Abitur 2011 G8 Abitur Mathematik Geometrie V

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|60|0)$, $B(-80|60|60)$ und $C(-80|0|60)$ gegeben.

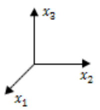
Teilaufgabe 1a (8 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird, in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat E? Berechnen Sie die Größe des Winkels φ, unter dem E die $x_1 x_2$-Ebene schneidet.

(*mögliche Teilergebnisse*: $E: 3x_1 + 4x_3 = 0$; $\varphi \approx 36,9^\circ$)

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Weisen Sie nach, dass der Koordinatenursprung O mit den Punkten A, B und C ein Rechteck $OABC$ festlegt. Bestätigen Sie, dass dieses Rechteck den Flächeninhalt 6000 besitzt, und zeichnen Sie es in ein Koordinatensystem (vgl. Abbildung) ein.



Das Rechteck $OABC$ ist das Modell eines steilen Hanggrundstücks; die positive x_1-Achse beschreibt die südliche, die positive x_2 -Achse die östliche Himmelsrichtung (im Koordinatensystem: 1 LE entspricht 1 m, d. h. die Länge des Grundstücks in West-Ost-Richtung beträgt 60 m.).

Teilaufgabe 1c (3 BE)

Obwohl das Rechteck $OABC$ den Flächeninhalt 6000 besitzt, ist das Hanggrundstück auf einer Landkarte des Grundbuchamts mit einer Größe von 4800 m^2 verzeichnet. Stellen Sie ausgehend von der Zeichnung aus Aufgabe 1b eine Vermutung an, welche sinnvolle Regelung das Grundbuchamt damit bei der Festlegung der Grundstücksgröße umsetzt. Bestätigen Sie Ihre Vermutung durch Rechnung.

Ein Hubschrauber überfliegt das Grundstück entlang einer Linie, die im Modell durch die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, beschrieben wird.

Teilaufgabe 1d (3 BE)

Weisen Sie nach, dass der Hubschrauber mit einem konstanten Abstand von 20 m zum Hang fliegt.

Teilaufgabe 1e (5 BE)

Zeigen Sie, dass dieser Abstand mit der minimalen Entfernung des Hubschraubers vom Mittelpunkt des Grundstücks übereinstimmt, der im Modell durch den Punkt $M(-40|30|30)$ dargestellt wird.

Im Mittelpunkt des Grundstücks wird ein Mast errichtet, der durch vier an seiner Spitze befestigte Seile gehalten wird. Die Verankerungspunkte der Seile im Grundstücksboden sind jeweils 15 m vom Mastfußpunkt entfernt und liegen von diesem aus genau in östlicher, nördlicher, westlicher und südlicher Richtung.

Teilaufgabe 1f (5 BE)

Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des östlichen und nördlichen Verankerungspunkts V_O bzw. V_N.

Lösung

Teilaufgabe 1a (8 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|60|0)$, $B(-80|60|60)$ und $C(-80|0|60)$ gegeben.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird, in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat E? Berechnen Sie die Größe des Winkels φ, unter dem E die x_1x_2-Ebene schneidet.

(*mögliche Teilergebnisse*: $E: 3x_1 + 4x_3 = 0$; $\varphi \approx 36,9^\circ$)

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Ebene aus drei Punkte

$A(0|60|0)$, $B(-80|60|60)$, $C(-80|0|60)$

Richtungsvektoren der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -80 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix}$$

A sei der Aufpunkt der Ebene.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -80 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 3600 \\ -4800 + 4800 \\ 4800 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 0 \\ 4800 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor vereinfachen:

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektor ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor und/oder Normierung sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 1200 geteilt.

Das erleichter das Weiterrechnen wesentlich

$$\overrightarrow{n_E} = \frac{1}{1200} \cdot \begin{pmatrix} 3600 \\ 0 \\ 4800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Normalenform der Ebene E:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E^N : \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{n_E}$$

Hier (A ist Aufpunkt):

$$E: \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \quad E: 3x_1 + 4x_3 = 0$$

Besondere Lage im Koordinatensystem

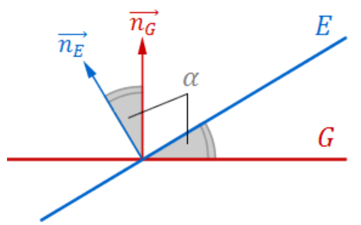
Die x_2-Koordinate von $\overrightarrow{n_E}$ ist Null und A liegt auf der x_2-Achse.

