Abitur 2011 G9 Abitur Mathematik GK Stochastik IV

In einer bayerischen Großstadt findet das jährliche Volksfest statt. Die Attraktion ist die Achterbahn mit ihren zwölf Wagen, von denen fünf gelb, vier rot und drei blau sind. Beim Aufbau der Achterbahn werden die zwölf Wagen hintereinander auf die Schienen gestellt und aneinandergehängt.

Teilaufgabe 1a (6 BE)

Wie viele Anordnungen der Wagen sind möglich, wenn diese

α) nur nach der Farbe unterschieden werden?

β) nur nach der Farbe unterschieden werden und die drei blauen Wagen direkt hintereinander fahren sollen?

Teilaufgabe 1b (5 BE)

Die Fahrgäste werden den einzelnen Wagen vor jeder Fahrt zufällig zugewiesen. Wie oft muss ein Besucher des Volksfests mindestens mit der Achterbahn fahren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% wenigstens einmal in einem roten Wagen zu sitzen?

Von den zahlreichen Personen, die am Abend Riesenrad fahren, sind erfahrungsgemäß 40% Minderjährige und 60% Erwachsene. Am ersten Abend wird an 15 zufällig ausgewählte Fahrgäste jeweils ein Freifahrschein vergeben.

Teilaufgabe 2a (3 BE)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 15 Freifahrscheinen genau drei an Minderjährige gehen?

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 15 Freifahrscheinen die letzten drei an Minderjährige gehen?

Teilaufgabe 2c (4 BE)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 15 Freifahrscheinen mehr als die Hälfte an Erwachsene gehen?

Von den Besuchern des Festzelts sind 20% mit der Sauberkeit im Zelt unzufrieden. 30% der Festzeltbesucher sind zwar mit der Sauberkeit im Zelt, jedoch nicht mit der Freundlichkeit der Bedienungen zufrieden. Es werden die beiden folgenden Ereignisse betrachtet.

F : „Ein zufällig ausgewählter Besucher des Festzelts ist mit der Freundlichkeit der Bedienungen zufrieden.“

S : „Ein zufällig ausgewählter Besucher des Festzelts ist mit der Sauberkeit im Zelt zufrieden.“

Teilaufgabe 3a (5 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von F . Gehen Sie dazu von der Unabhängigkeit der Ereignisse F und S aus.

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Welche der folgenden Mengen beschreiben das Ereignis „Höchstens eines der beiden Ereignisse F und S tritt ein.“ ? Kreuzen Sie an.

☐ $F \cup S$
☐ $F \cap S$
☐ $\overline{F \cap S}$
☐ $(F \cap \overline{S}) \cup (\overline{F} \cap S) \cup (\overline{F} \cap \overline{S})$
☐ $(F \cap \overline{S}) \cup (\overline{F} \cap S)$
☐ $\overline{F} \cup \overline{S}$

(Hinweis: Für jedes falsch gesetzte oder fehlende Kreuz wird eine der erreichbaren Bewertungseinheiten abgezogen.)

An einem Tombolastand schwimmen in einem Becken 20 Kunststoffenten, die sich nur dadurch unterscheiden, dass sie auf ihren Unterseiten von 1 bis 20 durchnummeriert sind. Ein Spiel besteht darin, zwei Enten ohne Zurücklegen zu angeln und die beiden vorher nicht sichtbaren, auf ihren Unterseiten befindlichen Zahlen zu addieren.

Teilaufgabe 4a (3 BE)

Wie viele verschiedene Summenwerte sind bei dem Spiel möglich?

Teilaufgabe 4b (3 BE)

Begründen Sie, dass nicht alle Summenwerte gleichwahrscheinlich sind.

Teilaufgabe 4c (5 BE)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den Summenwert 10 ?

Lösung

Teilaufgabe 1a (6 BE)

In einer bayerischen Großstadt findet das jährliche Volksfest statt. Die Attraktion ist die Achterbahn mit ihren zwölf Wagen, von denen fünf gelb, vier rot und drei blau sind. Beim Aufbau der Achterbahn werden die zwölf Wagen hintereinander auf die Schienen gestellt und aneinandergehängt.

Wie viele Anordnungen der Wagen sind möglich, wenn diese

α) nur nach der Farbe unterschieden werden?

