Abitur 2011 G9 Abitur Mathematik GK Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \ln\left(4 - x^2\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 1a (7 BE)

Zeigen Sie, dass $D_g =]-2;2[$ gilt, und geben Sie das Symmetrieverhalten von G_g an. Bestimmen Sie die Nullstellen von g sowie das Verhalten von g an den Rändern von D_g.

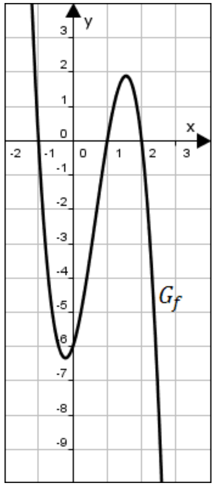
Teilaufgabe 1b (5 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von g und bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_g.

Teilaufgabe 1c (2 BE)

Skizzieren Sie G_g unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in einem Koordinatensystem.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto -3x^3 + 6x^2 + 3x - 6$, die die Nullstellen 1, -1 und 2 besitzt. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



Teilaufgabe 2a (5 BE)

Die Tangente t an G_f im Punkt $(1|0)$ legt mit den Koordinatenachsen im IV. Quadranten ein Dreieck fest. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt A.
[Ergebnis: $A = 3$]

Teilaufgabe 2b (7 BE)

Berechnen Sie die Inhalte der beiden Flächenstücke, die G_f mit der x-Achse einschließt.
[Ergebnis: Flächeninhalte: 8 und $1,25$]

Betrachtet wird nun die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F : x \mapsto \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$. Der Graph von F wird mit G_F bezeichnet.

Teilaufgabe 2c (4 BE)

Begründen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von F, dass F genau eine Nullstelle hat.

Teilaufgabe 2d (5 BE)

Welche Funktionswerte von F lassen sich aus den in Teilaufgabe 2b berechneten Flächeninhalten ermitteln? Geben Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_F an.

Teilaufgabe 2e (5 BE)

Ermitteln Sie unter Verwendung des in Teilaufgabe 2a berechneten Flächeninhalts A einen Näherungswert für $F(0)$. Skizzieren Sie G_F in der Abbildung zu Aufgabe 2 unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

Lösung

Teilaufgabe 1a (7 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \ln\left(4 - x^2\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

Zeigen Sie, dass $D_g =]-2;2[$ gilt, und geben Sie das Symmetrieverhalten von G_g an. Bestimmen Sie die Nullstellen von g sowie das Verhalten von g an den Rändern von D_g.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Definitionsbereich bestimmen

$g(x) = \ln\left(4 - x^2\right)$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

$g(x)$ ist eine Logarithmusfunktion des Typs $\ln(h(x))$.

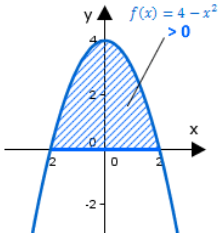
Die ln-Funktion ist nur für positive Werte in ihrem Argument definiert.
Somit gilt für die Argumentfunktion $h(x) > 0$.

In diesem Fall: $4 - x^2 > 0$

$4 - x^2 > 0$

Erläuterung:

$4 - x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$



Der Graph der Funktion $4 - x^2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Sie hat positive Funktionswerte zwischen ihren Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

$\Rightarrow \quad -2 < x < 2$

$\Rightarrow \quad D_g =]-2;2[$

Symmetrieverhalten einer Funktion

Symmetrie bestimmen:

Erläuterung: *Symmetrieverhalten*

Man ermittelt zunächst $g(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:

G_g ist achsensymmetrisch zur y-Achse wenn gilt: $g(-x) = g(x)$

G_g ist punktsymmetrisch zum Ursprung wenn gilt: $g(-x) = -g(x)$

$g(-x) = \ln\left(4 - (-x)^2\right) = \ln\left(4 - x^2\right) = g(x)$

$\Rightarrow \quad G_g$ ist achsensymmetrisch zum zur y-Achse.

