Fachabitur 2010 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades besitzt den Extrempunkt $E(4|0)$, schneidet die y-Achse im Punkt $(0|3)$ und hat an der Stelle $x_w = \frac{7}{3}$ einen Wendepunkt.

Teilaufgabe 1.1 (9 BE)

Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$.
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{3}{16}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$]

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheiten.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f auf zwei Nachkommastellen genau.

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-1,5 \leq x \leq 5$ mithilfe vorliegender und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

Gegeben sind die reellen Funktionen $g_a : x \mapsto \frac{1}{8}(a\,x^4 - 4x^3)$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $D_{g_a} = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_{g_a} bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten sämtlicher Punkte mit waagrechter Tangente des Graphen G_{g_a} und deren Art.

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen G_{g_a}.

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)

Berechnen Sie a so, dass die Graphen G_f aus Teilaufgabe 1.1 und G_{g_a} bei $x = 4$ einen gemeinsamen Punkt besitzen.
[Ergebnis: $a = 1$]

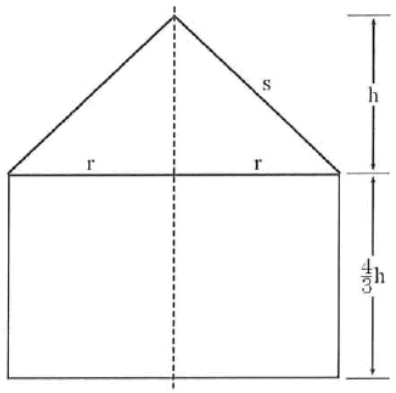
Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_1, mit $g_1(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ im Bereich $-1,5 \leq x \leq 4,5$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe 2.5 (5 BE)

Die Graphen G_f und G_{g_1} schließen im 1. und 4. Quadranten zusammen mit der y-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.

Eine Biogasanlage besteht aus einem zylinderförmigen, oben offenen Grundkörper, das Dach der Höhe h ist kegelförmig (siehe nebenstehende Skizze des Querschnitts).
Die Mantellänge s des Kegels beträgt 15 m. Die folgenden Rechnungen werden ohne Einheiten durchgeführt.



Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Stellen Sie die Maßzahl V des Volumens der gesamten Biogasanlage in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine im gegebenen Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $V : h \mapsto V(h)$ an.
[Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right) \cdot \pi$]

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)

Berechnen Sie h so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Runden Sie dabei nicht. Bestimmen Sie auf den nächsten ganzzahligen Wert gerundet den Wert $V_{\max}$ des maximalen Volumens.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (9 BE)

Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades besitzt den Extrempunkt $E(4|0)$, schneidet die y-Achse im Punkt $(0|3)$ und hat an der Stelle $x_w = \frac{7}{3}$ einen Wendepunkt.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$.
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{3}{16}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$]

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Funktionsgleichung ermitteln

$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

Erläuterung:

Über die gegebenen Bedingungen lassen sich Gleichungen aufstellen, welche die Parameter a, b, c und d enthalten. Durch das Lösen des dadurch entstandenen Gleichungssystems erhält man die gesuchten Werte.

Erste Ableitung bilden:

$f'(x) = 3a\,x^2 + 2b\,x + c$

Zweite Ableitung bilden:

$f''(x) = 6a\,x + 2b$

Bedingungen analysieren:

1. $E(4|0)$ ist als Extrempunkt von f ein Punkt von G_f
   $\Rightarrow$ E erfüllt die Funktionsgleichung
   $\Rightarrow$ $f(4) = 0$
   $a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d = 0$
   $64a + 16b + 4c + d = 0$ (I)

© Abiturloesung.de

2. $E(4|0)$ ist ein Extrempunkt von f

Erläuterung: *Bedingungen für ein Extremum*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$\Rightarrow f'(4) = 0$
$3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 + c = 0$
$48a + 8b + c = 0$ (II)

3. $x_W = \frac{7}{3}$ ist eine Wendestelle

Erläuterung: *Bedingungen für ein Wendepunkt*

Wendepunkte sind Punkte eines Funktionsgraphen, an denen sich die Krümmungsrichtung ändert. Die 2. Ableitung hat an solchen Stellen einen Vorzeichenwechsel, sie ist also zum Beispiel links des Wendepunkts positiv und rechts davon negativ. An der Wendestelle x_W selbst ist die 2. Ableitung Null.

