Abitur 2011 G8 Abitur Mathematik Infinitesimalrechnung II

Teilaufgabe Teil 1 1 (5 BE)

Skizzieren Sie den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f : x \mapsto 4 - x^2$.
Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Teilaufgabe Teil 1 2 (4 BE)

Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion $f : x \mapsto 3\sqrt{x}$ an und bestimmen Sie den Term derjenigen Stammfunktion von f, deren Graph den Punkt $P(1|4)$ enthält.

Betrachtet wird die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe Teil 1 3a (3 BE)

Geben Sie die Nullstellen von f an.

Teilaufgabe Teil 1 3b (3 BE)

Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$ an.

Teilaufgabe Teil 1 3c (2 BE)

Bestimmen Sie den Term der Ableitung von f.

Teilaufgabe Teil 1 4 (3 BE)

Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f mit Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ an, deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ als Asymptote besitzt und in $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 6 \cdot e^{-0,5x} + x$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe Teil 2 1a (10 BE)

Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_f. Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts $E(x_E|y_E)$ von G_f.

(*zur Kontrolle*: $x_E = 2 \cdot \ln 3$; $f''(x) = 1,5 \cdot e^{-0,5x}$)

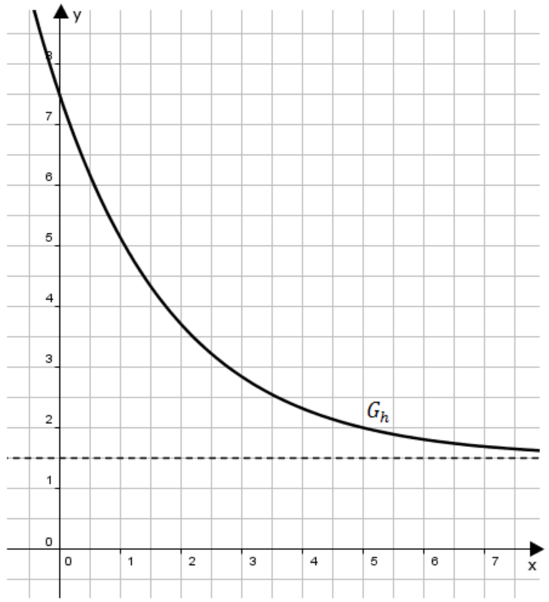
Teilaufgabe Teil 2 1b (3 BE)

Geben Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ an. Machen Sie plausibel, dass G_f für $x \to +\infty$ die Gerade mit der Gleichung $y = x$ als schräge Asymptote besitzt.

Teilaufgabe Teil 2 1c (6 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $(0|6)$.
Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignet anzulegendes Koordinatensystem.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto 6 \cdot e^{-0,5x} + 1,5$.
Die Abbildung zeigt den in $\mathbb{R}$ streng monoton fallenden Graphen G_h von h sowie dessen Asymptote, die durch die Gleichung $y = 1,5$ gegeben ist.



Teilaufgabe Teil 2 2a (4 BE)

Beschreiben Sie, wie G_h aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten natürlichen Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ hervorgeht.

Für $x \geq 0$ beschreibt die Funktion h modellhaft die zeitliche Entwicklung des momentanen Schadstoffausstoßes einer Maschine. Dabei ist x die seit dem Start der Maschine vergangene Zeit in Minuten und $h(x)$ die momentane Schadstoffausstoßrate in Milligramm pro Minute.

Teilaufgabe Teil 2 2b (3 BE)

Geben Sie in diesem Sachzusammenhang die Bedeutung des Monotonieverhaltens von G_h sowie des Grenzwerts von h für $x \to +\infty$ an.

Teilaufgabe Teil 2 2c (6 BE)

Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_h, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ einschließen. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a : x \mapsto 6 \cdot e^{-0{,}5x} - a \cdot x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

Teilaufgabe Teil 2 3a (5 BE)

Weisen Sie nach, dass die Graphen aller Funktionen der Schar die y-Achse im selben Punkt schneiden und in $\mathbb{R}$ streng monoton fallend sind. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = -\infty$ gilt.

Teilaufgabe Teil 2 3b (3 BE)

Aus den Ergebnissen der Aufgabe 3a ergibt sich, dass jede Funktion der Schar genau eine Nullstelle besitzt. Bestimmen Sie für diese Nullstelle in Abhängigkeit von a einen Näherungswert x_1, indem Sie den ersten Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 0$ durchführen.

