Fachabitur 2010 Mathematik NT Stochastik S I

Ein Campingplatzbesitzer stellt für die neue Saison seine Reservierungs- und Abrechnungsmodalitäten aus Vereinfachungsgründen um. Er vermietet nur noch große (g), mittlere (m) und kleine (k) Stellplätze, die jeweils mit Stromanschluss (S) oder ohne ($\overline{S}$) gebucht werden können. Aus den vergangenen Jahren hat er folgende Informationen:
Von allen Mietern entscheiden sich 50 % für einen großen und 30 % für einen mittleren Stellplatz. Mieter auf dem großen Stellplatz entscheiden sich zu 70 % für einen Stromanschluss, bei dem kleinen Stellplatz sind es nur 30 %. Von allen Mietern entscheiden sich 18 % für einen mittleren Stellplatz mit Stromanschluss.
Die Auswahl eines beliebigen Stellplatzes und die Entscheidung für oder gegen einen Stromanschluss wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Die relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller sechs Elementarereignisse.

Teilaufgabe 1.2 (7 BE)

Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein Stellplatz mit Stromanschluss wird gewählt."
E_2 : „Es wird ein mittlerer oder kleiner Stellplatz gewählt."

Geben Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit sowie auf Unvereinbarkeit.

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)

Gegen Ende einer Saison sind erfahrungsgemäß noch 30 Stellplätze belegt.
Es gelten weiterhin die Wahrscheinlichkeiten aus 1.0.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_3 : „Es sind genau 10 Stellplätze mittlerer Größe belegt."
E_4 : „Es sind mehr als acht und höchstens 15 große Stellplätze belegt."
E_5 : „Es ist höchstens ein kleiner Stellplatz ohne Stromanschluss belegt."

Teilaufgabe 1.4 (3 BE)

Erfahrungsgemäß haben 85 % der Camper im Voraus gebucht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten 20 Ankommenden genau drei nicht vorgebucht haben und diese hintereinander folgen.

Der Campingplatzbetreiber hat nun die Plätze je nach Lage in die drei Qualitätsstufen A, B und C unterteilt. In jeder Lage kann der Platz mit (S) oder ohne ($\overline{S}$) Stromanschluss gewählt werden. Die Zufallsgröße X gibt die Nummer der Kategorie des gebuchten Platzes an. Auf Grund langjähriger Aufzeichnungen geht er von folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ aus:

ω	$A\bar{S}$	AS	$B\bar{S}$	BS	$C\bar{S}$	CS
x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0	0,15	0,03	0,21	a	b

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b, wenn $E(X) = 4,8$ gilt.
[Teilergebnis: $a = 0,09$]

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

In einer Aktionswoche werden die Stellplatzkosten pro Tag auf 10 € für einen Stellplatz der Lage A, 14 € für Lage B und 18 € für Lage C festgesetzt. Der Stromanschluss ist dabei **nicht** enthalten. Die Kosten für einen Stromanschluss sind unabhängig von der Wahl des Stellplatzes jeweils gleich und sollen so festgelegt werden, dass der Besitzer bei täglich 50 belegten Stellplätzen durchschnittlich 880 € einnimmt.
Berechnen Sie, was ein Stromanschluss pro Tag unter diesen Bedingungen für den Urlauber kostet.

Der Campingplatzbesitzer bezieht von einem Flüssiggaslieferanten 5 kg-Gasflaschen. Der Lieferant garantiert, dass das Füllgewicht nur in 3 % aller Fälle unterschritten wird. Der misstrauische Campingplatzbesitzer vermutet, dass mehr als 3 % der Gasflaschen das Füllgewicht unterschreiten (Gegenhypothese).
Zur Überprüfung testet der Lieferant aus einer größeren Lieferung 100 Flaschen.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie deren größtmöglichen Ablehnungsbereich, wenn das Signifikanzniveau 5 % betragen soll.