$f''(x_W) = 0$

$\Rightarrow f''\left(\frac{7}{3}\right) = 0$
$6a \cdot \frac{7}{3} + 2b = 0$
$14a + 2b = 0$ (III)

4. Der Punkt (0|3) liegt auf dem Graphen von f
$\Rightarrow$ (0|3) erfüllt die Funktionsgleichung
$\Rightarrow f(0) = 3$
$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 3$
$d = 3$ (IV)

Einsetzen von $d = 3$ in die Funktionsgleichung von f:

$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + 3$

Das Gleichungssystem lautet dann:

(I) $64a + 16b + 4c + 3 = 0$
(II) $48a + 8b + c = 0$
(III) $14a + 2b = 0$

Lösen des Gleichungssystems:

(III):
$2b = -14a$
$b = -7a$ (III')

Einsetzen von $b = -7a$ in (II):
$48a + 8 \cdot (-7a) + c = 0$
$48a - 56a + c = 0$
$c = 8a$ (II')

Einsetzen von $b = -7a$ und $c = 8a$ in (I):
$64a + 16 \cdot (-7a) + 4 \cdot 8a + 3 = 0$
$64a - 112a + 32a + 3 = 0$
$-16a = -3$

$\Rightarrow a = \frac{3}{16}$

Einsetzen von $a = \frac{3}{16}$ in (III'):
$\Rightarrow b = -7 \cdot \frac{3}{16} = -\frac{21}{16}$

Einsetzen von $a = \frac{3}{16}$ in (II'):
$\Rightarrow c = 8 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{2}$

Einsetzen der Werte in die Funktionsgleichung von f:

$$f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{21}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = \frac{3}{16}\left(x^3 - 7x^2 + 8x + 16\right)$$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheiten.

© Abiturloesung.de

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Nullstellen einer Funktion

$f(x) = \frac{3}{16}\left(x^3 - 7x^2 + 8x + 16\right)$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$f(x) = 0 \iff \frac{3}{16}\left(x^3 - 7x^2 + 8x + 16\right) = 0$

$E(4|0)$ ist Extremum (s. Aufgabe 1.1)

Erläuterung:

Ist $x_0 = 0$ eine Nullstelle von f, so gilt immer $f(x_0) = 0$.
Gilt zusätzlich $f'(x_0) = 0$ so nennt man x_0 eine doppelte Nullstelle.

$E(4|0)$ ist Nullstelle, da $f(4) = 0$.
$E(4|0)$ ist nach Angabe auch Extremum, es gilt also $f'(4) = 0$.

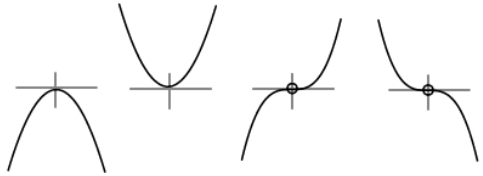
Für $x_1^N = 4$ ist $f(x_1^N) = f'(x_1^N) = 0$

Also ist $x_1^N = 4$ eine doppelte Nullstelle von f.

$\Rightarrow x_1^N = 4$ ist doppelte Nullstelle

Erläuterung: *Vielfachheit von Nullstellen*

Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x-Achse in einem Punkt „berührt“ oder „schneidet“.



1-fache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse.
2-fache (doppelte) Nullstelle: Berührstelle mit der x-Achse.
3-fache Nullstelle: Nullstelle ist ein Sattelpunkt.