β) nur nach der Farbe unterschieden werden und die drei blauen Wagen direkt hintereinander fahren sollen?

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Kombinatorik

12 Wagen: 5 gelbe, 4 rote, 3 blaue

> Erläuterung: *Permutation*
>
> Die 12 Wagen lassen sich auf $12!$ verschiedene Arten anordnen (permutieren).
>
> Da nur nach Farbe unterschieden wird, müssen von den $12!$ Möglichkeiten, diejenigen ausgeschlossen werden die zu viel gezählt werden (da eine Reihenfolge von Wagen der gleichen Farbe nicht mehr wichtig ist). Das sind $5!$ Möglichkeiten für die gelben, $4!$ für die roten und $3!$ für die blauen Wagen.
>
> Man nennt so einen Situation „Permutation ohne Reihenfolge".
> (MISSISSIPPI - Aufgabe)

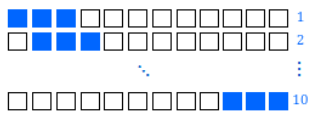
α) $|A| = \dfrac{12!}{5! \cdot 4! \cdot 3!} = 27720$

Alternativ:

> Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*
>
> Die Situation entspricht Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, also $\binom{n}{k}$.
> Für ein besseres Verständnis, stellt man sich vor man würde die Wagen auf 12 Positionen verteilen
>
> 5 gelbe Wagen werden auf 12 verfügbare Positionen verteilt, also $\binom{12}{5}$.
>
> Es bleiben $12 - 5 = 7$ freie Positionen.
>
> 4 rote Wagen werden dann auf 7 verfügbare Positionen verteilt, also $\binom{7}{4}$.
>
> Es bleiben $7 - 4 = 3$ freie Positionen.
>
> 3 blaue Wagen werden auf 3 verfügbare Positionen verteilt, also $\binom{3}{3}$.

$|A| = \binom{12}{5} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3} = 27720$

β) $|B| = \left(1 \cdot \dfrac{9!}{5! \cdot 4!}\right) \cdot 10 = 1260$

> Erläuterung: *Permutation*
>
> Für die 3 hintereinander fahrenden blauen Wagen gibt es eine einzige mögliche Anordnung, da nur nach Farbe unterschieden wird. Weiterhin kann man den 3-Wagenblock bei 12 möglichen Positionen 10 Mal durchschieben:
>
> 
>
>
> Für die restlichen 9 Wagen gilt dasselbe Prinzip der „Permutation ohne Reihenfolge" wie im Fall α).

Teilaufgabe 1b (5 BE)

Die Fahrgäste werden den einzelnen Wagen vor jeder Fahrt zufällig zugewiesen. Wie oft muss ein Besucher des Volksfests mindestens mit der Achterbahn fahren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% wenigstens einmal in einem roten Wagen zu sitzen?

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Binomialverteilung

Treffer = Besucher sitzt in einem roten Wagen
Niete = Besucher sitzt nicht in einem roten Wagen

> Erläuterung:
>
> 4 von 12 Wagen sind rot.

$p = P(\text{Treffer}) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

$q = P(\text{Niete}) = 1 - p = \dfrac{2}{3}$

n Anzahl der Fahrten (die zu bestimmen sind)

$Z \geq 1$ wenigstens ein Treffer

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Besucher wenigstens einmal in einem roten Wagen sitzt, soll mehr als 95% betragen. Es gilt somit:

$P^n_{\frac{1}{3}}(Z \geq 1) > 0{,}95$

> Erläuterung: *Gegenereignis*
>
> Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(\text{mind. 1 Treffer})$ können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.
>
> $P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$

$1 - P^n_{\frac{1}{3}}(Z = 0) > 0{,}95$

> Erläuterung: *Bernoulli-Formel*
>
> Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:
>
> $P(\text{k Treffer}) = P^n_p(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
>
> Dabei ist:
>
> $n =$ Anzahl der Versuche
> $k =$ Anzahl der Treffer
> $p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
> $1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch
>
> Spezialfall $k = 0$:
>
> $P(\text{0 Treffer}) = P^n_p(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$
>
> $\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$
>
> Hier: $P(\text{0 Treffer}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n > 0{,}95$

> Erläuterung: *Rechenweg*
>
> $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n > 0{,}95$
>
> $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 1 - 0{,}95 \quad |$ logarithmieren
>
> $\ln \left(\dfrac{2}{3}\right)^n < \ln(1 - 0{,}95)$
>
> $n \cdot \ln \left(\dfrac{2}{3}\right) < \ln(0{,}05) \quad | : \underbrace{\ln \left(\dfrac{2}{3}\right)}_{<0}$
>
> (da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)
>
> $n > \dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

$n > \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

$n > 7,38$

$\Rightarrow n \geq 8$

Ein Besucher muss mindestens 8 mal mit der Achterbahn fahren.

