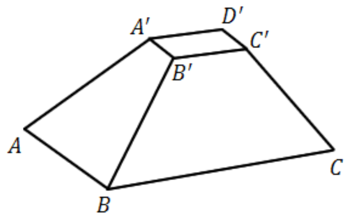
Abitur 2011 G9 Abitur Mathematik GK Geometrie VI

Auf dem Boden des Mittelmeeres wurde ein antiker Marmorkörper entdeckt, der ersten Unterwasseraufnahmen zufolge die Form eines Pyramidenstumpfs besitzen könnte. Mithilfe eines Peilungssystem konnte die Lage von sieben der acht Eckpunkte ermittelt und zur weiteren Analyse des Körpers in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft dargestellt werden: $A(0|0|0)$, $B(-6|-12|12)$ und $C(18|-36|0)$ sind Eckpunkte der Grundfläche, $A'(14|-8|8)$, $B'(12|-12|12)$, $C'(20|-20|8)$ und $D'(22|-16|4)$ die Eckpunkte der Deckfläche (vgl. Abbildung).



Teilaufgabe 1a (5 BE)

Zeigen Sie, dass die Deckfläche $A'\,B'\,C'\,D'$ ein Rechteck ist und den Inhalt 72 besitzt.

Teilaufgabe 1b (3 BE)

Weisen Sie nach, dass das Dreieck $A\,B\,C$ bei B rechtwinklig ist, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts D, der gemeinsam mit A, B und C die Eckpunkte eines Rechtecks bildet.

Exakte Messungen am Marmorkörper zeigen, dass der Punkt D im Modell die Lage des vierten Eckpunkts der Grundfläche beschreibt.

Teilaufgabe 1c (8 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die die Grundfläche $A\,B\,C\,D$ enthält, in Normalenform. Weisen Sie nach, dass die Deckfläche parallel zur Grundfläche ist und von dieser den Abstand 12 hat.
[mögliches Teilergebnis: $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$]

Durch Berechnungen wird bestätigt, dass der Marmorkörper die Form eines Pyramidenstumpfs hat. Im Modell wird für weitere Überlegungen auch die zum Stumpf gehörige Pyramide mit Grundfläche $A\,B\,C\,D$ betrachtet.

Teilaufgabe 1d (6 BE)

Berechnen Sie die Höhe h dieser Pyramide.
[Ergebnis: $h = 18$]

Teilaufgabe 1e (5 BE)

Bestimmen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfs.

Teilaufgabe 1f (8 BE)

Auf besonderes Interesse stößt die Seitenfläche des Marmorkörpers, die im Modell mit $B\,C\,C'\,B'$ bezeichnet wurde. Zeigen Sie, dass die Geraden $B\,C$ und $B'\,C'$ den Abstand $6\sqrt{5}$ besitzen und berechnen Sie den Inhalt dieser Seitenfläche im Modell.

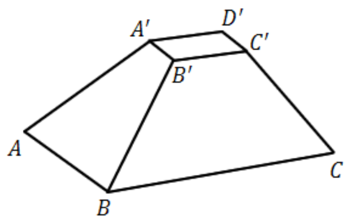
Teilaufgabe 1g (5 BE)

Um Informationen über den inneren Aufbau des Marmorkörpers zu erhalten, wird er geradlinig durchbohrt - im Modell betrachtet parallel zur x_3-Achse, ausgehend vom Mittelpunkt der Kante $[B\,B']$. Berechnen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Bohrung aus der Grundfläche austritt.