$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) \Rightarrow x = 2$ ist doppelte Nullstelle
$(x+5)^2 = (x+5)(x+5) \Rightarrow x = -5$ ist doppelte Nullstelle

$\Rightarrow f(x) = (x-4)^2(x - x_2^N) = (x^2 - 8x + 16)(x - x_2^N)$

Ermitteln von x_2^N mittels Polynomdivision:

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Polynomdivision*

Polynome lassen sich in Summenschreibweise oder auch faktorisiert schreiben. Das Polynom $x^2 + x - 2$ beispielsweise lässt sich in Faktoren folgendermaßen schreiben:

$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

$x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ sind dabei die Nullstellen des Polynoms.

Bei einer Polynomdivision ist bereits eine Nullstelle bekannt. Wir haben zum Beispiel durch Rechnung oder durch Ausprobieren herausgefunden, dass $x = 1$ eine Nullstelle dieses Polynoms ist. Die zweite noch nicht bekannte Lösung, erhalten wir durch Polynomdivision. In der faktorisierten Schreibweise wird das deutlich:

$$(x + 2)(x - 1) : (x - 1) = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \frac{(x + 2) \cdot 1}{1} = x + 2$$

Die Nullstellen des Ergebnisses sind dann die restlichen Nullstellen unseres Polynoms, in diesem Fall also $x = -2$.

Da aber in der Regel nicht alle Faktoren bekannt sind (sonst hätten wir ja auch schon alle Nullstellen) wird die Polynomdivision in der Summenform durchgeführt.

$$\begin{array}{l} (x^2 \ +x \ -2\ ) : (x-1) = x+2 \\ \underline{-(x^2 \ -x)} \\ \qquad\quad 2x \ -2 \\ \qquad\quad \underline{-(2x \ -2)} \\ \qquad\qquad\ \ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (x^3 - 7x^2 \ +8x \ +16) : (x^2 - 8x + 16) = x + 1 \\ \underline{-(x^3 - 8x^2 + 16x)} \\ \qquad\quad x^2 \ -8x \ +16 \\ \qquad\quad \underline{-(x^2 \ -8x \ +16)} \\ \qquad\qquad\qquad\ \ 0 \end{array}$$

$x_1^N = 4$ doppelte Nullstelle

$x_2^N = -1$ einfache Nullstelle

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f auf zwei Nachkommastellen genau.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f(x) = \frac{3}{16}\left(x^3 - 7x^2 + 8x + 16\right)$

$f'(x) = \frac{3}{16}\left(3x^2 - 14x + 8\right)$ (s. Aufgabe 1.1)

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0$

$\frac{3}{16}\left(3x^2 - 14x + 8\right) = 0$

$3x^2 - 14x + 8 = 0$

Erläuterung: *Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Lösungen zu einer Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ lauten stets:
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,c}}{2a}$

$x_{1,2}^E = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3}$

$x_{1,2}^E = \frac{14 \pm \sqrt{100}}{6}$

© Abiturloesung.de

$x_1^E = 4\,,\ x_2^E = \frac{2}{3}$

Bestimmen der y-Koordinaten der Extrempunkte:

$y_1^E = f\left(x_1^E\right) = f(4) = 0$

$\Rightarrow E_1(4|0)$

$y_2^E = f\left(x_2^E\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) \approx 3,47$

$\Rightarrow E_2\left(\frac{2}{3} \mid 3,47\right)$

Art von Extrempunkten ermitteln

$f''(x) = \frac{3}{16}\,(6x - 14)$ (s. Aufgabe 1.1)

Vorzeichen der Zeiten Ableitung bestimmen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum)

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum)

$f''\left(x_1^E\right) = f''(4) = \frac{15}{8} > 0 \Rightarrow E_1(4|0)$ Tiefpunkt

$f''\left(x_2^E\right) = f''\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{15}{8} < 0 \quad \Rightarrow \quad E_2\left(\frac{2}{3} \mid 3,47\right)$ Hochpunkt