Teilaufgabe 2a (3 BE)

Von den zahlreichen Personen, die am Abend Riesenrad fahren, sind erfahrungsgemäß 40% Minderjährige und 60% Erwachsene. Am ersten Abend wird an 15 zufällig ausgewählte Fahrgäste jeweils ein Freifahrschein vergeben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 15 Freifahrscheinen genau drei an Minderjährige gehen?

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Binomialverteilung

Sei p_M die Wahrscheinlichkeit, dass ein Minderjähriger am Abend Rieserad fährt.

Aus der Einleitung und dem Text der Teilaufgabe folgt:

$p_M = P(\text{Treffer}) = 40\% = 0,4$

$n = 15$ (Freifahrschein)

$Z = 3$ (genau 3 Minderjährige)

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$P_{0,4}^{15}(Z = 3) = \binom{15}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^{12} \approx 0,063 = 6,3\%$

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 15 Freifahrscheinen die letzten drei an Minderjährige gehen?

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Binomialverteilung

Sei p_M die Wahrscheinlichkeit, dass ein Minderjähriger am Abend Riesenrad fährt.

Aus der Einleitung und dem Text der Teilaufgabe folgt:

$p_M = P(\text{Treffer}) = 40\% = 0,4$

Erläuterung:

Hier ist $n = 3$, da die Anzahl der Freifahrscheine, die zu vergeben sind, 3 Stück ist. Die Tatsache, dass es die letzten sein sollen, spielt keine Rolle.

$n = 3$ (letzten 3 Freifahrschein)

$Z = 3$ (genau 3 Minderjährige)

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = n$:

$$P(n \text{ Treffer}) = P_p^n(Z = n) = \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} \cdot p^n \cdot \underbrace{(1-p)^{\overbrace{n-n}^{0}}}_{1}$$

$\Rightarrow P(n \text{ Treffer}) = p^n$

$P_{0,4}^3(Z = 3) = 0,4^3 = 0,064 = 6,4\%$

Teilaufgabe 2c (4 BE)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 15 Freifahrscheinen mehr als die Hälfte an Erwachsene gehen?

Lösung zu Teilaufgabe 2c

Binomialverteilung

Sei p_E die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erwachsener am Abend Rieserad fährt.

Aus der Einleitung und dem Text der Teilaufgabe folgt:

$p_M = P(\text{Treffer}) = 60\% = 0,6$

$n = 15$ (Freifahrscheine)

$Z \geq 8$ (mehr als die Hälfte)

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung: *Gegenereignis*

Es wird das Gegenereignis betrachtet:

P(mindestens k Treffer) = 1 - P(höchstens k-1 Treffer)

$P_{0,6}^{15}(Z \geq 8) = 1 - P_{0,6}^{15}(Z \leq 7)$

(Wert wird im stoch. Tafelwerk abgelesen)

$P_{0,6}^{15}(Z \geq 8) = 1 - 0,21310 \approx 78,7\%$

Teilaufgabe 3a (5 BE)

Von den Besuchern des Festzelts sind 20% mit der Sauberkeit im Zelt unzufrieden. 30% der Festzeltbesucher sind zwar mit der Sauberkeit im Zelt, jedoch nicht mit der Freundlichkeit der Bedienungen zufrieden. Es werden die beiden folgenden Ereignisse betrachtet.

F: „Ein zufällig ausgewählter Besucher des Festzelts ist mit der Freundlichkeit der Bedienungen zufrieden.“

S: „Ein zufällig ausgewählter Besucher des Festzelts ist mit der Sauberkeit im Zelt zufrieden.“

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von F. Gehen Sie dazu von der Unabhängigkeit der Ereignisse F und S aus.