Lösung

Teilaufgabe 1a (5 BE)

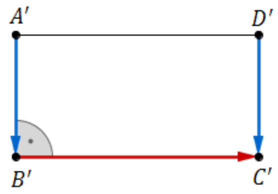
Auf dem Boden des Mittelmeeres wurde ein antiker Marmorkörper entdeckt, der ersten Unterwasseraufnahmen zufolge die Form eines Pyramidenstumpfs besitzen könnte. Mithilfe eines Peilungssystem konnte die Lage von sieben der acht Eckpunkte ermittelt und zur weiteren Analyse des Körpers in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft dargestellt werden:
$A(0|0|0)$, $B(-6|-12|12)$ und $C(18|-36|0)$ sind Eckpunkte der Grundfläche, $A'(14|-8|8)$, $B'(12|-12|12)$, $C'(20|-20|8)$ und $D'(22|-16|4)$ die Eckpunkte der Deckfläche (vgl. Abbildung).



Zeigen Sie, dass die Deckfläche $A'B'C'D'$ ein Rechteck ist und den Inhalt 72 besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Lagebeziehung von Vektoren



$A'(14|-8|8)$

$B'(12|-12|12)$

$C'(20|-20|8)$

$D'(22|-16|4)$

Vektoren $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{B'C'}$ bestimmen:

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{B'} - \overrightarrow{A'} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{C'} - \overrightarrow{B'} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt bilden:

$$\overrightarrow{A'B'} \circ \overrightarrow{B'C'} = \left[2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \left[4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = 2 \cdot 4 \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\overrightarrow{A'B'} \circ \overrightarrow{B'C'} = 8 \cdot \underbrace{(-1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot (-1))}_{0} = 0$$

> Erläuterung: *Skalarprodukt*
>
> Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, ist gleich 0.

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} \perp \overrightarrow{B'C'}$
$\Rightarrow$ Die Vektoren $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{B'C'}$ sind zueinander senkrecht.

Vektor $\overrightarrow{D'C'}$ bestimmen:

$$\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{C'} - \overrightarrow{D'} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 22 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'}$

$\Rightarrow$ Die Deckfläche $A'B'C'D'$ ist ein Rechteck.

Länge eines Vektors

Länge der Vektoren $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{B'C'}$ bestimmen:

$$\overline{A'B'} = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \left| 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\overline{A'B'} = 2 \cdot \sqrt{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}^2} = 2 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow \overline{A'B'} = 6$$

$$\overline{B'C'} = \left|\overrightarrow{B'C'}\right| = \left| 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = 4 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\overline{B'C'} = 4 \cdot \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}^2} = 4 \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 4 \cdot \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow \overline{B'C'} = 12$$

Inhalt des Rechtecks $A'B'C'D'$ bestimmen:

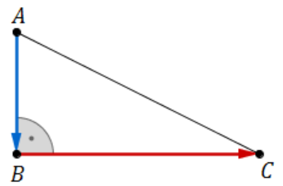
$$A_{A'B'C'D'} = \overline{A'B'} \cdot \overline{B'C'} = 6 \cdot 12 = 72$$

Teilaufgabe 1b (3 BE)

Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC bei B rechtwinklig ist, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts D, der gemeinsam mit A, B und C die Eckpunkte eines Rechtecks bildet.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Lagebeziehung von Vektoren



$A(0|0|0)$

$B(-6|-12|12)$

$C(18|-36|0)$

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt bilden:

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \left[6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \left[12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = 72 \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 72 \cdot \underbrace{(-1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot (-1))}_{0} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

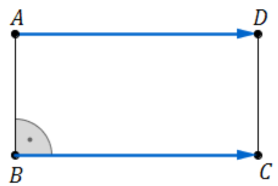
Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, ist gleich 0.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ sind zueinander senkrecht.

$\Rightarrow$ Das Dreieck ABC hat bei B einen rechten Winkel.