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-1,5 \le x \le 5$ mithilfe vorliegender und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Skizze

$f(x) = \frac{3}{16}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$

Nullstellen:

$x_1^N = 4$

$x_2^N = -1$

Extrempunkte:

$E_1(4|0)$ Tiefpunkt
$E_2\left(\frac{2}{3} \mid 3,47\right)$ Hochpunkt

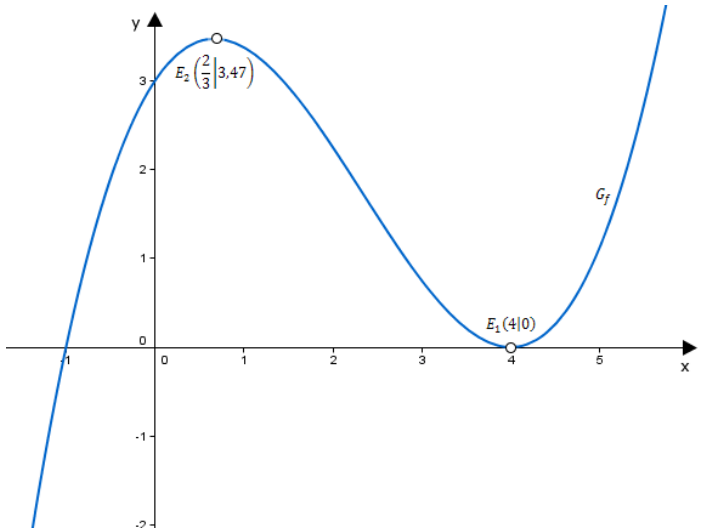
y-Achsenabschnitt:

(0|3)

Wertetabelle: (nicht erforderlich)

x	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	−2,84	0	1,90	3	3,45	3,38	2,93	2,25	1,48	0,75	0,21	0	0,26	1,13

© Abiturloesung.de



Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen $g_a : x \mapsto \frac{1}{8}(a\,x^4 - 4x^3)$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $D_{g_a} = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_{g_a} bezeichnet.

Ermitteln Sie die Koordinaten sämtlicher Punkte mit waagrechter Tangente des Graphen G_{g_a} und deren Art.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Lage von Extrempunkten ermitteln

$g_a(x) = \frac{1}{8}\left(a\,x^4 - 4x^3\right)\ ,\ a > 0$

Erste Ableitung bilden:

$g_a'(x) = \frac{1}{8}\left(4a\,x^3 - 12x^2\right)$

Erste Ableitung Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt (ein Extrempunkt ist ein Punkt mit waagrechter Tangente) an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$g_a'(x) = 0$

$\frac{1}{8}\left(4a\,x^3 - 12x^2\right) = 0$

$\left(4a\,x^3 - 12x^2\right) = 0$

$x^2\,(4a\,x - 12) = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Jeder Faktor wird untersucht.

$x^2 = 0$

$x_{1,2}^E = 0$

$4a\,x - 12 = 0$

$4a\,x = 12$

$x_3^E = \frac{3}{a}$

Bestimmen der y-Koordinaten:

$y_1^E = g_a\left(x_1^E\right) = g_a(0) = 0$

$\Rightarrow E_1(0|0)$

$y_2^E = g_a\left(x_2^E\right) = g_a\left(\frac{3}{a}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{3^4}{a^3} - 4 \cdot \frac{3^3}{a^3}\right) = -\frac{27}{8a^3}$

$\Rightarrow E_2\left(\frac{3}{a}\,|\,-\frac{27}{8a^3}\right)$

© Abiturloesung.de

Art von Extrempunkten ermitteln

Zweite Ableitung bilden:

$g_a''(x) = \frac{1}{8}\left(12a\,x^2 - 24x\right)$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an den Extremstellen ermitteln:

Erläuterung: *Terrassenpunkt/Sattelpunkt*

Ein Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

Ein Terrassenpunkt an der Stelle x^{TP} liegt vor, wenn gilt:

$f'\left(x^{\mathrm{TP}}\right) = f''\left(x^{\mathrm{TP}}\right) = 0$ und $f'''\left(x^{\mathrm{TP}}\right) \neq 0$

Daraus folgt:

Hat die erste Ableitung $f'(x)$ eine doppelte Nullstelle x^{TP}, so liegt an dieser Stelle ein Terrassenpunkt vor.