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Ereignisse:

F: „Ein zufällig ausgewählter Besucher des Festzelts ist mit der Freundlichkeit der Bedienungen zufrieden.“

S : „Ein zufällig ausgewählter Besucher des Festzelts ist mit der Sauberkeit im Zelt zufrieden.“

Aus der Einleitung der Teilaufgabe 3a:

„Von den Besuchern des Festzelts sind 20% mit der Sauberkeit im Zelt unzufrieden.“

$\Rightarrow P(\overline{S}) = 0,20$

$\Rightarrow P(S) = 1 - 0,20 = 0,80$

	F	$\overline{F}$	
S			$P(S) = 0{,}8$
$\overline{S}$			$P(\overline{S}) = 0{,}2$
			1

“ 30% der Festzeltbesucher sind zwar mit der Sauberkeit im Zelt, jedoch nicht mit der Freundlichkeit der Bedienungen zufrieden“

$\Rightarrow P(S \cap \overline{F}) = 0,30$

$\Rightarrow P(S \cap F) = 0,80 - 0,30 = 0,50$

	F	$\overline{F}$	
S	$P(S \cap F) = 0{,}50$	$P(S \cap \overline{F}) = 0{,}30$	$P(S) = 0{,}8$
$\overline{S}$			$P(\overline{S}) = 0{,}2$
			1

Stochastische Unabhängigkeit

$P(F)$ bestimmen:

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

Die Wahrscheinlichkeiten werden aus der Vier-Felder-Tafel entnommen.

$P(S \cap F) = P(S) \cdot P(F)$

$$\Rightarrow P(F) = \frac{P(S \cap F)}{P(S)} = \frac{0,50}{0,80} = 0,625 = 62,5\%$$

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Welche der folgenden Mengen beschreiben das Ereignis „Höchstens eines der beiden Ereignisse F und S tritt ein.“ ? Kreuzen Sie an.

☐ $F \cup S$
☐ $F \cap S$
☐ $\overline{F \cap S}$
☐ $(F \cap \overline{S}) \cup (\overline{F} \cap S) \cup (\overline{F} \cap \overline{S})$
☐ $(F \cap \overline{S}) \cup (\overline{F} \cap S)$
☐ $\overline{F} \cup \overline{S}$

(Hinweis: Für jedes falsch gesetzte oder fehlende Kreuz wird eine der erreichbaren Bewertungseinheiten abgezogen.)

Lösung zu Teilaufgabe 3b

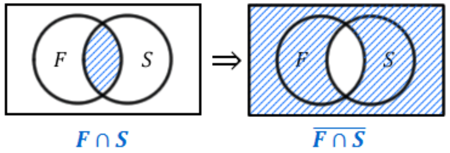
Ereignis beschreiben

Folgende Mengen beschreiben das genannte Ereignis:

Erläuterung: *Ereignis*

Das Gegenereignis lautet „Beide Ereignisse treten ein“ , also $F \cap S$. Das Ereignis ist gleich dem Gegenteil vom Gegenereignis, also das Komplement.

$$\Rightarrow \underbrace{\overline{F \cap S}}_{\text{nicht F und S zusammen}}$$



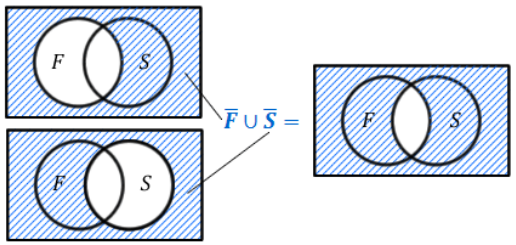
⊠ $\overline{F \cap S}$

Erläuterung: *Ereignis*

Das Ereignis „Höchstens eines der beiden Ereignisse F und S tritt ein“ bedeutet:

Entweder tritt F nicht ein (d.h. S tritt ein oder nicht) **oder** es tritt S nicht ein (d.h. F tritt ein oder nicht)

$$\Rightarrow \underbrace{\overline{F}}_{\text{nicht F}} \cup \underbrace{\overline{S}}_{\text{nicht S}}$$