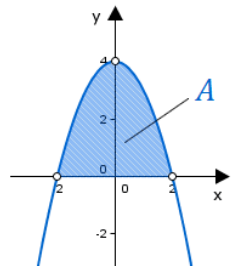
Lösung

Teilaufgabe Teil 1 1 (5 BE)

Skizzieren Sie den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f : x \mapsto 4 - x^2$.
Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 1

Skizze



Erläuterung:

Der Graph der Funktion $f(x) = 4 - x^2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel.

Nullstellen:
$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 2$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 4$

Flächenberechnung

Flächeninhalt bestimmen:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die der Graph von f mit der x-Achse einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$\int_{-2}^{2} f(x)d\,x$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} f(x)d\,x \\ &= \int_{-2}^{2} 4 - x^2\,d\,x \end{aligned}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Für Potenzfunktionen gilt:

$$\int x^n\,d\,x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \neq 1)$$

$$\begin{aligned} &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} \\ &= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Alternative Lösung

Der Graph der Funktion f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, d.h. die Fläche zwischen -2 und 0 ist gleichgroß wie die Fläche zwischen 0 und 2.

$$A = \int_{-2}^{2} f(x)d\,x = 2 \cdot \int_{0}^{2} f(x)d\,x = 2 \cdot \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} - 0\right) = \frac{32}{3}$$

Teilaufgabe Teil 1 2 (4 BE)

Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion $f : x \mapsto 3\sqrt{x}$ an und bestimmen Sie den Term derjenigen Stammfunktion von f, deren Graph den Punkt $P(1|4)$ enthält.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 2

Definitionsbereich bestimmen

$f(x) = 3\sqrt{x}$

Erläuterung: *Wertebereich des Radikanden*

$f(x)$ ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel, also der Radikand x, muss größer oder gleich Null sein.

$x \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad D_f = [0; +\infty[$

Stammfunktion bestimmen

Unbestimmtes Integral bestimmen:

$$\begin{aligned} \int f(x)d\,x &= \int 3\sqrt{x}\,d\,x \\ &= 3\int x^{\frac{1}{2}}\,d\,x \end{aligned}$$

Erläuterung: *Stammfunktion einer Potenzfunktion*

$$\int x^n\,d\,x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \neq 1)$$

Hier:

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,d\,x = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\begin{aligned} &= 3\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\ &= 2x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad F(X) = 2x^{\frac{3}{2}} + C \qquad$ (Menge aller Stammfunktionen)

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Die Koordinaten des Punktes P müssen die Funktionsgleichung von F erfüllen.

Es muss gelten: $F(1) = 4$

$4 = 2 \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C$

$4 = 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2$

Gesuchte Stammfunktion: $F(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 2$

Erläuterung: *Potenzregeln*

$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

Alternative Schreibweise: $F(x) = 2\sqrt{x^3} + 2$

Teilaufgabe Teil 1 3a (3 BE)

Betrachtet wird die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Geben Sie die Nullstellen von f an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3a

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2} \quad , \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dfrac{\sin x}{x^2} = 0$

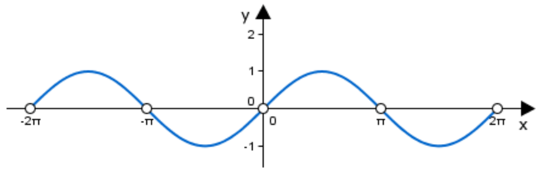
Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$\sin x = 0$

Erläuterung: *Nullstellen der Sinusfunktion*

Graph der Sinusfunktion $\sin x$ zwischen -2π und 2π:



Die Nullstellen der Sinusfunktion, sprich die Schnittpunkte der Funktion mit der x-Achse, wiederholen sich periodisch.

Nullstellen: $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi ...$

Die Null muss in diesem Fall ausgeschlossen werden, da sie nicht im Definitionsbereich der Funktion f liegt.