$g_a''\left(x_1^E\right) = g_a''(0) = 0$

Da $x_1^E = 0$ eine doppelte Nullstelle von g' ist folgt:

$\Rightarrow E_1(0|0)$ Terassenpunkt

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum).

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum).

$g_a''\left(x_3^E\right) = g_a''\left(\frac{3}{a}\right) = \frac{9}{2a} > 0$, da $a > 0$

$\Rightarrow E_2\left(\frac{3}{a} \mid -\frac{27}{8a^3}\right)$ Tiefpunkt

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen G_{g_a}.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Krümmungsverhalten einer Funktion

$g_a(x) = \frac{1}{8}\left(a\,x^4 - 4x^3\right)$

$g_a'(x) = \frac{1}{8}\left(4a\,x^3 - 12x^2\right)$ (s. Aufgabe 2.1)

$g_a''(x) = \frac{1}{8}\left(12a\,x^2 - 24x\right)$ (s. Aufgabe 2.1)

Vorzeichen der zweiten Ableitung bestimmen:

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f negativ auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) < 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall rechtsgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f positiv auf einem Intervall $]a,b[$, d.h. $f''(x) > 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall linksgekrümmt.

Ist die zweite Ableitung einer Funktion f gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $f''(x^W) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

Die Funktion $g_a''(x) = \frac{1}{8}\left(12a\,x^2 - 24x\right)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Bestimmen der Nullstellen von $g_a''(x)$:

$g_a''(x) = 0$

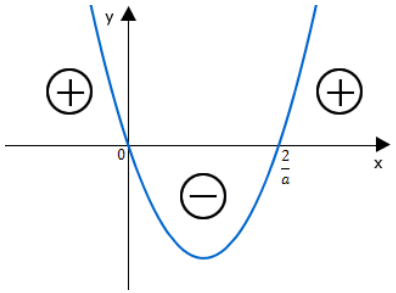
$\frac{1}{8}\left(12a\,x^2 - 24x\right) = 0$

© Abiturloesung.de

$12a\,x^2 - 24x = 0$

$x(a\,x - 2) = 0$

$x = 0 \;\vee\; x = \dfrac{2}{a}$



$g_a''(x) > 0$ für $x < 0$ oder $x > \dfrac{2}{a}$

$\Rightarrow$ G_{g_a} ist im Bereich $]-\infty;0[\,\cup\, \left]\dfrac{2}{a};\infty\right[$ linksgekrümmt.

$g_a''(x) < 0$ für $0 < x < \dfrac{2}{a}$

$\Rightarrow$ G_{g_a} ist im Bereich $\left]0;\dfrac{2}{a}\right[$ rechtsgekrümmt.

Wendestellen bei $x_1^W = 0$ und $x_2^W = \dfrac{2}{a}$

y-Werte an den Wendestellen bestimmen:

$f\left(x_1^W\right) = f(0) = 0$

$\Rightarrow$ $E_1(0|0)$ Terrassenpunkt (siehe Aufgabe 2.1)

$$f\left(x_2^W\right) = f\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{1}{8}\left(a \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^3\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{16}{a^3} - \frac{32}{a^3}\right) = -\frac{2}{a^3}$$

$\Rightarrow$ $W\left(\dfrac{2}{a} \mid -\dfrac{2}{a^3}\right)$ Wendepunkt

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)

Berechnen Sie a so, dass die Graphen G_f aus Teilaufgabe 1.1 und G_{g_a} bei $x = 4$ einen gemeinsamen Punkt besitzen.
[Ergebnis: $a = 1$]

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Parameterwerte ermitteln

$g_a(x) = \dfrac{1}{8}\left(a\,x^4 - 4x^3\right)$

$f(x) = \dfrac{3}{16}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$

Die Graphen von f und g_a schneiden sich bei $x = 4$.

