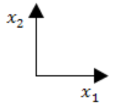
Abitur 2011 G9 Abitur Mathematik GK Geometrie V

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3|0|0)$, $B(0|3|0)$, $C(-3|-3|0)$ und $S(0|0|6)$ gegeben.

Teilaufgabe 1a (7 BE)

Das Dreieck ABC liegt in der x_1x_2-Ebene. Zeichnen Sie das Dreieck in ein zweidimensionales Koordinatensystem (vgl. Abbildung) ein. Weisen Sie nach, dass das Dreieck gleichschenklig ist, und bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.



[Teilergebnis: Flächeninhalt: $13,5$]

Teilaufgabe 1b (5 BE)

Die Punkte A, B und S legen die Ebene E fest. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

Teilaufgabe 1c (3 BE)

Berechnen Sie den Abstand d des Punkts C von der Ebene E.

[Ergebnis: $d = 6$]

Die Punkte A, B, C und S sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.

In einem Geländemodell stellt die Pyramide einen Berg mit Gipfel S dar; das Dreieck CAS bildet die Südseite, der Rand des Dreiecks ABC den Fuß des Bergs. Der Berg soll, ausgehend von seinem Fuß, auf einer geraden Linie bestiegen werden.

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Wo muss gestartet werden, damit der Weg zum Gipfel im Geländemodell einen möglichst kleinen Neigungswinkel gegen die x_1x_2-Ebene hat? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie die Länge des zugehörigen Wegs im Modell.

Teilaufgabe 2b (8 BE)

An welchem Punkt muss gestartet werden, wenn der geradlinige Weg zum Gipfel auf der Südseite verlaufen und möglichst kurz sein soll?
Bestimmen Sie im Geländemodell die Koordinaten dieses Punkts sowie den Neigungswinkel φ des zugehörigen Wegs gegen die x_1x_2-Ebene.

Teilaufgabe 3a (2 BE)

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCS$.

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ABS gleich groß sind.

Teilaufgabe 3c (4 BE)

Die Ebene F enthält den Mittelpunkt der Strecke $[AS]$ und ist parallel zur x_1x_2-Ebene. Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, in dem sich die Pyramide und die Ebene F schneiden; begründen Sie Ihr Vorgehen.

Teilaufgabe 3d (4 BE)

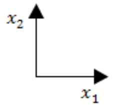
Ermitteln Sie die Gleichung einer Geraden, die parallel zur Ebene E verläuft und von dieser den Abstand 3 hat.

Lösung

Teilaufgabe 1a (7 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3|0|0)$, $B(0|3|0)$, $C(-3|-3|0)$ und $S(0|0|6)$ gegeben.

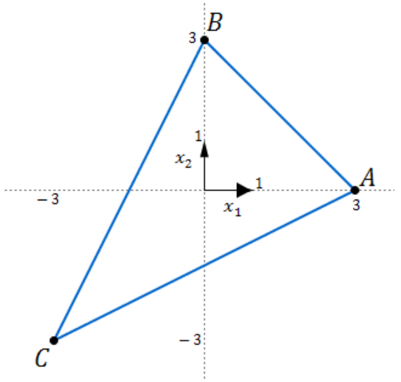
Das Dreieck ABC liegt in der x_1x_2-Ebene. Zeichnen Sie das Dreieck in ein zweidimensionales Koordinatensystem (vgl. Abbildung) ein. Weisen Sie nach, dass das Dreieck gleichschenklig ist, und bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.



[Teilergebnis: Flächeninhalt: $13{,}5$]

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Skizze



Länge eines Vektors

Vektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ bestimmen:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Länge der Vektoren bestimmen:

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$$

> Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck*
>
> Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei Seiten gleich lang sind.