$x = \pm\pi, \pm 2\pi, ...$

Alternative Schreibweise: $x = k\,\pi \quad$ mit $\quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Teilaufgabe Teil 1 3b (3 BE)

Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3b

Symmetrieverhalten einer Funktion

$$f(x) \quad = \quad \frac{\sin x}{x^2}$$

Symmetrie bestimmen:

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $f(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) \quad = \quad \frac{\sin(-x)}{(-x)^2}$$

Erläuterung: *Sinusfunktion*

Die Sinusfunktion $\sin x$ ist eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion, d.h. es gilt:

$\sin(-x) = -\sin x$

$$= \quad \frac{-\sin x}{x^2}$$

$$= \quad -\frac{\sin x}{x^2}$$

$$= \quad -f(x)$$

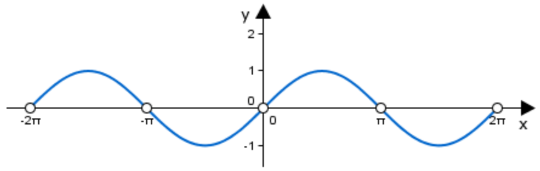
$\Rightarrow \quad f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad = \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{\sin x}^{\text{nicht definiert, aber beschränkt}}}{\underbrace{x^2}_{\to +\infty}} \quad = \quad 0$$

Erläuterung: *Sinusfunktion*

Graph der Sinusfunktion $\sin x$ zwischen -2π und 2π:



Die Funktionswerte der Sinusfunktion schwanken zwischen -1 und 1. Der Grenzwert für $x \to \infty$ ist somit beschränkt.

Teilaufgabe Teil 1 3c (2 BE)

Bestimmen Sie den Term der Ableitung von f.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 3c

Erste Ableitung einer Funktion ermitteln

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$f'(x) \quad = \quad \left[\frac{\sin x}{x^2}\right]'$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = \sin x$ und $v(x) = x^2$.
Dann ist $u'(x) = \cos x$ und $v'(x) = 2x$

$$= \quad \frac{\cos x \cdot x^2 - \sin x \cdot 2x}{x^4}$$

$$(= \quad \frac{x\cdot \cos x - 2\sin x}{x^3})$$

(Vereinfachung ist nicht notwendig)

Teilaufgabe Teil 1 4 (3 BE)

Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f mit Definitionsmenge $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ an, deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ als Asymptote besitzt und in $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 1 4

Funktionsgleichung ermitteln

Beispiel einer Vorgehensweise:

Schritt 1:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$\rightarrow$ Die Funktion hat an der Stelle $x = -1$ eine Polstelle und somit $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Schritt 2:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$$

$\rightarrow$ $y = 2$ ist Asymptote, da $\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to 0} = 2$

Schritt 3:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$\rightarrow$ Die Funktion hat an der Stelle $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel

Teilaufgabe Teil 2 1a (10 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 6\cdot e^{-0,5x} + x$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_f. Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts $E(x_E|y_E)$ von G_f.

(*zur Kontrolle*: $x_E = 2\cdot \ln 3$; $f''(x) = 1,5\cdot e^{-0,5x}$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1a

Erste Ableitung einer Funktion ermittlen

$$f(x) = 6\cdot e^{-0,5x} + x$$

Erste Ableitung bilden:

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)$$

Formel für Eponentialfunktionen:

$$f(x) = e^{v(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{v(x)}\cdot v'(x)$$

Hier ist $v(x) = -0,5x$.
Dann ist $v'(x) = -0,5$.

$$f'(x) = 6\cdot e^{-0,5x}\cdot(-0,5) + 1$$

$f'(x) = -3 \cdot e^{-0,5x} + 1$

Lage von Extrempunkten ermitteln

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0$

$-3 \cdot e^{-0,5x} + 1 = 0 \quad | \quad -1$

$-3 \cdot e^{-0,5x} = -1 \quad | \quad :(-3)$

$e^{-0,5x} = \dfrac{1}{3} \quad | \quad$ logarithmieren

Erläuterung: *Logarithmieren*

Der Logarithmus wird auf beiden Seiten der Gleichung $e^{-0,5x} = \dfrac{1}{3}$ angewendet.

$\ln\left(e^{-0,5x}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt:

$\ln e^{f(x)} = f(x)$ für beliebige Funktion $f(x)$

Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$-0,5x = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$-0,5x = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \quad | \quad \cdot(-2)$

$\Rightarrow \quad x_E = -2\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Erläuterung: *Logarithmus eines Quotienten*

$\ln\left(\dfrac{s}{t}\right) = \ln s - \ln t$

Hier:

$-2\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = -2\left(\underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 3\right) = 2\ln 3$

$\Rightarrow \quad x_E = 2\ln 3$

Lage bestimmen:

$y_E = f(x_E) = f(2\ln 3) = 6 \cdot \underbrace{e^{-0,5\cdot(2\ln 3)}}_{\frac{1}{3}} + 2\ln 3 = 2 + 2\ln 3$

$\Rightarrow \quad E(2\ln 3|2 + 2\ln 3)$ Extrempunkt

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

$f''(x) = -3 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5)$

$f''(x) = 1,5 \cdot e^{-0,5x}$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an der Stelle x^E bestimmen:

$f''(2\ln 3) = 1,5 \cdot e^{-0,5\cdot(2\ln 3)} = 0,5 > 0$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum)

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum)

$\Rightarrow \quad E(2\ln 3|2 + 2\ln 3) \quad$ Tiefpunkt

Monotonieverhalten einer Funktion

G_f ist streng monoton fallend für $x \in]-\infty; 2\ln 3[$.