Lage eines Punktes



Punkt D bestimmen:

$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow D(24|-24|-12)$

Teilaufgabe 1c (8 BE)

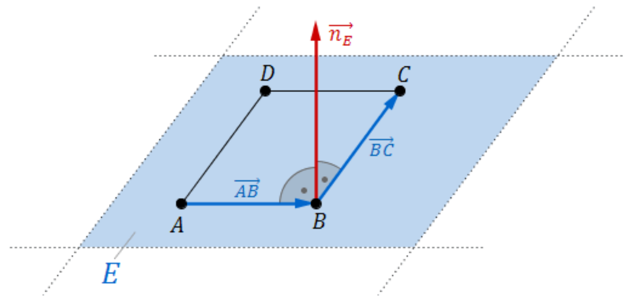
Exakte Messungen am Marmorkörper zeigen, dass der Punkt D im Modell die Lage des vierten Eckpunkts der Grundfläche beschreibt.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die die Grundfläche $ABCD$ enthält, in Normalenform. Weisen Sie nach, dass die Deckfläche parallel zur Grundfläche ist und von dieser den Abstand 12 hat.

[mögliches Teilergebnis: $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$]

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Ebenengleichung in Normalenform



$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Ortsvektor (des Aufpunkts) der Ebene E.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$ (in Teilaufgabe 1b berechnet) sind Richtungsvektoren der Ebene E.

Richtungsvektoren vereinfachen:

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Richtungsvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Richtungsvektors muss nur die Richtung angeben.
Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier werden die Richtungsvektoren durch 6 bzw. durch 12 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$\frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{12} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E aus den beiden (vereinfachten) Richtungsvektoren bestimmen:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Normalenvektor vereinfachen:

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 3 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$\overrightarrow{n_E} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenform E^N der Ebene E:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{n_E} = 0$

Hier (A ist Aufpunkt):

$$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Kann auch geschrieben werden:

$$\overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$E^N : \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E^N : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

Lagebeziehung von Ebenen

Die Ebene mit Aufpunkt A' und Richtungsvektoren $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ enthält die Deckenfläche $A'B'C'D'$.

Vereinfachen der Richtungsvektoren ergibt:

$$\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Die (vereinfachten) Richtungsvektoren der Ebene $A'B'C'D'$ entsprechen den Richtungsvektoren der Ebene $ABCD$. Die aus den Richtungsvektoren resultierenden Normalenvektoren sind gleich. Somit sind Grundfläche und Deckfläche des Marmorkörpers parallel.

Abstand paralleler Ebenen

Betrag des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E aufstellen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform E^N der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors.

$$E^N : \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d = 0$$

$$\Rightarrow E^{HNF} : \frac{\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} = 0$$

d ist das Ergebnis des Skalarprodukts aus $\overrightarrow{n_E}$ und dem Ortsvektor des Aufpunkts von E.

$$E^{HNF} : \frac{1}{3} \cdot (2x_1 + x_2 + 2x_3) = 0$$

Abstand der Ebene $A'B'C'D'$ von der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Abstand paralleler Ebenen*

Der Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen entspricht dem Abstand eines beliebigen Punkts der einen Ebene zur anderen Ebene.

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes S in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand des Punktes zur Ebene.

$$E^{HNF} : \frac{\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} = 0$$

$$\Rightarrow d(S, E) = \left| \frac{\overrightarrow{S} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} \right|$$

d ist das Ergebnis des Skalarprodukts aus $\overrightarrow{n_E}$ und dem Ortsvektor des Aufpunkts von E.

$$d(A', E) = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 14 - 8 + 2 \cdot 8) = 12$$

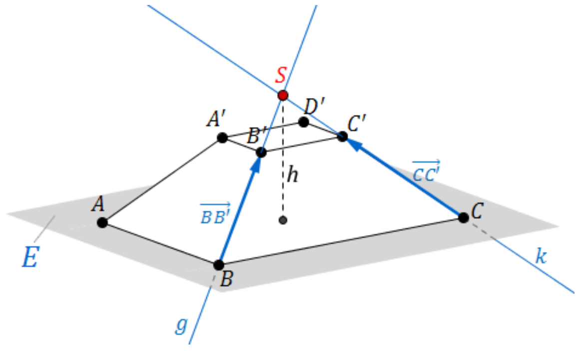
Teilaufgabe 1d (6 BE)

Durch Berechnungen wird bestätigt, dass der Marmorkörper die Form eines Pyramidenstumpfs hat. Im Modell wird für weitere Überlegungen auch die zum Stumpf gehörige Pyramide mit Grundfläche $ABCD$ betrachtet.

