Fachabitur 2010 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl, Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P\left(4 \mid -\frac{1}{2}\right)$ auf dem Graphen der Funktion f_a liegt.

Nun wird $a = 3$ gesetzt. Die Funktion f_3 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet. Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{8}x(x-3)(x-5)^2$.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Zeigen Sie, dass sich die Funktion f auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{8}\left(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x\right)$ darstellen lässt.

Teilaufgabe 2.2 (9 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f.

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-0,25 \leq x \leq 6$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen im 4. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau.

Forscher untersuchten jeweils fünf Tage lang das Wachstum von Bakteriensorten. Hierbei ergab sich, dass die von den Bakterien bedeckte Fläche annähernd durch die reelle Funktion

$A : t \mapsto A(t)$ mit $A(t) = \frac{1}{8}(t^3 + a\,t^2 + b\,t + c)$ mit $a, b, c, \in \mathbb{R}$ und $t \in [0;5]$

beschrieben werden kann, wobei $A(t)$ die bedeckte Fläche (in mm^2) zum Zeitpunkt t (in Tagen) bezeichnet.
Bei einer bestimmten Sorte war zu Beginn des Untersuchungszeitraums ($t = 0$) die von den Bakterien bedeckte Fläche $1\,\text{mm}^2$ groß. Nach zwei Tagen hat der Bestand sein Maximum mit 5mm^2 erreicht.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c und damit $A(t)$.
[Ergebnis: $A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$]

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Berechnen Sie die von den Bakterien nach drei Stunden bedeckte Fläche gerundet auf eine Nachkommastelle genau.

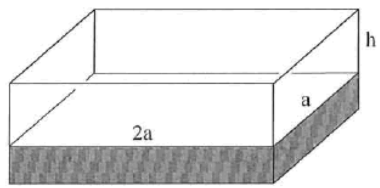
Teilaufgabe 3.3 (5 BE)

Ermitteln Sie die Wendestelle t_W der Funktion A und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

Teilaufgabe 3.4 (3 BE)

Zeichnen Sie für $t \in [0;5]$ den Graphen der Funktion A mit Hilfe vorliegender Ergebnisse.

Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Länge $2a$, der Breite a und der Höhe h. Dieses wird auf ein geeignetes Fundament gesetzt. Die lichtdurchlässige Oberfläche soll $4\,\text{m}^2$ betragen. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



Teilaufgabe 4.1 (4 BE)

Bestimmen Sie das Volumen $V(a)$ des Daches in Abhängigkeit von a.
[Mögliches Ergebnis: $V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$]

Teilaufgabe 4.2 (5 BE)

Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V: a \mapsto V(a)$ für den in 4.0 gegebenen Sachzusammenhang.

Teilaufgabe 4.3 (7 BE)

Ermitteln Sie a so, dass das Volumen des Daches den größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die zugehörige Höhe h.

Lösung

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a: x \mapsto -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl, Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a.

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Nullstellen einer Funktion

$f_a(x) = -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2$

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$f_a(x) = 0 \iff -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2 = 0$

Erläuterung: *Produkt gleich Null setzen*

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Jeder Faktor wird untersucht.

$x = 0$
$x_1^N = 0$

$x - a = 0$
$x_2^N = a$

$(x-5)^2 = 0$
$x_3^N = 5$

Fallunterscheidung

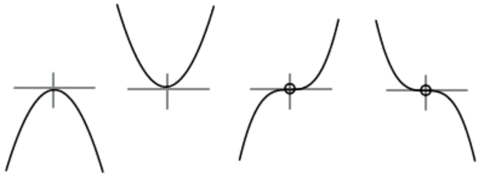
Erläuterung: *Fallunterscheidung*

Der Faktor $(x-a)$ verändert sich für verschiedene Werte von a.
Spezialfälle sind $a = 0$ und $a = 5$.
Hier nimmt der Faktor die Form eines anderen Faktors an, der in der Funktionsgleichung vorkommt.

1. Fall: $a = 0$

Erläuterung: *Vielfachheit von Nullstellen*

Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x-Achse in einem Punkt „berührt“ oder „schneidet“.



1-fache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse.
2-fache (doppelte) Nullstelle: Berührstelle mit der x-Achse.
3-fache Nullstelle: Nullstelle ist ein Sattelpunkt.