G_f ist streng monoton steigend für $x \in]2\ln 3; +\infty[$.

Krümmungsverhalten einer Funktion

Vorzeichen der zweiten Ableitung untersuchen:

$f''(x) = 1,5 \cdot \underbrace{e^{-0,5x}}_{>0} > 0 \qquad \text{für alle } x \in D_f$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall rechtsgekrümmt

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall linksgekrümmt

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $f''(x^W) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

$\Rightarrow \quad G_f$ ist linksgekrümmt auf ganz D_f

Teilaufgabe Teil 2 1b (3 BE)

Geben Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ an. Machen Sie plausibel, dass G_f für $x \to +\infty$ die Gerade mit der Gleichung $y = x$ als schräge Asymptote besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1b

Grenzwert bestimmen

$f(x) = 6 \cdot e^{-0,5x} + x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 6 \cdot \underbrace{e^{-0,5x}}_{\to+\infty} + \underbrace{x}_{\to-\infty} = +\infty$

Für sehr große negative x-Werte wächst die e-Funktion deutlich schneller als die Gerade $y = x$.
(e^x „gewinnt über“ x)

Alternative Berechnung (siehe Merkhilfe Seite 2):

$$\lim_{x\to-\infty} 6 \cdot e^{-0,5x} + x = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{6 \cdot e^{-0,5x}}_{\to+\infty} \cdot \left[1 + \underbrace{\frac{x}{6 \cdot e^{-0,5x}}}_{\to 0}\right] = +\infty$$

Asymptoten bestimmen

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{6 \cdot e^{-0,5x}}_{\to 0} + x = \lim\limits_{x\to+\infty} x$

Da $6 \cdot e^{-0,5x}$ für $x \to \infty$ gegen 0 geht, verhält sich f wie $y = x$ für große x.

Teilaufgabe Teil 2 1c (6 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $(0|6)$.
Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignet anzulegendes Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 1c

Tangentengleichung ermitteln

$f(x) = 6 \cdot e^{-0,5x} + x$

$f'(x) = -3 \cdot e^{-0,5x} + 1$

Werte berechnen:

$f'(0) = -2$

$f(0) = 6$

Tangentenformel:

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$y = -2(x - 0) + 6$

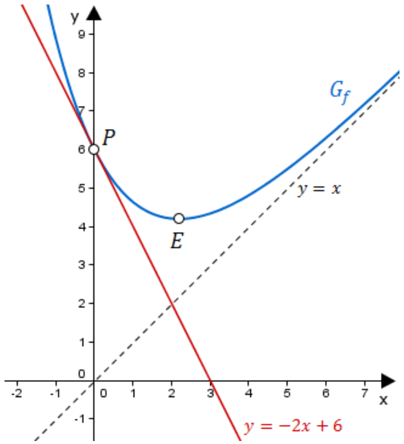
$y = -2x + 6$

Skizze

$E(2\ln 3|2 + 2\ln 3) \approx (2,2|4,2)$ Tiefpunkt

$y = x$ schräge Asymptote

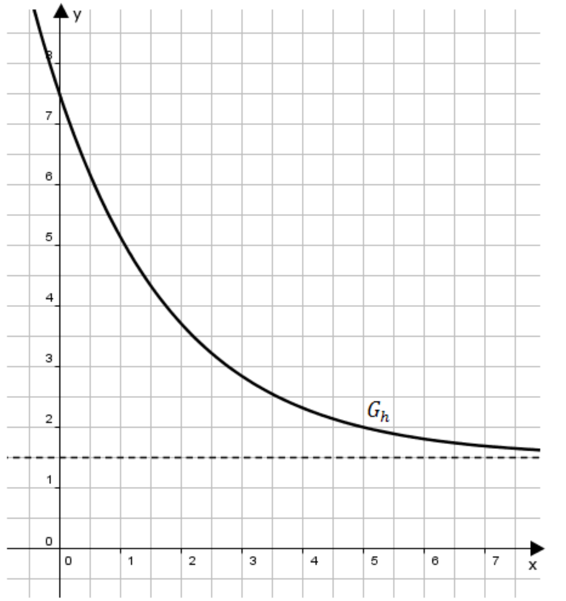
$P(0|6)$



Teilaufgabe Teil 2 2a (4 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto 6 \cdot e^{-0,5x} + 1,5$.
Die Abbildung zeigt den in $\mathbb{R}$ streng monoton fallenden Graphen G_h von h sowie dessen