Nullstellen einer Funktion

Nullstellen bestimmen:

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$g(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln\left(4 - x^2\right) = 0$

Erläuterung: *Nullstellen einer Logarithmusfunktion*

Da $\ln 1 = 0$, nimmt die Logarithmusfunktion $\ln\left(4 - x^2\right)$ den Wert Null an, wenn das Argument $4 - x^2 = 1$ ist.

$4 - x^2 = 1$

$x^2 = 3$

$\Rightarrow \quad x^N_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

Die Ränder des Definitionsbereichs sind $x = -2$ und $x = 2$.

Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*

Ist der Rand des Definitionsbereich eine Definitionslücke, also eine Stelle x_0 die nicht zum Definitionsbereich gehört (Stichwort: offenes Intervall), so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (rechtsseitiger Grenzwert) , wenn x_0 am linken Rand liegt (z.B. $]x_0; +\infty[$)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ (linksseitiger Grenzwert) , wenn x_0 am rechten Rand liegt (z.B. $]-\infty; x_0[$)

Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von rechts.

Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von links.

Grenzwert gegen $x = -2^+$ (Annäherung von rechts an -2):

$$\lim_{x \to -2^+} \ln \underbrace{\left(4 - x^2\right)}_{\to 0^+} = -\infty$$

Grenzwert gegen $x = 2^-$ (Annäherung von links an 2):

$$\lim_{x \to 2^-} \ln \underbrace{\left(4 - x^2\right)}_{\to 0+} = -\infty$$

Teilaufgabe 1b (5 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von g und bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_g.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Monotonieverhalten einer Funktion

Erste Ableitung bilden:

$$g'(x) = \left[\ln\left(4 - x^2\right)\right]'$$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Formel für Logarithmusfunktionen:

$$f(x) = \ln(v(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{4 - x^2} \cdot (-2x)$$

$$g'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$$

Prüfen für welche Werte die erste Ableitung positiv bzw. negativ ist:

Zähler: $-2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$

Erläuterung:

Die Funktion $4 - x^2$ ist positiv im Definitionsbereich D_g, siehe dazu Teilaufgabe 1a.

Nenner: $4 - x^2 > 0$ für $x \in D_g =]-2; 2[$

Erläuterung:

Die erste Ableitung ist ein Bruch.

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$)

$g'(x) > 0$ für $x \in]-2;0[$

$g'(x) < 0$ für $x \in]0;2[$

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

$f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

$\Rightarrow \quad g$ ist streng monoton steigend für $x \in]-2;0[$

$\Rightarrow \quad g$ ist streng monoton fallend für $x \in]0;2[$

Art von Extrempunkten ermitteln

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$$g'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-2x}{4-x^2} = 0$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$-2x = 0$

$\Rightarrow x^E = 0$

Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle $x^E = 0$

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Die Art eines Extrempunkts wird durch das Vorzeichen der Ableitung bestimmt:

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(+)$ nach $(-)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt (Maximum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von $(-)$ nach $(+)$ an der Stelle x^E vor, so hat der Graph der Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt (Minimum).

G_g hat an der Stelle $x^E = 0$ einen Hochpunkt.

$y^E = f\left(x^E\right) = f(0) = \ln 4$

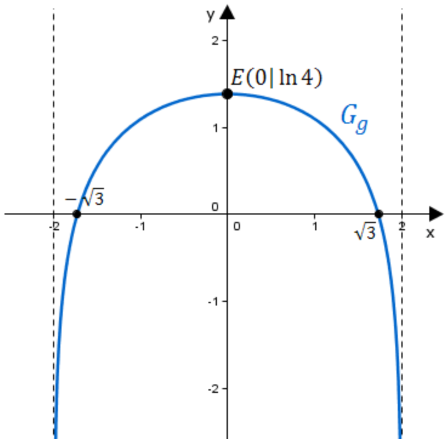
$\Rightarrow \quad E(0|\ln 4)$ Hochpunkt

Teilaufgabe 1c (2 BE)

Skizzieren Sie G_g unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in einem Koordinatensystem.