$x^2 = x \cdot x \Rightarrow x = 0$ ist doppelte Nullstelle
$(x-5)^2 = (x-5)(x-5) \Rightarrow x = 5$ ist doppelte Nullstelle

$x = 0$ ist doppelte Nullstelle
$x = 5$ ist doppelte Nullstelle
$\Rightarrow$ f_0 hat zwei Nullstellen

2. Fall: $a = 5$

$x = 0$ ist einfache Nullstelle
$x = 5$ ist dreifache Nullstelle
$\Rightarrow$ f_5 hat zwei Nullstellen

3. Fall: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$ (a ist eine beliebige reelle Zahl außer 0 und 5)

$x = 0$ ist einfache Nullstelle
$x = a$ ist einfache Nullstelle
$x = 5$ ist doppelte Nullstelle
$\Rightarrow$ f_a hat drei Nullstellen

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P\left(4 \mid -\frac{1}{2}\right)$ auf dem Graphen der Funktion f_a liegt.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Parameterwerte ermitteln

$f_a(x) = -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2$

Erläuterung: *Einsetzen*

Liegt ein Punkt $A(x|y)$ auf dem Graphen einer Funktion f, so erfüllen seine Koordinaten die Funktionsgleichung.
$f(x) = y$
Damit $P\left(4 \mid -\frac{1}{2}\right)$ auf dem Graphen der Funktion f_a liegt muss also gelten:
$f_a(4) = -\frac{1}{2}$
Die Gleichung muss anschließend nach a aufgelöst werden.

$f_a(4) = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{8} \cdot 4 \cdot (4-a)(4-5)^2 = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \cdot (4-a) \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

$4 - a = 1$

$a = 3$

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Nun wird $a = 3$ gesetzt. Die Funktion f_3 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet. Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{8}x(x-3)(x-5)^2$.

Zeigen Sie, dass sich die Funktion f auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{8}\left(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x\right)$ darstellen lässt.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Ergebnis rechnerisch überprüfen

$f(x) = -\frac{1}{8}x(x-3)(x-5)^2$

> Erläuterung: *Binomische Formel*
>
> Zweite binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$
>
> Die zweite binomische Formel wird auf $(x-5)^2$ angewendet:
>
> $(x-5)^2$
> $x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2$
> $x^2 - 10x + 25$

$= -\frac{1}{8}(x^2 - 3x)(x^2 - 10x + 25)$

$= -\frac{1}{8}(x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 3x^3 + 30x^2 - 75x)$

$= -\frac{1}{8}(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x)$

Teilaufgabe 2.2 (9 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion

f .

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Lage von Extrempunkten ermitteln

$f(x) = -\frac{1}{8}\left(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x\right)$ (siehe Aufgabe 2.1)

Bilden der ersten Ableitung:

$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(4x^3 - 39x^2 + 110x - 75\right)$

Erste Ableitung gleich Null setzen.

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:
>
> $f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0$

$-\frac{1}{8}\left(4x^3 - 39x^2 + 110x - 75\right) = 0$

$4x^3 - 39x^2 + 110x - 75 = 0$

> Erläuterung: *Doppelte Nullstelle*
>
> Aus Teilaufgabe 1.1 folgt:
> $x = 5$ ist für alle $a \in \mathbb{R}$ eine doppelte Nullstelle von f und somit eine einfache Nullstelle von f' .

$x_1^E = 5$ (doppelte Nullstelle (siehe Aufgabe 1.1), also Extremstelle)

Erläuterung: *Lösen einer Gleichung dritten Grades*

Das Lösen einer Gleichung dritten Grades (auf der rechten Seite muss die Null stehen) setzt voraus, dass bereits eine Lösung bekannt ist. Ist dies nicht der Fall, so muss eine Lösung durch Ausprobieren geraten werden.
Hat man eine Lösung gefunden, so teilt man mittels Polynomdivision den Term links des Gleichheitszeichens durch die bekannte Lösung.

Polynomdivision durchführen:

Erläuterung: *Polynomdivision*

Polynome lassen sich in Summenschreibweise oder auch faktorisiert schreiben. Das Polynom $x^2 + x - 2$ beispielsweise lässt sich in Faktoren folgendermaßen schreiben:

$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

$x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ sind dabei die Nullstellen des Polynoms.