$\Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

Flächeninhalt eines Dreiecks

Flächeninhalt des Dreiecks ABC bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt A eines beliebigen Dreiecks ABC ist gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

Bemerkung:

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ stehen repräsentativ für zwei Vektoren aus dem Dreieck ABC, es müssen nicht immer diese verwendet werden. In diesem Fall z.B. heißen die Vektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right|$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}\right|$$

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 0 - 0\cdot 6\\0\cdot 3 - 6\cdot 0\\6\cdot 6 - 3\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\27\end{pmatrix}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\27\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+27^2} = \frac{1}{2}\cdot 27 = 13,5$$

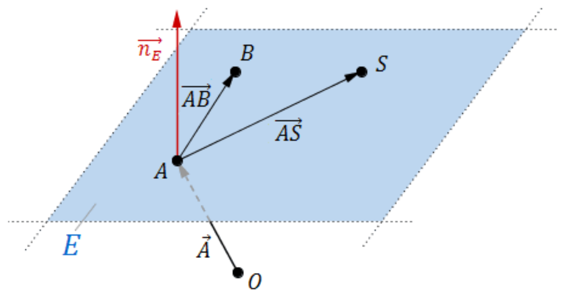
Teilaufgabe 1b (5 BE)

Die Punkte A, B und S legen die Ebene E fest. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$]

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Ebene aus drei Punkte



$A(3|0|0)$, $B(0|3|0)$, $S(0|0|6)$

Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$ der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\6\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{A}$ sei der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Ebene E.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E aus den beiden Richtungsvektoren bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\6\end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-3) - (-3) \cdot 6 \\ (-3) \cdot 0 - 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor vereinfachen:

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 9 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\overrightarrow{n_E} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenform E^N der Ebene:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{n_E} = 0$$

Hier (A ist Aufpunkt):

$$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Kann auch geschrieben werden:

$$\overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E^N : \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E^N : 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

$E^N : 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$

Teilaufgabe 1c (3 BE)

Berechnen Sie den Abstand d des Punkts C von der Ebene E.

[Ergebnis: $d = 6$]

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Abstand Punkt - Ebene

$C(-3|-3|0)$

$E^N : 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$ (siehe Teilaufgabe 1b)

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor der Ebene.

Betrag des Normalenvektors bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E aufstellen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.

Beispiel:

$E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

$$E^{\text{HNF}} : \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$$E^{HNF} : \frac{1}{3} \cdot (2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6) = 0$$

Abstand des Punktes C von der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P, E)$ des Punktes zur Ebene.

Beispiel:

$$E^{\text{HNF}} : \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$P(1|3|-6)$

$$d(P, E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\frac{9}{3} \right| = 3$$

$$d(C, E) = \left| \frac{1}{3} \left[2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) + 0 - 6) \right] \right| = \left| \frac{-18}{3} \right| = 6$$

Teilaufgabe 2a (4 BE)

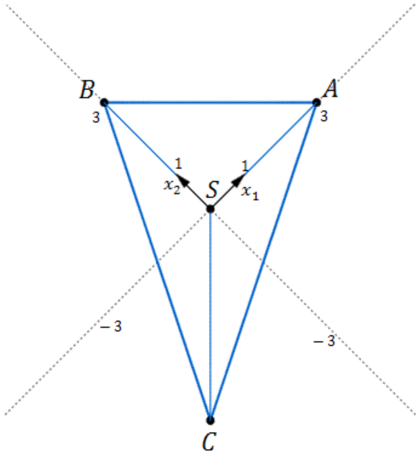
Die Punkte A, B, C und S sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.

In einem Geländemodell stellt die Pyramide einen Berg mit Gipfel S dar; das Dreieck CAS bildet die Südseite, der Rand des Dreiecks ABC den Fuß des Bergs. Der Berg soll, ausgehend von seinem Fuß, auf einer geraden Linie bestiegen werden.

Wo muss gestartet werden, damit der Weg zum Gipfel im Geländemodell einen möglichst kleinen Neigungswinkel gegen die $x_1 x_2$-Ebene hat? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie die Länge des zugehörigen Wegs im Modell.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Winkel zwischen Gerade und Ebene



Antwort:

Es muss vom Punkt C aus gestartet werden, da C am weitesten vom Ursprung und deswegen auch vom Punkt S entfernt ist (siehe Skizze: Draufsicht - von oben - der Pyramide $ABCS$).