$\Rightarrow \quad E$ enthält die x_2-Achse.

Winkel zwischen zwei Ebenen

$x_1\,x_2$-Ebene: $\quad \overrightarrow{X} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{x_3}} = 0$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

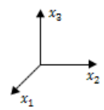
(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{x_3}}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{x_3}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+16} \cdot 1} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36{,}9^\circ$$

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Weisen Sie nach, dass der Koordinatenursprung O mit den Punkten A, B und C ein Rechteck $OABC$ festlegt. Bestätigen Sie, dass dieses Rechteck den Flächeninhalt 6000 besitzt, und zeichnen Sie es in ein Koordinatensystem (vgl. Abbildung) ein.



Lösung zu Teilaufgabe 1b

Skalarprodukt

$A(0|60|0),\ B(-80|60|60),\ C(-80|0|60)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OC}$$

$\Rightarrow$ $OABC$ ist ein Parallelogramm.

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$$

$\Rightarrow$ $OABC$ ist ein Rechteck.

Flächeninhalt eines Rechtecks

$$A_{OABC} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OC}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}\right| = 60 \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot 20 \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right|$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

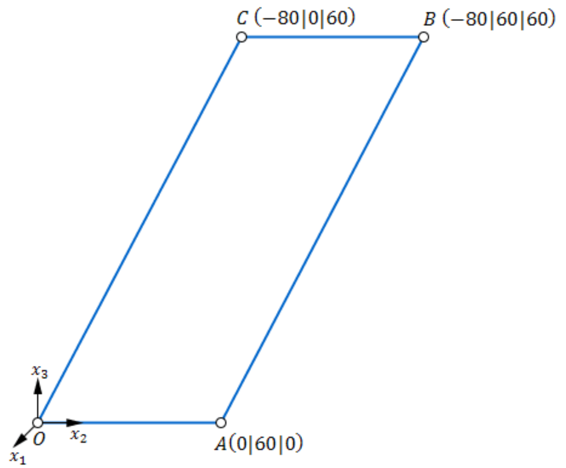
Die Länge (bzw. der Betrag) $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$= 60 \cdot \sqrt{0+1+0} \cdot 20 \cdot \sqrt{16+9}$$

$$= 6000$$

Skizze



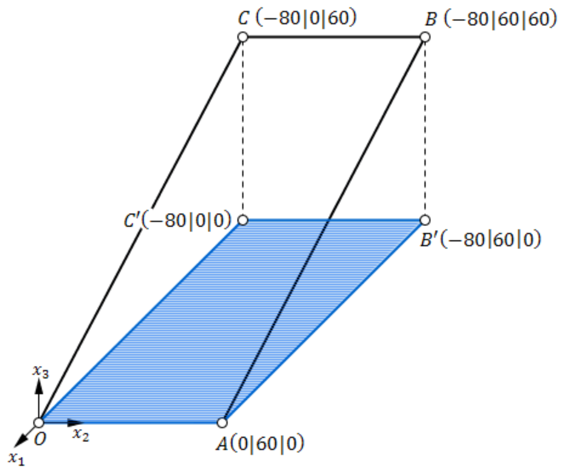
Teilaufgabe 1c (3 BE)

Das Rechteck $OABC$ ist das Modell eines steilen Hanggrundstücks; die positive x_1-Achse beschreibt die südliche, die positive x_2 -Achse die östliche Himmelsrichtung (im Koordinatensystem: 1 LE entspricht 1 m, d. h. die Länge des Grundstücks in West-Ost-Richtung beträgt 60 m.).

