuterung: *Partielle Integration*

Regel für die partielle Integration:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

$u(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad v(x) = x^2$

$$\begin{aligned}\int 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)\, dx &= x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \int x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \int x\, dx \\ &= x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{2} + C\end{aligned}$$

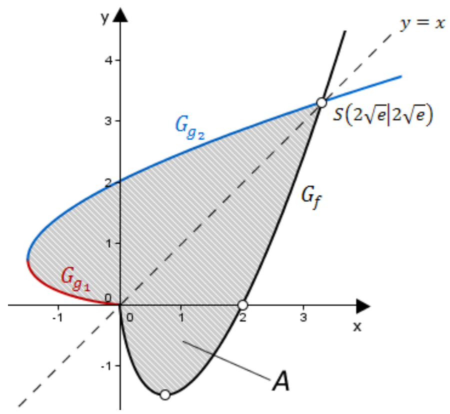
Für $C = 0$ ist z.B. $F(x) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{2}$ eine Stammfunktion von f.

Teilaufgabe 1f (5 BE)

Die Graphen von f, g_1 und g_2 bilden, ergänzt durch den Koordinatenursprung, den Rand eines endlichen Flächenstücks. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

Lösung zu Teilaufgabe 1f

Flächenberechnung



Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Die Fläche, die von den Graphen G_{g_1}, G_{g_2} und G_f begrenzt wird, entspricht (wegen der Symmetrie zwischen Funktion und Umkehrfunktion) zwei mal die Fläche die G_f mit der Winkelhalbierenden $y = x$ einschließt.

Allgemein gilt:

Schneiden sich die Graphen zweier Funktionen f und g an den Stellen $x = a$ und $x = b$ und $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist der Inhalt der Fläche zwischen den zwei Graphen gegeben durch:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$A = 2 \cdot \int_0^{2\sqrt{e}} [x - f(x)]\, dx$$

Erläuterung: *Uneigentliches Integral*

Das uneingentliche Integral $\int\limits_{x_0}^{a} f(x)d\,x$ einer Funktion $f(x)$, die an der Stelle $x = x_0$ eine Definitionslücke besitzt, ist definiert als Grenzwert:

$$\int\limits_{x_0}^{a} f(x)d\,x = \lim_{b\to x_0}\int\limits_{b}^{a} f(x)d\,x = \lim_{b\to x_0}[F(b) - F(a)]$$

wobei F die Stammfunktion zu f ist.

In diesem Fall ist die Funktion f an der Stelle $x = 0$ nicht definiert.

$$= \quad 2\cdot\lim_{b\to 0}\underbrace{\int\limits_{b}^{2\sqrt{e}}[x - f(x)]\ d\,x}_{\overline{A}}$$

Bestimmtes Integral $\overline{A}$ berechnen:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \int\limits_{b}^{2\sqrt{e}}\left[x - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]\ d\,x\\ &= \int\limits_{b}^{2\sqrt{e}} x\,d\,x \quad - \quad \int\limits_{b}^{2\sqrt{e}} 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right)\ d\,x\end{aligned}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Die Stammfunktion $F(x) = x^2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2}$ ist aus Teilaufgabe 1e bekannt.

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{x^2}{2} - x^2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\right]_b^{2\sqrt{e}}\\ &= \left[x^2 - x^2\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]_b^{2\sqrt{e}}\end{aligned}$$

Erläuterung: *Logarithmus einer Potenz*

$\ln\left(s^t\right) = t\cdot\ln s$

Hier:

$\ln\left(\sqrt{e}\right) = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\underbrace{\ln e}_{1} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}&= \left[4e - 4e\overbrace{\ln\left(\sqrt{e}\right)}^{1/2}\right] - \left[b^2 - b^2\ln\left(\frac{b}{2}\right)\right]\\ &= 2e - b^2 + b^2\ln\left(\frac{b}{2}\right)\end{aligned}$$

Grenzwert bestimmen:

$$A \quad = \quad 2\cdot\lim_{b\to 0}\overline{A}$$

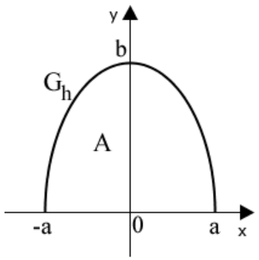
Erläuterung: *Grenzwert*

Aus Teilaufgabe 1a ist bekannt, dass $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ ist.