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Erklären Sie kurz, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Ein Campingplatzbesitzer stellt für die neue Saison seine Reservierungs- und Abrechnungsmodalitäten aus Vereinfachungsgründen um. Er vermietet nur noch große (g), mittlere (m) und kleine (k) Stellplätze, die jeweils mit Stromanschluss (S) oder ohne ($\overline{S}$) gebucht werden können. Aus den vergangenen Jahren hat er folgende Informationen:
Von allen Mietern entscheiden sich $50\,\%$ für einen großen und $30\,\%$ für einen mittleren Stellplatz. Mieter auf dem großen Stellplatz entscheiden sich zu $70\,\%$ für einen Stromanschluss, bei dem kleinen Stellplatz sind es nur $30\,\%$. Von allen Mietern entscheiden sich $18\,\%$ für einen mittleren Stellplatz mit Stromanschluss.
Die Auswahl eines beliebigen Stellplatzes und die Entscheidung für oder gegen einen Stromanschluss wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Die relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller sechs Elementarereignisse.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Baumdiagramm erstellen

Berechnung der Wahrscheinlichkeit p, dass sich der Mieter eines mittleren Stellplatzes für einen Stromanschluss entscheidet:

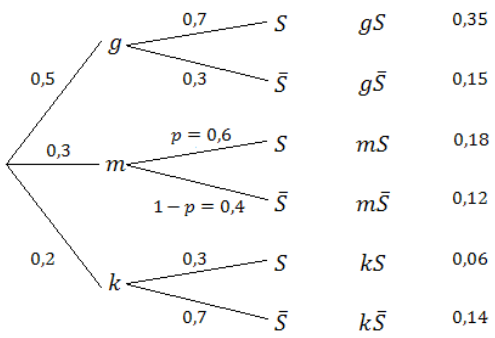
$P(m) = 0,3$
$P(m\,S) = 0,18$

$P(m\,S) = P(m) \cdot p$

$$p = \frac{P(m\,S)}{P(m)} = \frac{0,18}{0,3} = 0,6$$

Baumdiagramm:

© Abiturloesung.de



Teilaufgabe 1.2 (7 BE)

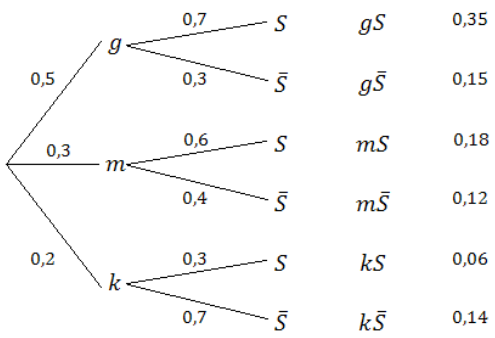
Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein Stellplatz mit Stromanschluss wird gewählt.“
E_2 : „Es wird ein mittlerer oder kleiner Stellplatz gewählt.“

Geben Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit sowie auf Unvereinbarkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Wahrscheinlichkeit



E_1 : „Ein Stellplatz mit Stromanschluss wird gewählt.“

$E_1 = \{g\,S; m\,S; k\,S\}$

$P(E_1) = P(g\,S) + P(m\,S) + P(k\,S) = 0,35 + 0,18 + 0,06 = 0,59$

E_2 : „Es wird ein mittlerer oder kleiner Stellplatz gewählt.“

$E_2 = \{m\,S; m\,\overline{S}; k\,S; k\,\overline{S}\}$

$P(E_2) = P(m\,S) + P(m\,\overline{S}) + P(k\,S) + P(k\,\overline{S}) = 0,18 + 0,12 + 0,06 + 0,14 = 0,50$

Unvereinbarkeit zweier Ereignisse

Prüfen auf Unvereinbarkeit:

Erläuterung: *Unvereinbarkeit*

Zwei Ereignisse E_1 und E_2 heißen unvereinbar, wenn gilt:

$E_1 \cap E_2 = \varnothing$ ($\varnothing$ = leere Menge)

Wenn zwei Ereignisse unvereinbar sind, dann können sie nicht gleichzeitig eintreten.