Obwohl das Rechteck $OABC$ den Flächeninhalt 6000 besitzt, ist das Hanggrundstück auf einer Landkarte des Grundbuchamts mit einer Größe von 4800 m^2 verzeichnet. Stellen Sie ausgehend von der Zeichnung aus Aufgabe 1b eine Vermutung an, welche sinnvolle Regelung das Grundbuchamt damit bei der Festlegung der Grundstücksgröße umsetzt. Bestätigen Sie Ihre Vermutung durch Rechnung.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Projektion



Vermutung:

Als Grunstücksgröße wird die senkrechte Projektion auf die Horizontalebene ($x_1\,x_2$-Ebene) herangezogen, also das Rechteck $O\,A\,B'\,C'$ mit $B'(-80|60|0)$ und $C'(-80|0|0)$.

$$A = \left|\overrightarrow{O\,A}\right| \cdot \left|\overrightarrow{O\,C'}\right| = 60 \cdot 80 = 4800$$

Teilaufgabe 1d (3 BE)

Ein Hubschrauber überfliegt das Grundstück entlang einer Linie, die im Modell durch die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, beschrieben wird.

Weisen Sie nach, dass der Hubschrauber mit einem konstanten Abstand von 20 m zum Hang fliegt.

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Lagebeziehung Gerade und Ebene

Gegeben: $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}}$

Aus Teilaufgabe 1a: $E : 3x_1 + 4x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Konstanter Abstand $\iff$ g parallel zu E

Erläuterung: *Skalarprodukt, Senkrechte Vektoren*

Ist g parallel zu E, so steht der Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor $\overrightarrow{u}$.

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 12 + 0 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} \perp \overrightarrow{u}$$

$\Rightarrow$ g ist parallel zu E.

Abstand Gerade - Ebene

Hesse-Normalenform der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform $E^{H\,N\,F}$ einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors.

$$E : \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d = 0$$

$$\Rightarrow E^{H\,N\,F} : \frac{\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} = 0$$

d ist das Ergebnis des Skalarprodukts aus $\overrightarrow{n_E}$ und dem Ortsvektor des Aufpunkts von E.

$$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$E^{HNF}: \frac{1}{5} \cdot (3x_1 + 4x_3) = 0$

Abstand g zu E bestimmen:

Erläuterung:

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E, bestimmt man den Abstand des Punktes zur Ebene.

Ist P ein Punkt einer Geraden g, die parallel zur Ebene verläuft, so ist der Abstand des Punktes zur Ebene gleich dem Abstand der Geraden zur Ebene.

$$E^{HNF}: \frac{\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} = 0$$

$$d(g, E) = d(P, E) = \frac{\overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|}$$

d ist das Ergebnis des Skalarprodukts aus $\overrightarrow{n_E}$ und dem Ortsvektor des Aufpunkts von E.

Hier wird der Aufpunkt der Geraden g in die Hesse-Normalenform eingesetzt:

$$d(g, E) = \frac{1}{5} \cdot (3 \cdot (-20) + 4 \cdot 40) = 20$$

Teilaufgabe 1e (5 BE)

Zeigen Sie, dass dieser Abstand mit der minimalen Entfernung des Hubschraubers vom Mittelpunkt des Grundstücks übereinstimmt, der im Modell durch den Punkt $M(-40|30|30)$ dargestellt wird.

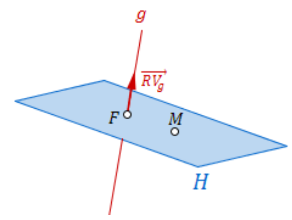
Lösung zu Teilaufgabe 1e

Abstand Punkt - Gerade

Gegeben: $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $M(-40|30|30)$

Zu Zeigen: $d(M, g) = 20$

Erläuterung: *Hilfsebene*



Um den Abstand zwischen einer Geraden g und einen Punkt M bestimmen zu können, bildet man eine Hilfsebene H die den Punkt M beinhaltet und senkrecht zur Geraden g steht.

Diese Ebene schneidet dann die Gerade g in einem Punkt F. Der Abstand entspricht dann der Länge der Strecke $[MF]$.