Asymptote, die durch die Gleichung $y = 1,5$ gegeben ist.



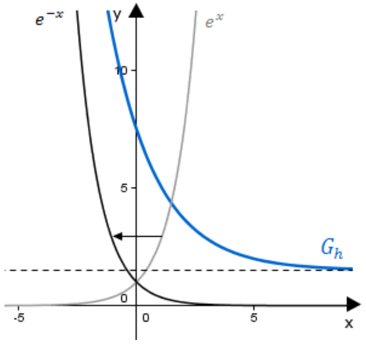
Beschreiben Sie, wie G_h aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten natürlichen Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ hervorgeht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2a

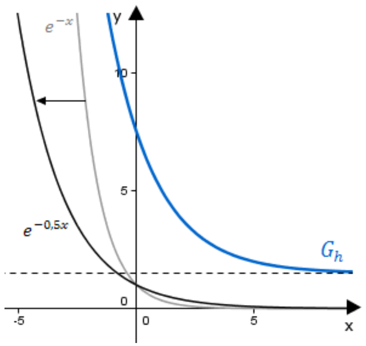
Erläuterungen zum Entstehen der Funktionsgraphen

G_h geht aus dem Graphen von e^x hervor z.B. durch:

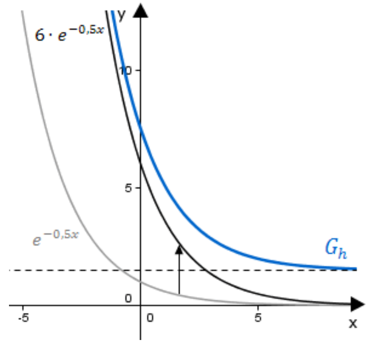
1. Spiegelung an der y-Achse: $e^x \to e^{-x}$



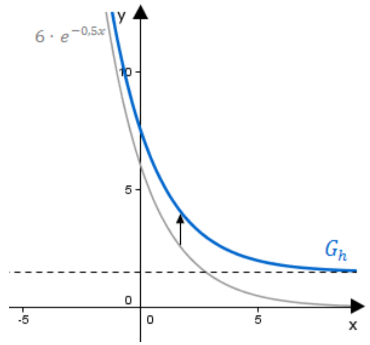
2. Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 2: $e^{-x} \to e^{-0{,}5x}$



3. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 6: $e^{-0{,}5x} \to 6 \cdot e^{-0{,}5x}$



4. Verschiebung um 1,5 Einheiten nach oben entlang der y-Achse: $6 \cdot e^{-0{,}5x} \to 6 \cdot e^{-0{,}5x} + 1,5$



Teilaufgabe Teil 2 2b (3 BE)

Für $x \geq 0$ beschreibt die Funktion h modellhaft die zeitliche Entwicklung des momentanen Schadstoffausstoßes einer Maschine. Dabei ist x die seit dem Start der Maschine vergangene Zeit in Minuten und $h(x)$ die momentane Schadstoffausstoßrate in Milligramm pro Minute.

Geben Sie in diesem Sachzusammenhang die Bedeutung des Monotonieverhaltens von G_h sowie des Grenzwerts von h für $x \to +\infty$ an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2b

Anwendungszusammenhang

G_h ist streng monoton fallend (s. Graph)

Bedeutung Monotonieverhalten:

h beschreibt die Schadstoffausstoß*rate*. Diese fällt/geht zurück, also wird im Laufe der Zeit weniger Schadstoff ausgestoßen.