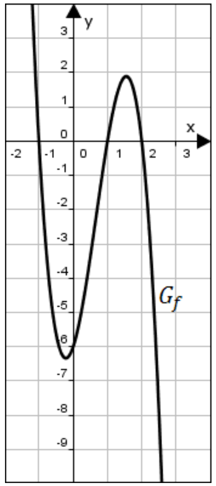
Lösung zu Teilaufgabe 1c

Skizze



Teilaufgabe 2a (5 BE)

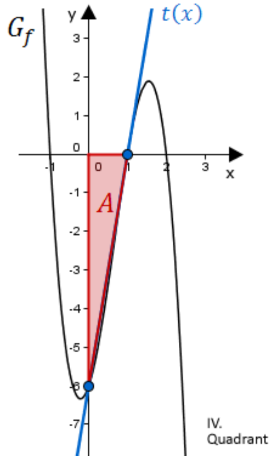
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto -3x^3 + 6x^2 + 3x - 6$, die die Nullstellen 1, -1 und 2 besitzt. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



Die Tangente t an G_f im Punkt $(1|0)$ legt mit den Koordinatenachsen im IV. Quadranten ein Dreieck fest. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt A.
[Ergebnis: $A = 3$]

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Tangentengleichung ermitteln



$f(x) = -3x^3 + 6x^2 + 3x - 6$

Erste Ableitung bilden:

$f'(x) = -9x^2 + 12x + 3$

Gleichung der Tangente $t(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ bestimmen:

Werte bestimmen:

$x_0 = 1$

$f(x_0) = f(1) = -3 + 6 + 3 - 6 = 0$

$f'(x_0) = f'(1) = -9 + 12 + 3 = 6$

$t(x) = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$ (Formel für die Tangentengleichung)

$t(x) = (x - 1) \cdot 6 + 0$

$\Rightarrow \quad t(x) = 6x - 6$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Höhe h des Dreiecks bestimmen:

Erläuterung:

Die Höhe des Dreiecks entspricht dem Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse, sprich $t(0)$.
Die Grundseite entspricht dem Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse.

$t(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 \quad \Rightarrow \quad h = 6$

Dreiecksfläche bestimmen:

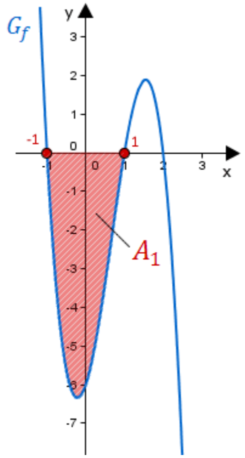
$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 = 3$

Teilaufgabe 2b (7 BE)

Berechnen Sie die Inhalte der beiden Flächenstücke, die G_f mit der x-Achse einschließt.
[Ergebnis: Flächeninhalte: 8 und $1,25$]

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Flächenberechnung



Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Das bestimmte Integral $\int\limits_{-1}^{1} f(x)d\,x$ ist gleich der Fläche A_1, die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen -1 und 1 einschließt.

Da die Fläche A_1 unterhalb der x-Achse liegt, ist der Wert des Integrals negativ. Deswegen wird noch ein Minuszeichen davor gesetzt.