$E_1 \cap E_2 = \{m\,S; k\,S\} \neq \varnothing \Rightarrow$ E_1 und E_2 sind miteinander vereinbar

© Abiturloesung.de

Stochastische Unabhängigkeit

Prüfen auf Unabhängigkeit:

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse E_1 und E_2 heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(m\,S) + P(k\,S)$$
$$= 0,18 + 0,06$$
$$= 0,24$$

$$P(E_1) \cdot P(E_2) = 0,59 \cdot 0,50 = 0,295$$

$$P(E_1 \cap E_2) \neq P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Die Ereignisse E_1 und E_2 sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)

Gegen Ende einer Saison sind erfahrungsgemäß noch 30 Stellplätze belegt.
Es gelten weiterhin die Wahrscheinlichkeiten aus 1.0.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_3: „Es sind genau 10 Stellplätze mittlerer Größe belegt.“
E_4: „Es sind mehr als acht und höchstens 15 große Stellplätze belegt.“
E_5: „Es ist höchstens ein kleiner Stellplatz ohne Stromanschluss belegt.“

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Binomialverteilung

Interpretation der Situation als Bernoulli-kette:

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche
k = Anzahl der Treffer
p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

E_3: „Es sind genau 10 Stellplätze mittlerer Größe belegt.“

$n = 30$ (30 belegte Stellplätze)
$p = 0,30$ (Wahrscheinlichkeit für einen mittleren Stellplatz)
$k = 10$ (10 Stellplätze sollen belegt sein)

$$P(E_3) = P_{0,30}^{30}(Z = 10) = \binom{30}{10} \cdot 0,3^{10} \cdot 0,70^{20} = 0,14156$$

E_4: „Es sind mehr als acht und höchstens 15 große Stellplätze belegt.“

$n = 30$ (30 belegte Stellplätze)
$p = 0,50$ (Wahrscheinlichkeit für einen mittleren Stellplatz)
$8 < k \leq 15$ (mehr als 8 aber höchstens 15 Stellplätze sollen belegt sein)

$P(E_4) = P(8 < k \leq 15) = P(9 \leq k \leq 15)$

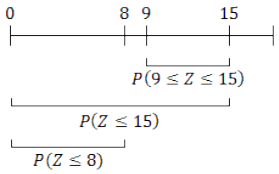
© Abiturloesung.de

Erläuterung:

Wenn die Zufallsvariable Z zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a-1)$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“



$= P_{0,50}^{30}(Z \leq 15) - P_{0,50}^{30}(Z \leq 8) \overset{TW}{=} 0,57223 - 0,00806 = 0,56417$

E_5: „Es ist höchstens ein kleiner Stellplatz ohne Stromanschluss belegt.“

$n = 30$ (30 belegte Stellplätze)
$p = 0,14$ (Wahrscheinlichkeit für einen mittleren Stellplatz)
$k \leq 1$ (höchstens 1 kleiner Stellplatz soll belegt sein: entweder einer oder keiner)

$P(E_5) = P(Z \leq 1) = P(Z = 0) + P(Z = 1)$

$= \binom{30}{0} \cdot 0,14^0 \cdot 0,86^{30} + \binom{30}{1} \cdot 0,14^1 \cdot 0,86^{29} = 0,01084 + 0,05293 = 0,06377$

Teilaufgabe 1.4 (3 BE)

Erfahrungsgemäß haben 85 % der Camper im Voraus gebucht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten 20 Ankommenden genau drei nicht vorgebucht haben und diese hintereinander folgen.

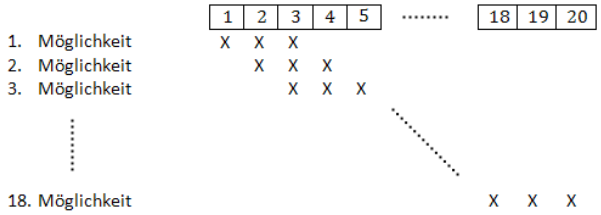
Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Binomialverteilung

Interpretation als Bernoulliexperiment mit $n = 20$ und $p = 0,15$

Erläuterung: *Permutation*

Die drei Nicht-Vorbucher sollen direkt aufeinander folgen, zum Beispiel auf den Plätzen eins, zwei und drei unter den nächsten 20 Neuankommenden.
Wir betrachten jetzt nur den ersten Nicht-Vorbucher, da dann die Positionen der anderen beiden ohnehin feststehen.
Dieser kann als erster, zweiter, dritter, vierter usw. ankommen, jedoch spätestens als achtzehnter, da sonst die restlichen Nicht-Vorbucher nicht mehr unter den insgesamt nächsten 20 Ankommenden wären.