Bedeutung Grenzwert:

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1{,}5$

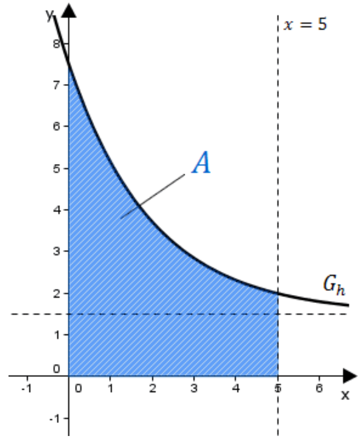
Nach langer Zeit stößt die Maschine konstant $1{,}5\dfrac{\text{mg}}{\text{min}}$ Schadstoff aus.

Teilaufgabe Teil 2 2c (6 BE)

Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_h, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ einschließen. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 2c

Flächenberechnung



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die der Graph von h mit den Koordinatenachse und der Geraden $x = 5$ einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$\int_0^5 h(x)\,d\,x$$

Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 h(x)\,d\,x \\ &= \int_0^5 \left(6\cdot e^{-0{,}5x} + 1{,}5\right)\,d\,x \end{aligned}$$

Erläuterung: *Rechenregeln für Integrale*

Allgemein gelten folgende Rechenregeln für Integrale:

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,d\,x = c\cdot\int_a^b f(x)\,d\,x$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\;d\,x = \int_a^b f(x)\,d\,x + \int_a^b g(x)\,d\,x$$

$$= 6\cdot\int_0^5 e^{-0,5x}\,d\,x + \int_0^5 1,5\,d\,x$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Eine Stammfunktion von $e^{-0,5x}$ wird mit folgender Integrationsregel gebildet (siehe Merkhilfe Seite 3):

$$\int f(a\,x+b)\,d\,x = \frac{1}{a}F(a\,x+b)$$

Mit $a = -0,5$ und $b = 0$ gilt somit:

$$\int e^{-0,5x}\,d\,x = \frac{1}{-0,5}\cdot e^{-0,5x}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{6}{-0,5}\cdot e^{-0,5x} + 1,5x\right]_0^5 \\ &= \left(-12\cdot e^{-2,5} + 7,5\right) - (-12+0) \\ &= 19,5 - 12\cdot e^{-2,5} \\ &\approx 18,5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Maschine stößt in den ersten fünf Minuten ca. 18,5 mg Schadstoff aus.

Teilaufgabe Teil 2 3a (5 BE)

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a : x \mapsto 6\cdot e^{-0,5x} - a\cdot x$ mit $a\in\mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

Weisen Sie nach, dass die Graphen aller Funktionen der Schar die y-Achse im selben Punkt schneiden und in $\mathbb{R}$ streng monoton fallend sind. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty$ gilt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 3a

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

y-Achsenabschnitt bestimmen:

$$f_a(0) = 6\cdot\underbrace{e^{-0,5\cdot 0}}_{1} - a\cdot 0 = 6$$

Der y-Achsenabschnitt ist unabhängig von a. Alle Funktionen der Schar schneiden somit die y-Achse im selben Punkt.

Monotonieverhalten einer Funktion

Erste Ableitung bilden:

$$f'(x) = -3\cdot e^{-0,5x} - a$$

Vorzeichen der ersten Ableitung untersuchen:

$$f'(x) = \underbrace{-3\cdot\underbrace{e^{-0,5x}}_{>0}}_{<0}\;\underbrace{-a}_{<0} < 0$$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

$f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

$\Rightarrow$ streng monoton fallend für alle $a \in \mathbb{R}^+$

Grenzwert bestimmen

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{6\cdot e^{-0,5x}}_{\to 0} \quad \underbrace{-a\cdot x}_{\to-\infty} = -\infty$$

Teilaufgabe Teil 2 3b (3 BE)

Aus den Ergebnissen der Aufgabe 3a ergibt sich, dass jede Funktion der Schar genau eine Nullstelle besitzt. Bestimmen Sie für diese Nullstelle in Abhängigkeit von a einen Näherungswert x_1, indem Sie den ersten Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 0$ durchführen.

Lösung zu Teilaufgabe Teil 2 3b

Newton-Verfahren

Ergebnisse aus Teilaufgabe 3a:

$f_a(0) = 6$
$f_a'(x) = -3\cdot e^{-0,5x} - a$

Newton-Verfahren:

Erläuterung: *Newtonsche Iterationsformel*

Newtonsche Iterationsformel zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für den ersten Schritt, mit Startwert x_0, gilt somit: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_0 = 0$

1.Schritt: $\quad x_1 = x_0 - \dfrac{f_a(x_0)}{f_a'(x_0)} = 0 - \dfrac{6}{-3-a} = \dfrac{6}{3+a}$