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.

Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$g_a(4) = f(4)$

$f(4) = 0$ (s. Aufgabe 1.1)

$\dfrac{1}{8}\left(a \cdot 4^4 - 4 \cdot 4^3\right) = 0$

$256a - 256 = 0$

$a = 1$

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_1, mit $g_1(x) = \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{2}x^3$ im Bereich $-1,5 \le x \le 4,5$

© Abiturloesung.de

mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Lösung zu Teilaufgabe 2.4

Skizze

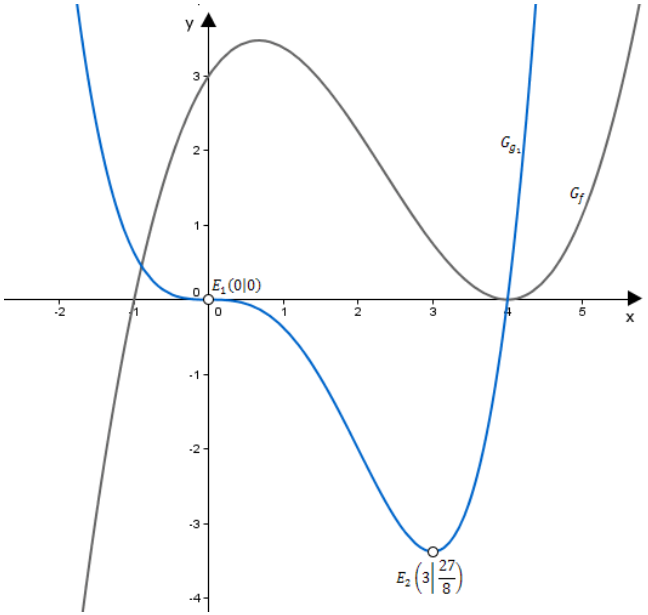
Extrempunkt für $a = 1$:

$E_1(0|0)$ Terassenpunkt (siehe Aufgabe 2.1)

$E_2\left(3 \mid -\frac{27}{8}\right)$ Tiefpunkt (siehe Aufgabe 2.1)

Wertetabelle: (nicht notwendig)

x	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$g_1(x)$	2,32	0,63	0,07	0	−0,05	−0,38	−106	−2	−2,93	−3,38	−2,68	0	5,70



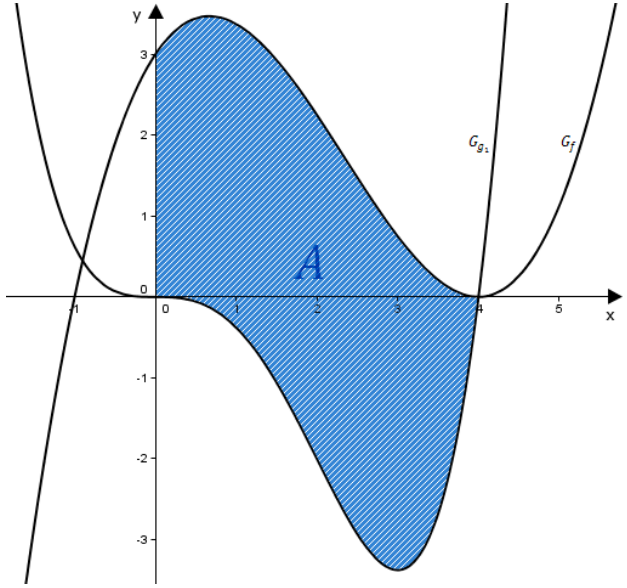
Teilaufgabe 2.5 (5 BE)

Die Graphen G_f und G_{g_1} schließen im 1. und 4. Quadranten zusammen mit der y-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.