Länge eines Vektors

$C(-3|-3|0),\ S(0|0|6)$

$$\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Länge d des Weges bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

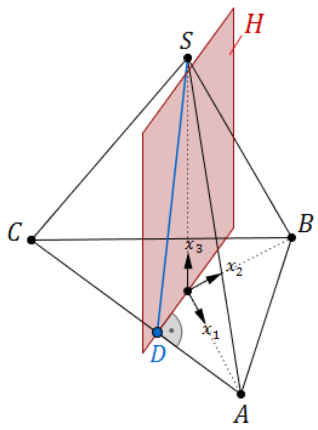
$$d = |\overrightarrow{CS}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Teilaufgabe 2b (8 BE)

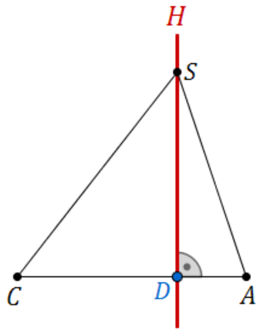
An welchem Punkt muss gestartet werden, wenn der geradlinige Weg zum Gipfel auf der Südseite verlaufen und möglichst kurz sein soll?
Bestimmen Sie im Geländemodell die Koordinaten dieses Punkts sowie den Neigungswinkel φ des zugehörigen Wegs gegen die x_1x_2-Ebene.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Geradengleichung aufstellen



3D - Ansicht



2D - Ansicht

Der gesuchte Startpunkt liegt auf der Strecke $[AC]$ und ist der Fußpunkt des Lotes vom Punkt S auf die Gerade AC.

$A(3|0|0)$, $C(-3|-3|0)$

Gerade AC bestimmen:

$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor der Geraden AC.

Gleichung der Geraden AC:

Erläuterung: *Geradengleichung*

Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$

Wenn A als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{A}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden AC.

$$AC: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt auf eine Gerade

$S(0|0|6)$

Erläuterung: *Hilfsebene*

Um den Punkt D des Lotes von S auf AC zu bestimmen, bildet man zuerst eine Hilfsebene, die durch S geht und senkrecht zu AC steht. Diese Ebene scheidet somit die Gerade AC im Lotfußpunkt D.

Hilfsebene H durch S senkrecht zu AC aufstellen:

Erläuterung: *Ebenengleichung*

Eine Ebene H ist durch einen Punkt P und einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_H}$ eindeutig bestimmt. Die Ebenengleichung (in Normalenform) lautet:

$H^N: \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{n_H} = 0$

Hier ist der Normalenvektor gleich dem Richtungsvektor der Geraden AC, da die Ebene senkrecht zu ihr stehen soll:

$\overrightarrow{n_H} = \overrightarrow{AC}$

$$H^N: \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$H^N: 6x_1 + 3x_2 = 0$

Hilfsebene H mit der Geraden AC schneiden: $\quad H \cap AC$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E^N ein und löst nach λ auf.

Hier wird also AC in H^N eingesetzt und nach λ aufgelöst.

$$AC: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x_1 = 3 + 6\lambda \\ x_2 = 3\lambda \\ x_3 = 0 \end{matrix} \quad \text{in } H^N \text{ einsetzen:}$$

$6 \cdot (3 + 6\lambda) + 3 \cdot 3\lambda = 0$

$18 + 36\lambda + 9\lambda = 0$

$45\lambda = -18$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{18}{45} = -\frac{2}{5}$

$\lambda = -\frac{2}{5}$ in die Geradengleichung einsetzen und Lotfußpunkt D bestimmen:

$$\overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der Lotfußpunkt, und somit der Startpunkt, hat die Koordinaten $D\left(\frac{3}{5} \middle| -\frac{6}{5} \middle| 0\right)$.

Alternative Lösung

Der Lotfußpunkt kann auch über die Lotfußpunktsformel bestimmt werden:

Erläuterung:

Formel für die Bestimmung des Lotfußpunktes D eines Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g:

$\left[\overrightarrow{g} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{v}$

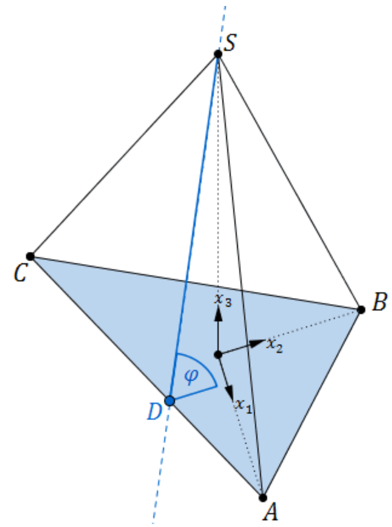
„Gerade g minus Punkt P mal Richtungsvektor v der Geraden g ist gleich Null“

Hier ist P der Punkt $S(0|0|6)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Nach der Skalarmultiplikation wird die Gleichung nach λ aufgelöst. Der gefundene Wert für λ wird in die Geradengleichung eingesetzt, um den Lotfußpunkt zu berechnen.