Berechnen Sie die Höhe h dieser Pyramide.
[Ergebnis: $h = 18$]

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Geradengleichung aufstellen



Gerade g durch B und B' bestimmen:

$B(-6|-12|12),\ B'(12|-12|12)$

Richtungsvektor der Geraden g:

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{B'} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Geraden g:

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Wenn B als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{B}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g.

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gerade k durch C und C' bestimmen:

$C(18|-36|0),\ C'(20|-20|8)$

Richtungsvektor der Geraden k:

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{C'} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Geraden k:

$$k: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Schnitt zweier Geraden

Geraden g und k schneiden: $g \cap k$

Gleichsetzen der beiden Geraden:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -24 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} -24 + 18\lambda = 2\mu & \text{(I)} & & \\ 24 = 16\mu & \text{(II)} & \Rightarrow & \mu = \frac{3}{2} \\ 12 = 8\mu & \text{(I)} & \Rightarrow & \mu = \frac{3}{2} \end{array}$$

Parameter $\mu = \dfrac{3}{2}$ in die Geradengleichung k einsetzen:

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 18 \\ -36 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(21|-12|12)$ ist Schnittpunkt der Geraden g und k
$\Rightarrow S(21|-12|12)$ ist die Spitze der Pyramide.

Abstand Punkt - Ebene

Die Höhe h der Pyramide entspricht dem Abstand der Spitze S von der Ebene E, die die Grundfläche $ABCD$ der Pyramide enthält.

Aus Teilaufgabe 1c ist die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E bekannt:

$$E^{HNF}: \frac{1}{3} \cdot (2x_1 + x_2 + 2x_3) = 0$$

Höhe h bestimmen:

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P,E)$ des Punktes zur Ebene.

Beispiel:

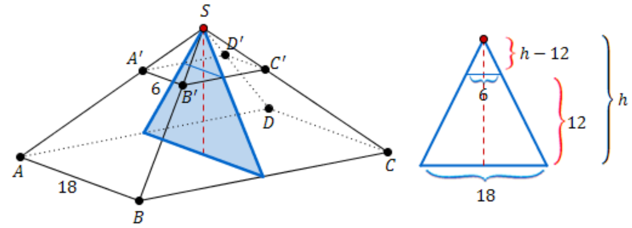
$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$P(1|3|-6)$

$$d(P,E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\frac{9}{3} \right| = 3$$

$$h = d(S,E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 21 - 12 + 2 \cdot 12) \right| = 18$$

Alternative Lösung



$$\overline{AB} = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = 18$$

$\overline{A'B'} = 6$

$h = 12$

Betrachtet werden die zwei ähnliche Dreiecke, die die Spitze der Pyramide mit den Seiten $[BC]$ und $[AD]$ und $[B'C']$ und $[A'D']$ bilden, wenn diese senkrecht zur Grundfläche geschnitten wird.

Das größere Dreieck entsteht aus dem kleinerem Dreieck durch zentrische Streckung, wenn die Spitze der Pyramide als Streckenzentrum angesehen wird.

Für die ähnlichen Strecken gilt somit:

$$\frac{6}{18} = \frac{h - 12}{h} \,|\, \cdot 3h$$

$h = 3h - 36$

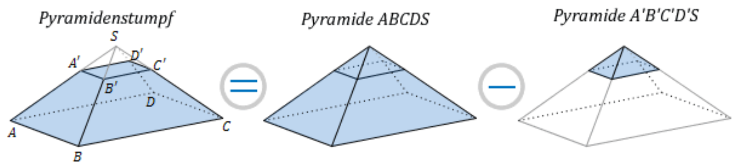
$\Rightarrow h = 18$

Teilaufgabe 1e (5 BE)

Bestimmen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfs.