Lösung zu Teilaufgabe 2.5

Flächenberechnung

Gesucht ist das Flächenstück zwischen zwei Graphen. Es wird begrenzt von der y-Achse und der Nullstelle $x = 4$.



© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen*

Der Inhalt eines Flächenstücks zwischen zwei Funktionsgraphen G_f und G_g ist gegeben durch:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \text{ dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen a und b nicht explizit vorgegeben, so verwendet man hierfür die Schnittpunkte der beiden Graphen G_f und G_g.

Da nur zwei Schnittpunkte vorhanden sind, kann der innere Betrag weggelassen werden.

Vorsicht: kommt insgesamt beim Integral ein negativer Wert heraus, muss nur das Integral in Betrag gesetzt werden.

$$A = \int_0^4 [f(x) - g_1(x)] \text{ dx}$$

$$A = \int_0^4 \left[\frac{3}{16}x^3 - \frac{21}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 - \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3\right)\right] \text{ dx}$$

$$A = \int_0^4 \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{11}{16}x^3 - \frac{21}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 3\right] \text{ dx}$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

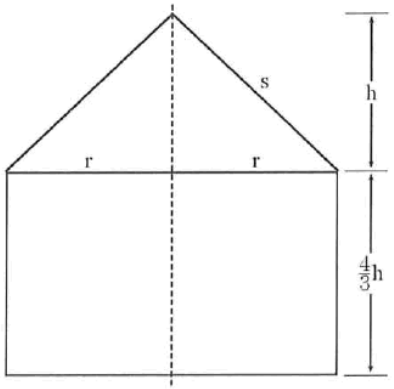
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$A = \left[-\frac{1}{40}x^5 + \frac{11}{64}x^4 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 3x\right]_0^4$$

$$A = \left(-\frac{1}{40}\cdot 4^5 + \frac{11}{64}\cdot 4^4 - \frac{7}{16}\cdot 4^3 + \frac{3}{4}\cdot 4^2 + 3\cdot 4\right) - (0) = \frac{72}{5}$$

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Eine Biogasanlage besteht aus einem zylinderförmigen, oben offenen Grundkörper, das Dach der Höhe h ist kegelförmig (siehe nebenstehende Skizze des Querschnitts).
Die Mantellänge s des Kegels beträgt 15 m. Die folgenden Rechnungen werden ohne Einheiten durchgeführt.



Stellen Sie die Maßzahl V des Volumens der gesamten Biogasanlage in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine im gegebenen Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $V : h \mapsto V(h)$ an.
[Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right) \cdot \pi$]

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Volumen eines geometrischen Körpers

Das Gesamtvolumen setzt sich aus zwei Teilvolumina zusammen:

$V = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kegel}}$

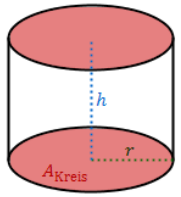
Berechnen des Zylindervolumens:

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Volumen eines Zylinders*

Das Volumen eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h berechnet sich aus dem Produkt aus der kreisförmigen Grundfläche A_{Kreis} und der Höhe.

$V_{\text{Zylinder}} = A_{\text{Kreis}} \cdot h = \pi\, r^2\, h$



$V_{\text{Zylinder}} = A_{\text{Kreis}} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$

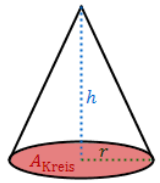
$V_{\text{Zylinder}} = \pi\, r^2 \cdot \frac{4}{3} h$

Berechnen des Kegelvolumens:

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*

Das Volumen eines Kegels mit dem Radius r und der Höhe h berechnet sich aus dem Produkt aus der kreisförmigen Grundfläche A_{Kreis} und dem Drittel der Höhe.