Hilfsebene durch M senkrecht zu g bilden:

Erläuterung: *Ebenengleichung*

Eine Ebene H ist durch einen Punkt P und einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_H}$ eindeutig bestimmt. Die Ebenengleichung (in Normalenform) lautet:

$$H^N: \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_H} = \overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{n_H}$$

Hier ist der Normalenvektor gleich dem Richtungsvektor (RV) der Geraden g, da die Ebene senkrecht zu ihr stehen soll:

$$\overrightarrow{n_H} = \overrightarrow{RV_g}$$

$$H: \overrightarrow{X} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{RV_g}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{M}} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{RV_g}} \iff H: 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -100$$

g mit H schneiden:

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

Hier wird also g in H eingesetzt und nach λ aufgelöst.

$$
\begin{aligned}
g \cap H: \quad 4(-20+4\lambda)+5(40+5\lambda)-3(40-3\lambda) &= -100 \\
-80+16\lambda+200+25\lambda-120+9\lambda &= -100 \\
50\lambda &= -100 \\
\lambda &= -2
\end{aligned}
$$

$$\lambda = -2 \text{ in } g: \quad \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 30 \\ 46 \end{pmatrix}$$

Abstand bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$
\begin{aligned}
d(M,g) &= \left|\overrightarrow{MF}\right| = \left|\overrightarrow{F} - \overrightarrow{M}\right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} -28 \\ 30 \\ 46 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20
\end{aligned}
$$

Alternative Lösung

Alternativer Rechenweg

$$g: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}}_{G} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{RV_g}}$$

$$
\begin{aligned}
d(M,g) &= \frac{\left|\overrightarrow{MG} \times \overrightarrow{RV_g}\right|}{\left|\overrightarrow{RV_g}\right|} \\
&= \frac{\left| \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+25+9}} = \frac{20 \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{50}} = \frac{20\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = 20
\end{aligned}
$$

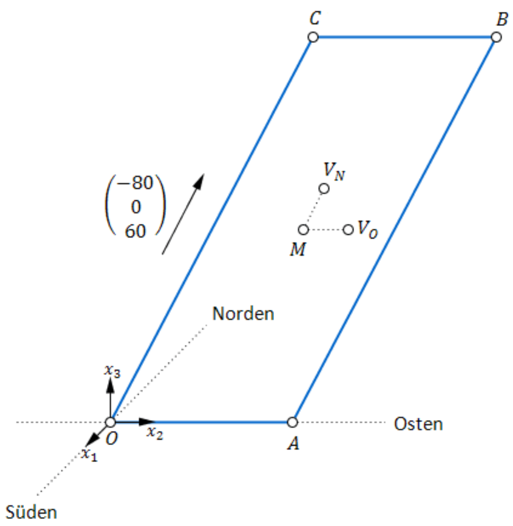
Teilaufgabe 1f (5 BE)

Im Mittelpunkt des Grundstücks wird ein Mast errichtet, der durch vier an seiner Spitze befestigte Seile gehalten wird. Die Verankerungspunkte der Seile im Grundstücksboden sind jeweils 15 m vom Mastfußpunkt entfernt und liegen von diesem aus genau in östlicher, nördlicher, westlicher und südlicher Richtung.

Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des östlichen und nördlichen Verankerungspunkts V_O bzw. V_N.

Lösung zu Teilaufgabe 1f

Lage eines Punktes



Gegeben: $M(-40|30|30)$

Verankerungspunkt V_O bestimmen:

$\overrightarrow{V_O} = \overrightarrow{M} + 15 \cdot \overrightarrow{x_2}$

$$\overrightarrow{V_O} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_O(-40|45|30)$$

Verankerungspunkt V_N bestimmen:

Nördliche Hangrichtung ist gegeben durch $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Erläuterung: *Einheitsvektor*

Ein Einheitsvektor (normierter Vektor) hat die Länge 1.
Um den Einheitsvektor zu einem gegebenen Vektor zu bestimmen, muss durch den Betrag des Vektors geteilt werden:

$$\overrightarrow{a}^0 = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$$

Der Einheitsvektor $\overrightarrow{a}^0$ zeigt in dieselbe Richtung wie $\overrightarrow{a}$, hat aber die Länge 1.

$\overrightarrow{OC}$ normieren : $\quad \overrightarrow{OC}^0 = \dfrac{\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|} = \dfrac{1}{100}\begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{V_N} = \overrightarrow{M} + 15 \cdot \overrightarrow{OC}^0$

$$\overrightarrow{V_N} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} + \frac{15}{100}\begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ 30 \\ 39 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_N(-52|30|39)$$