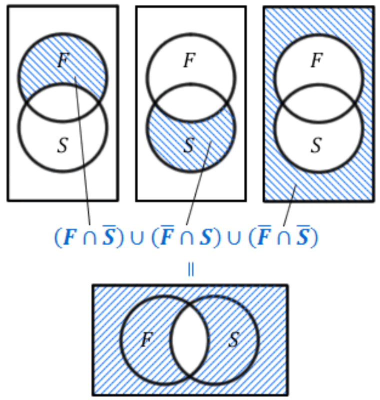
⊠ $\overline{F} \cup \overline{S}$

Erläuterung: *Ereignis*

Das Ereignis „Höchstens eines der beiden Ereignisse F und S tritt ein“ bedeutet:

Entweder tritt F und nicht S ein **oder** S und nicht F **oder** keines der beiden Ereignisse treten ein (also nicht F und nicht S).

$$\Rightarrow \underbrace{(F \cap \overline{S})}_{\text{F und nicht S}} \cup \underbrace{(\overline{F} \cap S)}_{\text{nicht F und S}} \cup \underbrace{(\overline{F} \cap \overline{S})}_{\text{nicht F und nicht S}}$$



⊠ $(F \cap \overline{S}) \cup (\overline{F} \cap S) \cup (\overline{F} \cap \overline{S})$

Teilaufgabe 4a (3 BE)

An einem Tombolastand schwimmen in einem Becken 20 Kunststoffenten, die sich nur dadurch unterscheiden, dass sie auf ihren Unterseiten von 1 bis 20 durchnummeriert sind. Ein Spiel besteht darin, zwei Enten ohne Zurücklegen zu angeln und die beiden vorher nicht sichtbaren, auf ihren Unterseiten befindlichen Zahlen zu addieren.

Wie viele verschiedene Summenwerte sind bei dem Spiel möglich?

Lösung zu Teilaufgabe 4a

Kombinatorik

Mögliche Summenwerte: $\underbrace{3}_{(1+2)}, 4, 5, \ldots, \underbrace{39}_{(19+20)}$

Es gibt somit $39 - 2 = 37$ verschiedene Summenwerte (die Summenwerte 1 und 2 können nicht erreicht werden).

Teilaufgabe 4b (3 BE)

Begründen Sie, dass nicht alle Summenwerte gleichwahrscheinlich sind.

Lösung zu Teilaufgabe 4b

Wahrscheinlichkeit

Begründung:

Nicht alle Summenwerte sind gleichwahrscheinlich, da die Anzahl der Möglichkeiten einen Summenwert zu erzielen nicht für jeden Summenwert gleich groß ist, aber $|\Omega|$ (Anzahl aller möglichen Summenterme) stets gleich groß ist.

Beispiele:

Summenwert 3:

Möglichkeiten: 1+2, 2+1 $\Rightarrow$ Anzahl der Möglichkeiten = 2

$$P(\text{Summenwert } 3) = \frac{2}{|\Omega|}$$

Summenwert 5:

Möglichkeiten: 1+4, 2+3, 3+2, 4+1 $\Rightarrow$ Anzahl der Möglichkeiten = 4

$$P(\text{Summenwert } 5) = \frac{4}{|\Omega|}$$

Teilaufgabe 4c (5 BE)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den Summenwert 10?

Lösung zu Teilaufgabe 4c

Ziehen mit Reihenfolge ohne Zurücklegen

Anzahl der Möglichkeiten für den Summenwert 10: 8
(günstige Fälle)

$$\underbrace{(1+9), (2+8), (3+7), (4+6), (6+4), (7+3), (8+2), (9+1)}_{8 \text{ Möglichkeiten}}$$

Erläuterung: *Ziehen mit Reihenfolge ohne Zurücklegen*

In diesem Spiel handelt es sich um $k = 2$ mal Ziehen einer Kunststoffente aus einem Becken mit $n = 20$ verschiedene Enten ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge.

Die Anzahl aller möglichen Ziehungen ist gegeben durch: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Also gilt: $|\Omega| = \dfrac{20!}{(20-2)!} = \dfrac{20!}{18!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18!} = 20 \cdot 19$

Anzahl der möglichen Fälle:

$$|\Omega| = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19$$

Wahrscheinlichkeit für den Summenwert 10:

$$P(\text{Summenwert } 10) = \frac{8}{20 \cdot 19} \approx 2,1\%$$