Andere Schreibweisen für A_1: $\left|\int\limits_{-1}^{1} f(x)d\,x\right|$ oder auch $\int\limits_{1}^{-1} f(x)d\,x$ (vertauschte Integrationsgrenzen)

Inhalt A_1 bestimmen:

$$A_1 = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)d\,x$$

$$A_1 = -\int\limits_{-1}^{1} \left(-3x^3+6x^2+3x-6\right)\,d\,x$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

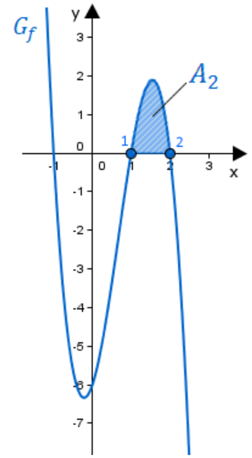
$$\int\limits_a^b f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Die Stammfunktion einer Potenzfunktion x^n ist $\dfrac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$

$$A_1 = -\left[-\frac{3}{4}x^4+2x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right]_{-1}^{1}$$

$$A_1 = -\underbrace{\left[\left(-\frac{3}{4}+2+\frac{3}{2}-6\right)-\left(-\frac{3}{4}-2+\frac{3}{2}+6\right)\right]}_{-8}$$

$\Rightarrow \quad A_1 = 8$



Inhalt A_2 bestimmen:

$$A_2 = \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$A_2 = \int_1^2 \left(-3x^3+6x^2+3x-6\right)\,dx$$

$$A_2 = \left[-\frac{3}{4}x^4+2x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right]_1^2$$

$$A_2 = \underbrace{\left[(-12+16+6-12)-\left(-\frac{3}{4}+2+\frac{3}{2}-6\right)\right]}_{\frac{5}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad A_2 = \frac{5}{4} = 1,25$$

Teilaufgabe 2c (4 BE)

Betrachtet wird nun die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F: x \mapsto \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$. Der Graph von F wird mit G_F bezeichnet.

Begründen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von F, dass F genau eine Nullstelle hat.

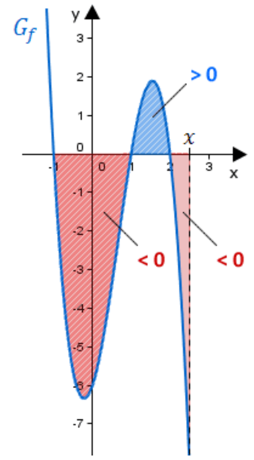
Lösung zu Teilaufgabe 2c

Eigenschaften der Integralfunktion

F hat für $x=-1$ eine Nullstelle (Integrationsanfang).

$$\int_{-1}^{-1} f(t)\,dt = 0$$

F besitzt genau eine Nullstelle, da der Graph von $f(x)$ für $x>2$ keine weitere Fläche mit der x-Achse einschließt die oberhalb der x-Achse liegt. Somit gibt es keine weitere positive Fläche (außer die zwischen 1 und 2) die der negativen Fläche, zwischen -1 und 1, entgegenwirkt (Flächenbilanz).



Aus Teilaufgabe 2b folgt für $x>2$:

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-1}^{1} f(t)\,dt}_{-8} + \underbrace{\int_{1}^{2} f(t)\,dt}_{1,25} + \underbrace{\int_{2}^{x} f(t)\,dt}_{<0} < 0$$

Teilaufgabe 2d (5 BE)

Welche Funktionswerte von F lassen sich aus den in Teilaufgabe 2b berechneten Flächeninhalten ermitteln? Geben Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_F an.

Lösung zu Teilaufgabe 2d

Funktionswerte der Integralfunktion angeben

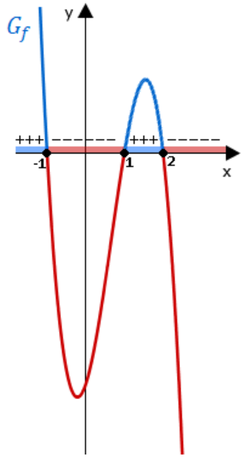
Funktionswert $F(1)$:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = -8 \quad \Rightarrow \quad F(1) = -8$$

Funktionswert $F(2)$:

$$\int_{-1}^{2} f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{2} f(t)dt = -8 + 1,25 \qquad \Rightarrow \qquad F(2) = -6,75$$

Eigenschaften der Integralfunktion



Erläuterung: *Ableitung der Integralfunktion*

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Ableitung der Integralfunktion (hier F) gleich der Integrandenfunktion (hier f).