Winkel zwischen Gerade und Ebene



Der gesuchte Neigungswinkel φ entspricht dem Winkel zwischen der x_1x_2-Ebene E und der Geraden DS.

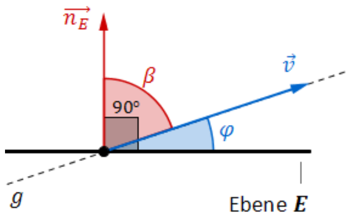
$D\left(\frac{3}{5}\,\middle|\,-\frac{6}{5}\,\middle|\,0\right)$, $S(0|0|6)$

Richtungsvektor der Geraden DS bestimmen:

$$\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 6 \end{pmatrix}$$

Winkel φ bestimmen:

Erläuterung: *Winkel zwischen Ebene und Gerade*



Der Winkel φ zwischen einer Ebene E und einer Geraden g entspricht dem von 90° abgezogenen Winkel β zwischen dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden.

$$\measuredangle(g, E) = 90^\circ - \measuredangle(\vec{v}, \overrightarrow{n_E})$$

Hier ist $\overrightarrow{DS}$ der Richtungsvektor der Geraden.

$$\varphi = \measuredangle(DS, E) = 90^\circ - \underbrace{\measuredangle(\overrightarrow{DS}, \overrightarrow{n_E})}_{\beta}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{DS} \circ \overrightarrow{n_E}}{|\overrightarrow{DS}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der x_1x_2-Ebene $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + 6^2} \cdot 1} = \frac{6}{\sqrt{37.8}}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{6}{\sqrt{37,8}}\right)^{-1} \approx 12,6^\circ$$

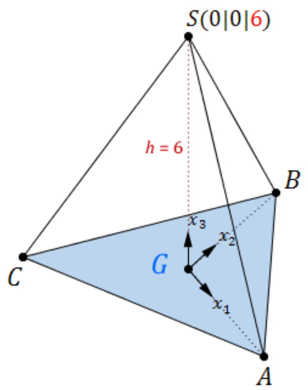
$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 12,6^\circ = 77,4^\circ$$

Teilaufgabe 3a (2 BE)

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCS$.

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Volumen einer Pyramide



$G = 13{,}5$ Grundfläche der Pyramide (s. Teilaufgabe 1a)

Erläuterung:

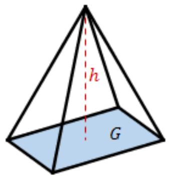
Die Grundfläche der Pyramide liegt in der x_1x_2-Ebene, d.h. die Höhe h der Pyramide entspricht dem Abstand vom Punkt S zur x_1x_2-Ebene. Dies wiederum entspricht der x_3-Koordinate von S.

$S(0|0|6) \Rightarrow h = 6$

$h = 6$ Höhe der Pyramide

Volumen der Pyramide bestimmen:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

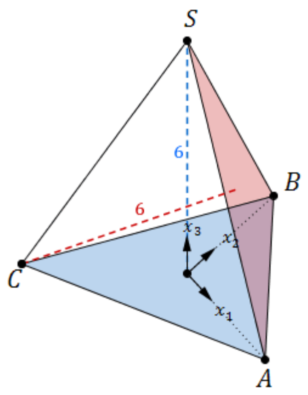
$V = \frac{1}{3} \cdot 13{,}5 \cdot 6 = 27$

Teilaufgabe 3b (3 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ABS gleich groß sind.

Lösung zu Teilaufgabe 3b

Flächeninhalt eines Dreiecks



Aus Teilaufgabe 1c ist bekannt, dass der Abstand vom Punkt C zur Ebene E gleich 6 ist. Das ist der Abstand vom Punkt C zum Dreieck $A\,B\,S$ (die Ebene E enthält die Punkte A, B und S). Also entspricht das der Höhe der Pyramide mit Grundfläche das Dreieck $A\,B\,S$. Da diese Höhe gleich groß ist wie die der Pyramide (mit Grundfläche das Dreieck $A\,B\,C$), müssen die Dreiecke gleich groß sein.