Es gibt also 18 Möglichkeiten, wann die Gruppe der drei Nicht-Vorbucher ankommen kann.

Es gibt 18 Möglichkeiten die drei unmittelbar aufeinander folgenden Nicht-Vorbucher auf 20 „Plätze“ zu verteilen.

Wahrscheinlichkeit für einen Vorbucher: $p = 0,85$

Wahrscheinlichkeit für einen Nicht-Vorbucher: $p = 0,15$

Es sollen sich genau 3 Vorbucher und somit 17 Nicht-Vorbucher unter den nächsten 20 ankommenden befinden.

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt also:

$P = 18 \cdot 0,85^{17} \cdot 0,15^3 = 0,00383$

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Der Campingplatzbetreiber hat nun die Plätze je nach Lage in die drei Qualitätsstufen A, B und C unterteilt. In jeder Lage kann der Platz mit (S) oder ohne ($\overline{S}$) Stromanschluss gewählt werden. Die Zufallsgröße X gibt die Nummer der Kategorie des gebuchten Platzes an. Auf Grund langjähriger Aufzeichnungen geht er von folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ aus:

ω	$A\overline{S}$	AS	$B\overline{S}$	BS	$C\overline{S}$	CS
x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0	0,15	0,03	0,21	a	b

Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b, wenn $E(X) = 4,8$ gilt.
[Teilergebnis: $a = 0,09$]

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung muss gelten:

1. Alle Wahrscheinlichkeiten addiert müssen 1 ergeben:
   $\Rightarrow 0 + 0,15 + 0,03 + 0,21 + a + b = 1$
   $a + b = 0,61$ (I)

2. $E(X) = 4,8$

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X bei n möglich eintretenden Ereignissen, ist definiert als:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{P(X = x_i)}_{p_i} = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \cdots + x_n\,p_n$$

$\Rightarrow 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,03 + 4 \cdot 0,21 + 5 \cdot a + 6 \cdot b = 4,8$
$5a + 6b = 3,57$ (II)

Lösen des Gleichungssystems:

(I) $a + b = 0,61$
(II) $5a + 6b = 3,57$

Aus (I) folgt:
$a = 0,61 - b$

Einsetzen von $a = 0,61 - b$ in (II):

$5 \cdot (0,61 - b) + 6b = 3,57$
$3,05 - 5b + 6b = 3,57$
$b = 0,52$

Einsetzen von $b = 0,52$ in (I):
$a + 0,52 = 0,61$
$a = 0,09$

Für die fehlenden Wahrscheinlichkeiten gilt also:

$P(X = 5) = 0,09$
$P(X = 6) = 0,52$

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

In einer Aktionswoche werden die Stellplatzkosten pro Tag auf 10 € für einen Stellplatz der Lage A, 14 € für Lage B und 18 € für Lage C festgesetzt. Der Stromanschluss ist dabei **nicht** enthalten. Die Kosten für einen Stromanschluss sind unabhängig von der Wahl des Stellplatzes jeweils gleich und sollen so festgelegt werden, dass der Besitzer bei täglich 50 belegten Stellplätzen durchschnittlich 880 € einnimmt.
Berechnen Sie, was ein Stromanschluss pro Tag unter diesen Bedingungen für den Urlauber kostet.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Erwartungswert einer Zufallsgröße

© Abiturloesung.de

ω	$A\bar{S}$	AS	$B\bar{S}$	BS	$C\bar{S}$	CS
x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0	0,15	0,03	0,21	0,09	0,52

X ist der Betrag, den der Besitzer täglich für einen beliebigen Stellplatz einnimmt.

Die Stromkosten k pro Stellplatz sind so zu wählen, dass der Erwartungswert bei 50 belegten Stellplätzen $E(X) = 880$ ist.