$$\begin{aligned}&= 2\cdot\lim_{b\to 0} 2e - \underbrace{b^2}_{0} + \underbrace{b^2\ln\left(\frac{b}{2}\right)}_{\to 0}\\ &= 2\cdot 2e\\ &= 4e\end{aligned}$$

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Der Graph G_h der in $[-a;a]$ definierten Funktion h ist eine halbe Ellipse, die die y-Achse im Punkt $(0|b)$ schneidet und mit der x-Achse ein Flächenstück des Inhalts A einschließt ($a, b \in \mathbb{R}^+$; siehe Abbildung). Der Funktionsterm von h wird im Folgenden nicht benötigt.



Weisen Sie nach, dass für jede reelle Zahl r die Beziehung

$$\pi\int_{-a}^{a}(h(x)+r)^2\,dx-\pi\int_{-a}^{a}(-h(x)+r)^2\,dx=2\pi r\cdot 2A$$

gilt, indem Sie die linke Seite der Gleichung geeignet umformen.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Bestimmtes Integral

Umformen der linken Seite:

$$\pi\int_{-a}^{a}(h(x)+r)^2\,\mathrm{dx}-\pi\int_{-a}^{a}(-h(x)+r)^2\,\mathrm{dx}$$

$\Updownarrow$ ausmultiplzieren

$$\pi\int_{-a}^{a}\left(h^2(x)+2\,h(x)r+r^2\right)\,\mathrm{dx}-\pi\int_{-a}^{a}\left(h^2(x)-2\,h(x)r+r^2\right)\,\mathrm{dx}$$

$\Updownarrow$ zusammenfassen

Erläuterung: *Integral einer Summe*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}+\int_a^b g(x)\mathrm{dx}=\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)\,\mathrm{dx}$$

$$\pi\int_{-a}^{a}\left(h^2(x)+2\,h(x)r+r^2-h^2(x)+2\,h(x)r-r^2\right)\,\mathrm{dx}$$

$$\pi\int_{-a}^{a}4\,h(x)r\,\mathrm{dx}$$

$\Updownarrow$ Konstanten aus dem Integral ziehen

$$4\pi\,r\underbrace{\int_{-a}^{a}h(x)\mathrm{dx}}_{A}$$

$\Updownarrow$

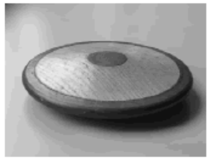
$$4\pi\,r\cdot A$$

$\Updownarrow$

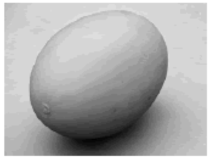
$$2\pi\,r\cdot 2A$$

Teilaufgabe 2b (5 BE)

Geben Sie an, wie die Graphen der in $[-a;a]$ definierten Funktionen $h_1: x\mapsto h(x)+r$ und $h_2: x\mapsto -h(x)+r$ aus G_h hervorgehen.
Durch den Term auf der linken Seite der Gleichung aus Teilaufgabe 2a wird für $r>b$ das Volumen eines Rotationskörpers beschrieben. Für welchen der abgebildeten Gegenstände stellt dieser Rotationskörper bei passender Wahl von a und b ein geeignetes Modell dar? Begründen Sie Ihre Antwort.


Diskus


Donut


Melone

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Erläuterungen zum Entstehen der Funktionsgraphen

G_{h_1} geht durch Verschiebung um r in y-Richtung aus G_h hervor.

G_{h_2} geht durch Spiegelung an der x-Achse und anschließend durch Verschiebung um r in y-Richtung aus G_h hervor.

Rotationskörper

Bei passender Wahl von a und b, stellt

$$\pi \int_{-a}^{a} (h(x)+r)^2 \, dx - \pi \int_{-a}^{a} (-h(x)+r)^2 \, dx$$

das Modell eines Donuts dar.

Begründung durch Skizze:

Erläuterung: *Volumen von Rotationskörpern*

Das Volumen des Körpers, der durch Rotation des Graphen einer Funktion $f(x)$ um die x-Achse entsteht, ist gegeben durch:

$$V = \pi \cdot \int_{a}^{b} [f(x)]^2 \, dx$$

In diesem Fall ist V_1 das Volumen des Körpers, welches durch Rotation von h_1 entsteht („Donut ohne Loch“). Analog dazu V_2 durch Rotation von h_2 („Donutloch“).