$F' = f$

Erläuterung:

Das Vorzeichen der ersten Ableitung F' entspricht dem Vorzeichen der Funktion f.
Wo f positiv bzw. negativ ist, kann am Funktionsgraphen abgelesen werden. Die Nullstellen sind aus Teilaufgabe 2a bekannt.

$F' = f > 0 \qquad$ für $\qquad x \in]-\infty; -1[$ und $x \in]1; 2[$

$F' = f = 0 \qquad$ für $\qquad x = -1,\ x = 1$ und $x = 2$

$F' = f < 0 \qquad$ für $\qquad x \in]-1; 1[$ und $x \in]2; \infty[$

Erläuterung: *Vorzeichenwechsel*

An der Stelle $x = -1$ und $x = 2$ liegt ein Vorzeichenwechsel von “ + “ nach “ − “ vor.

An der Stelle $x = 1$ liegt ein Vorzeichenwechsel von “ − “ nach “ + “ vor.

$\Rightarrow$ F hat an der Stelle $x = -1$ und $x = 2$ Hochpunkte.

$\Rightarrow$ F hat an der Stelle $x = 1$ ein Tiefpunkt.

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} f(t)dt = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (-1|0) \text{ Hochpunkt}$$

$$F(1) = \int_{-1}^{1} f(t)dt = -8 \qquad \Rightarrow \qquad (1|-8) \text{ Tiefpunkt}$$

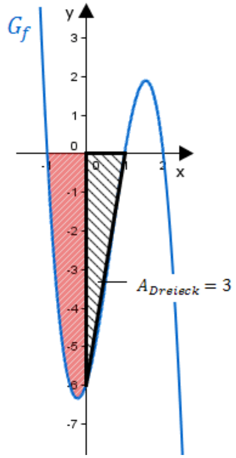
$$F(2) = \int_{-1}^{2} f(t)dt = -8 + 1,25 = -6,75 \qquad \Rightarrow \qquad (2|-6,75) \text{ Hochpunkt}$$

Teilaufgabe 2e (5 BE)

Ermitteln Sie unter Verwendung des in Teilaufgabe 2a berechneten Flächeninhalts A einen Näherungswert für $F(0)$. Skizzieren Sie G_F in der Abbildung zu Aufgabe 2 unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

Lösung zu Teilaufgabe 2e

Flächenberechnung



Aus den vorherigen Teilaufgaben ist bekannt:

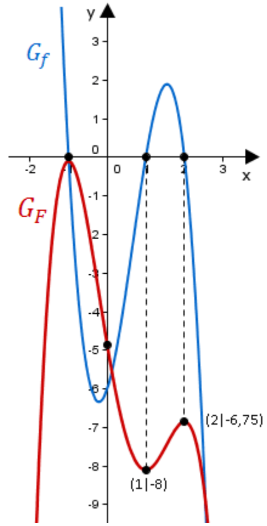
$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = -8$$

$$A_{\text{Dreieck}} = 3$$

Es folgt damit:

$$F(0) = \int_{-1}^{0} f(t)dt \approx -8 + 3 = -5$$

Skizze



Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

Um G_F skizzieren zu können ist es notwendig den Zusammenhang zwischen F und f zu kennen:

wo f...	ist F...
oberhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **steigend**
unterhalb der x-Achse verläuft	streng monoton **fallend**
streng monoton steigt	linksgekrümmt
streng monoton fällt	rechtsgekrümmt

Daraus ergeben sich weitere Zusammenhänge:

f besitzt	F besitzt
eine Nullstelle mit **VZW +/-**	Maximum / **Hochpunkt**
eine Nullstelle mit **VZW -/+**	Minimum / **Tiefpunkt**
doppelte Nullstelle	Terrassenpunkt
Extrema (Min. oder Max.)	Wendepunkt