$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} A_{\text{Kreis}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi\, r^2\, h$



$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} A_{\text{Kreis}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi\, r^2\, h$

Für das Gesamtvolumen der Biogasanlage ergibt sich:

$$V = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kegel}}$$
$$= \pi\, r^2 \cdot \frac{4}{3} h + \frac{1}{3} \pi\, r^2\, h$$
$$= \frac{5}{3} \pi\, r^2\, h$$

Erläuterung:

Während man für h einen beliebigen Wert wählen kann, muss der Radius r so gewählt werden (in Abhängigkeit von h), dass die genannte Bedingung für die Mantellänge $s = 15$ erfüllt ist.
Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich nachfolgende Bedingung:

$s^2 = r^2 + h^2$

$15^2 = r^2 + h^2$

© Abiturloesung.de

$r^2 = 225 - h^2$

Einsetzen der Bedingung in die Volumenformel:

$$V(h) = \frac{5}{3}\pi \left(225 - h^2\right) h$$
$$= \pi \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right)$$

Definitionsbereich bestimmen

Für die Größe h gibt es folgende Bedingungen, die **alle** erfüllt sein müssen:

1. h muss als Höhe eines realen Körpers positiv sein
   $\Rightarrow \quad h > 0$

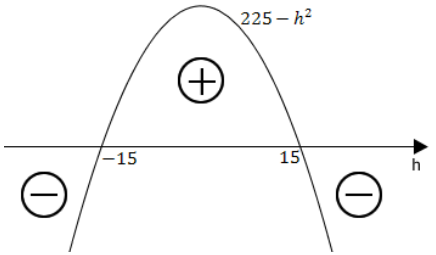
2. r muss als Radius positiv sein
   $\Rightarrow \quad r > 0$

   Mit $r^2 = 225 - h^2$ folgt:

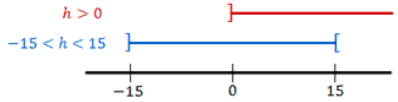
   $225 - h^2 > 0$

Erläuterung: *Vorzeichenwechsel*

Die Funktion $225 - h^2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel und hat Nullstellen bei $h = \pm 15$. Zwischen den beiden Nullstellen ist der Ausdruck positiv.



Um die Bedingungen zu kombinieren, bedient man sich der Anschauung durch einen Zahlenstrahl:



$\Rightarrow \quad 0 < h < 15$

© Abiturloesung.de

Erläuterung:

Da beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, kann h nur Werte zwischen 0 und 15 annehmen.
Die Ränder sind ausgeschlossen, da für $h = 0$ bzw. $r = 0$ kein geometrischer Körper entstehen kann.
Es folgt also für die Definitionsmenge:

$\Rightarrow \quad D_V =]0; 15[$

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)

Berechnen Sie h so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Runden Sie dabei nicht. Bestimmen Sie auf den nächsten ganzzahligen Wert gerundet den Wert $V_{\max}$ des maximalen Volumens.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Extremwertaufgabe

$$V(h) = \pi \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right)$$

Erste Ableitung bilden:

$$V'(h) = \pi \left(375 - 5h^2\right)$$

Erste Ableitung Nullsetzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$V'(h) = 0$

$\pi \left(375 - 5h^2\right) = 0$

$375 - 5h^2 = 0$

$h^2 = 75$

$h = \pm\sqrt{75}$

Da h als Höhe eines realen Körpers positiv sein muss, betrachtet man nur die positive Lösung:

$h_{\max} = \sqrt{75}$

Bestimmen des zu $h_{\max}$ gehörenden Volumens:

$$V_{\max} = V\left(h_{\max}\right) = 375\pi \cdot \sqrt{75} - \frac{5}{3}\pi\sqrt{75}^3 \approx 6802$$

Das größt mögliche Volumen beträgt $6802\,\mathrm{m}^3$.

© Abiturloesung.de