Bestimmen des Erwartungswerts in Abhängigkeit der Stromkosten k:

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X bei n möglich eintretenden Ereignissen, ist definiert als:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{P(X = x_i)}_{p_i} = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \cdots + x_n\,p_n$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 50 \cdot [0 \cdot 10 + 0,15 \cdot (10 + k) + 0,03 \cdot 14 + 0,21 \cdot (14 + k) \\ &\qquad + 0,09 \cdot 18 + 0,52 \cdot (18 + k)] \\ &= 50 \cdot [15,84 + 0,88k] \\ &= 792 + 44k \end{aligned}$$

Einsetzen von $E(X) = 792 + 44k$ in $E(X) = 880$:

$792 + 44k = 880$

$44k = 88$

$k = 2$

Der Stromanschluss muss auf 2 € pro Tag festgesetzt werden.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Der Campingplatzbesitzer bezieht von einem Flüssiggaslieferanten 5 kg-Gasflaschen. Der Lieferant garantiert, dass das Füllgewicht nur in 3 % aller Fälle unterschritten wird. Der misstrauische Campingplatzbesitzer vermutet, dass mehr als 3 % der Gasflaschen das Füllgewicht unterschreiten (Gegenhypothese).
Zur Überprüfung testet der Lieferant aus einer größeren Lieferung 100 Flaschen.

Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie deren größtmöglichen Ablehnungsbereich, wenn das Signifikanzniveau 5 % betragen soll.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Signifikanztest

Testgröße: Anzahl X der Gasflaschen mit Gewichtsunterschreitung

Erläuterung: *Nullhypothese*

Man vermutet zwar, dass der Anteil an Gasflaschen mit zu wenig Füllung höher liegt, möchte jedoch eine Fehlentscheidung mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% vermeiden.

Fehlentscheidung bedeutet in diesem Fall, dass der Anteil an Gasflaschen mit Gewichtsunterschreitung gemäß der Garantie des Lieferanten 3% beträgt und man sich („irrtümlich“) geirrt hat.

Die Nullhypothese ist also die Tatsache, dass der Anteil der Gasflaschen mit Gewichtsunterschreitung bei $p = 0,03$ liegt.

Nullhypothese H_0: $p = 0,03$

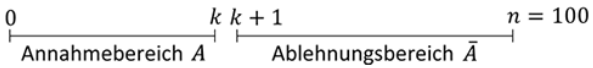
Stichprobenumfang: $n = 100$

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Annahmebereich von H_0: $A = [0\ ;\ k]$

Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = [k + 1\ ;\ 100]$

© Abiturloesung.de



Fehler erster Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“ wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Das ist der Fall wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($X > k$).

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P(X > k) \leq 0,05$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei $p = 0,03$ die Anzahl der zu gering befüllten Gasflaschen größer als ein bestimmter Schwellwert k ist, soll kleiner sein als $\alpha = 0,05$.

$P(X > k) \leq 0,05$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(mindestens k Treffer) = 1 - P(weniger als k Treffer)

In mathematischen Zeichen:

$P(X \geq k) = 1 - P(X < k)$ bzw. $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$

$1 - P(X \leq k) \leq 0,05$

$P(X \leq k) \geq 0,95$

$P_{0,03}^{100}(X \leq k) \geq 0,95$

$k \leq 6$ (aus Tafelwerk)

Maximaler Ablehnungsbereich:

$\overline{A} = \{7; 8; \ldots; 100\}$,

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Erklären Sie kurz, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Hypothesentest - Fehler zweiter Art

Fehler zweiter Art:

Erläuterung: *Fehler zweiter Art*

Der Fehler zweiter Art besteht in der Annahme der Nullhypothese, obwohl diese nicht zutrifft.

Es ist möglich, dass die Anzahl der zu gering befüllten Gasflaschen beim Test unterhalb des Schwellwertes k liegt, auch wenn die Wahrscheinlichkeit $p > 0,03$ höher liegt.
Aufgrund des Testausgangs schlussfolgert man jedoch, dass p wie garantiert 3% ist und begeht hiermit einen Fehler. Diesen nennt man den Fehler 2. Art.

Der Campingplatzbetreiber nimmt an, dass die Wahrscheinlichkeit für das Unterschreiten der Füllmenge $p = 0,03$ beträgt, obwohl dieser Anteil tatsächlich höher liegt.

© Abiturloesung.de