Lösung zu Teilaufgabe 1e

Volumen einer Pyramide



Aus den vorherigen Teilaufgaben ist bekannt:

$\overrightarrow{AB} = 6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A_{A'B'C'D'} = 72$ (Grundfläche der Pyramide $A'B'C'D'S$)

$h = 18$ (Höhe der Pyramide $ABCDS$)

$d = 12$ (Höhe des Pyramidenstumpfs)

Nebenrechnung:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

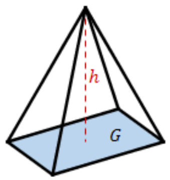
$$\overline{AB} = \left| 6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 6 \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 6 \cdot \sqrt{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}^2} = 6 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 18$$

$$\overline{BC} = \left| 12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = 12 \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = 12 \cdot \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}^2} = 12 \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 36$$

$\Rightarrow A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 18 \cdot 36 = 648$ (Grundfläche der Pyramide $ABCDS$)

Volumen der Pyramide $ABCDS$ bestimmen:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 648 \cdot 18 = 3888$$

Volumen der Pyramide $A'B'C'D'S$ bestimmen:

Erläuterung:

Die Höhe der Pyramide $A'B'C'D'$ ist gleich der Höhe h der Pyramide $ABCDS$ minus die Höhe des Pyramidenstumpfs.

$$V_{A'B'C'D'S} = \frac{1}{3} \cdot A_{A'B'C'D'} \cdot (h - 12) = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 6 = 144$$

Volumen des Pyramidenstumpfs bestimmen:

$$V_{\text{Stumpf}} = V_{ABCDS} - V_{A'B'C'D'S} = 3888 - 144 = 3744$$

Alternative Lösung

Berechnung von V_{Stumpf} mit der Formel für das Volumen eines Pyramidenstumpfs:

$$V_{\text{Stumpf}} = \frac{d}{3} \cdot \left(A_{A\,B\,C\,D} + A_{A'\,B'\,C'\,D'} + \sqrt{A_{A\,B\,C\,D} \cdot A_{A'\,B'\,C'\,D'}}\right)$$

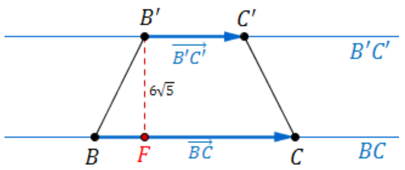
$$V_{\text{Stumpf}} = \frac{12}{3} \cdot (648 + 72 + \sqrt{648 \cdot 72}) = 3744$$

Teilaufgabe 1f (8 BE)

Auf besonderes Interesse stößt die Seitenfläche des Marmorkörpers, die im Modell mit $B\,C\,C'\,B'$ bezeichnet wurde. Zeigen Sie, dass die Geraden $B\,C$ und $B'\,C'$ den Abstand $6\sqrt{5}$ besitzen und berechnen Sie den Inhalt dieser Seitenfläche im Modell.

Lösung zu Teilaufgabe 1f

Geradengleichung aufstellen



Aus den vorherigen Teilaufgaben sind gegeben: $B(-6|-12|12)$, $\overrightarrow{B\,C} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gerade $B\,C$ durch B und C bestimmen:

$\frac{1}{12} \cdot \overrightarrow{B\,C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor der Geraden.

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade l ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$l : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

Wenn B als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{B}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden $B\,C$.

$$B\,C : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Abstand paralleler Geraden

Der Abstand zwischen den Geraden $B\,C$ und $B'\,C'$ entspricht dem Abstand des Punktes $B'(12|-12|12)$ von der Geraden $B\,C$.

$d(B\,C, B'\,C') = d(B', B\,C)$

Ebene H in Normalenform aufstellen, die als Aufpunkt B' hat und senkrecht zu $B\,C$ verläuft.