In Formeln:

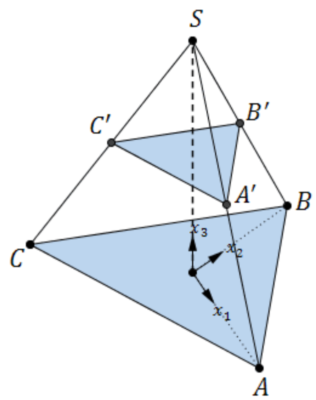
$$\left\{\begin{array}{l} V = \frac{1}{3}\cdot \triangle A\,B\,C \cdot 6 \\ V = \frac{1}{3}\cdot \triangle A\,B\,S \cdot 6 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot \triangle A\,B\,C \cdot 6 = \frac{1}{3}\cdot \triangle A\,B\,S \cdot 6 \Rightarrow \triangle A\,B\,C = \triangle A\,B\,S$$

Teilaufgabe 3c (4 BE)

> Die Ebene F enthält den Mittelpunkt der Strecke $[A\,S]$ und ist parallel zur $x_1\,x_2$-Ebene. Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, in dem sich die Pyramide und die Ebene F schneiden; begründen Sie Ihr Vorgehen.

Lösung zu Teilaufgabe 3c

Zentrische Streckung



Sei die Spitze S der Pyramide das Streckungszentrum einer zentrischen Streckung der Dreiecksfläche $A\,B\,C$ mit Streckungsfaktor k.

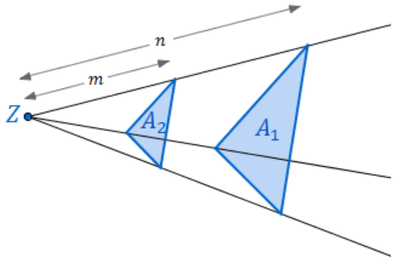
Mit A' Mittelpunkt der Strecke $[A\,S]$, gilt:

$$k = \frac{\overline{A\,A'}}{\overline{A\,S}} = \frac{\overline{A\,A'}}{2\cdot \overline{A\,A'}} = \frac{1}{2}$$

Die Dreiecksfläche $A'\,B'\,C'$, die als Schnitt der Ebene F mit der Pyramide hervorgeht, ist ähnlich zur Dreiecksfläche $A\,B\,C$.

Mit $A_{A\,B\,C} = 13,5$ (s. Teilaufgabe 1a), folgt:

Erläuterung: *Zentrische Streckung*



Wird eine geometrische Figur A_1 durch zentrische Streckung auf eine geometrische Figur A_2 mit einem Streckungsfaktor $k = \dfrac{m}{n}$ abgebildet, so gilt für den Flächeninhalt der ähnlichen Figuren:

$$A_2 = k^2 \cdot A_1$$

$$A_{A'B'C'} = k^2 \cdot A_{ABC}$$

$$A_{A'B'C'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 13,5 = 3,375$$

Teilaufgabe 3d (4 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung einer Geraden, die parallel zur Ebene E verläuft und von dieser den Abstand 3 hat.

Lösung zu Teilaufgabe 3d

Geradengleichung aufstellen

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Ebene E (siehe Teilaufgabe 1b).

$\overrightarrow{AB}$ ist somit auch Richtungsvektor einer zu E parallelen Gerade g.

Sei $P(0|0|x_3)$ ein Punkt auf der x_3-Achse mit Abstand 3 zur Ebene E.

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand des Punktes zur Ebene.

$$E^{HNF}: \frac{\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} = 0$$

$$\Rightarrow d(P,E) = \left| \frac{\overrightarrow{P} \circ \overrightarrow{n_E} - d}{|\overrightarrow{n_E}|} \right|$$

d ist das Ergebnis des Skalarprodukts aus $\overrightarrow{n_E}$ und dem Ortsvektor des Aufpunkts von E.

$$d(P,E) = 3 \iff \left| \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + x_3 - 6) \right| = 3$$

Erläuterung:

Die Betragsstriche können in diesem Fall weggelassen werden, da es nicht wichtig ist auf welcher Seite der Ebene der Punkt P liegt.

$$\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + x_3 - 6) = 3$$

$$x_3 - 6 = 9$$

$$\Rightarrow x_3 = 15$$

$$\Rightarrow P(0|0|15)$$

Mit $\overrightarrow{P}$ als Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g, lautet die Geradengleichung:

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$