Erläuterung: *Ebenengleichung*

Eine Ebene H ist durch einen Punkt P und einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_H}$ eindeutig bestimmt. Die Ebenengleichung (in Normalenform) lautet:

$H^N : \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{n_H} = 0$

Hier ist der Normalenvektor gleich dem Richtungsvektor der Geraden $B\,C$, da die Ebene senkrecht zu ihr stehen soll:

$\overrightarrow{n_H} = \frac{1}{6}\overrightarrow{B\,C}$

$$H : \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$H : 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 36 = 0$$

Schnittpunkt F von BC mit H ermitteln: $BC \cap H$

BC in H einsetzen:

Erläuterung: *Einsetzen*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt F, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E^N ein und löst nach λ auf.

$2(-6+2\lambda) - 2(-12-2\lambda) - (12-\lambda) - 36 = 0$

$-12 + 4\lambda + 24 + 4\lambda - 12 + \lambda - 36 = 0$

$9\lambda = 36$

$\Rightarrow \lambda = 4$

$\lambda = 4$ in BC einsetzen, um F zu erhalten:

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\left|\overrightarrow{FB'}\right|$ berechnen:

$$d(B', BC) = \left|\overrightarrow{FB'}\right| = \left|\overrightarrow{B'} - \overrightarrow{F}\right| = \left| \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right|$$

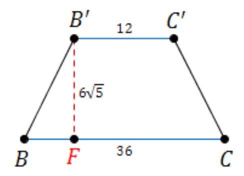
Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$d(B', BC) = \sqrt{\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{10^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Flächeninhalt eines Trapezes



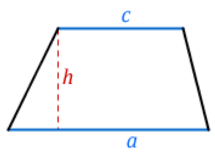
Aus vorherigen Teilaufgaben ist bekannt:

$\overline{BC} = 36$

$\overline{B'C'} = 12$

Flächeninhalt des Trapezes $BCC'B'$ bestimmen:

Erläuterung: *Fläche eines Trapezes*



Sind a und c die Grundseiten und h die Höhe, dann ist der Flächeninhalt des Trapezes gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

$$A_{B\,C\,C'\,B'} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{B\,C} + \overline{B'\,C'}\right) \cdot \overline{F\,B'} = \frac{1}{2} \cdot (36 + 12) \cdot 6\sqrt{5} = 144\sqrt{5} \approx 322$$

Teilaufgabe 1g (5 BE)

Um Informationen über den inneren Aufbau des Marmorkörpers zu erhalten, wird er geradlinig durchbohrt - im Modell betrachtet parallel zur x_3-Achse, ausgehend vom Mittelpunkt der Kante $[B\,B']$. Berechnen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Bohrung aus der Grundfläche austritt.

Lösung zu Teilaufgabe 1g

Lage eines Punktes

$B(-6|-12|12),\ B'(12|-12|12)$

Mittelpunkt der Kante $[B\,B']$ bestimmen:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B'})$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M(3|-12|12)$

Geradengleichung aufstellen

Sei b die Bohrgerade, die durch den Punkt M und parallel zur x_3-Achse verläuft.

Erläuterung:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor der x_3-Achse.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor der Geraden b.

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Wenn M als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{M}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden b.

$$b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnitt Ebene und Gerade

Aus Teilaufgabe 1c): $\quad E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
(Die Grundfläche der Pyramide liegt in E)

Schnittpunkt F' von b mit E ermitteln: $b \cap E$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E^N ein und löst nach λ auf.

b in E einsetzen:

$2 \cdot (3 + 0 \cdot \lambda) + (-12 - 0 \cdot \lambda) + 2 \cdot (12 + \lambda) = 0$

$6 - 12 + 24 + 2\lambda = 0$

$2\lambda = -18$

$\Rightarrow \lambda = -9$

$\lambda = -9$ in b einsetzen, um F' zu erhalten:

$$\overrightarrow{F'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} - 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow F'(3|-12|3)$
$\Rightarrow$ Die Bohrung tritt im Punkt $F'(3|-12|3)$ aus der Grundfläche aus.