Bei einer Polynomdivision ist bereits eine Nullstelle bekannt. Wir haben zum Beispiel durch Rechnung oder durch Ausprobieren herausgefunden, dass $x = 1$ eine Nullstelle dieses Polynoms ist. Die zweite noch nicht bekannte Lösung, erhalten wir durch Polynomdivision. In der faktorisierten Schreibweise wird das deutlich:

$$(x + 2)(x - 1) : (x - 1) = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \frac{(x + 2) \cdot 1}{1} = x + 2$$

Die Nullstellen des Ergebnisses sind dann die restlichen Nullstellen unseres Polynoms, in diesem Fall also $x = -2$.

Da aber in der Regel nicht alle Faktoren bekannt sind (sonst hätten wir ja auch schon alle Nullstellen) wird die Polynomdivision in der Summenform durchgeführt.

$$\begin{array}{lll}
(x^2 & +x & -2\ ) : (x - 1) = x + 2 \\
\underline{-(x^2} & \underline{-x)} & \\
 & 2x & -2 \\
 & \underline{-(2x} & \underline{-2)} \\
 & & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
(4x^3 & -39x^2 & +110x & -75) : (x - 5) = 4x^2 - 19x + 15 \\
\underline{-(4x^3} & \underline{-20x^2)} & & \\
 & -19x^2 & +110x & \\
 & \underline{-(-19x^2} & \underline{+95x)} & \\
 & & 15x & -75 \\
 & & \underline{-(15x} & \underline{-75)} \\
 & & & 0
\end{array}$$

Bestimmen der Nullstellen des Ergebnisses der Polynomdivision:

$4x^2 - 19x + 15 = 0$

$$x_{2,3}^E = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15}}{2 \cdot 4}$$

$$x_{2,3}^E = \frac{19 \pm 11}{8}$$

$x_2^E = 3,75\,;\ x_3^E = 1$

$f(x_1^E) = f(5) = 0$
$\Rightarrow E_1(5|0)$

$f(x_2^E) = f(3,75) \approx -0,55$
$\Rightarrow E_2(3,75|-0,55)$

$f(x_3^E) = f(1) = 4$
$\Rightarrow E_2(1|4)$

Art von Extrempunkten ermitteln

Bilden der zweiten Ableitung:

$$f''(x) = -\frac{1}{8}\left(12x^2 - 78x + 110\right)$$

Vorzeichen der zweiten Ableitung an den Stellen x_1^E, x_2^E und x_3^E bestimmen:

> Erläuterung: *Art eines Extremums*
>
> Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum)
>
> Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum)

$f''(x_1^E) = f''(5) = -2,5 < 0 \Rightarrow$ relativer Hochpunkt $HOP(5|0)$

$f''(x_2^E) = f''(3,75) \approx 1,72 > 0 \Rightarrow$ realtiver Tiefpunkt $TP(3,75|-0,55)$

$f''(x_3^E) = f''(1) = -5,5 < 0 \Rightarrow$ relativer Hochpunkt $HOP(1|4)$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-0,25 \leq x \leq 6$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Skizze

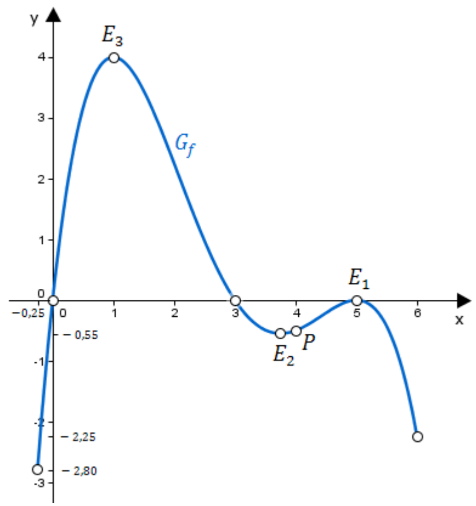
Ergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben:

$f(-0,25) \approx -2,80$
$f(6) = -2,25$

$$P\left(4 \mid -\frac{1}{2}\right)$$

relativer Hochpunkt $HOP(5|0)$
relativer Tiefpunkt $TP(3,75|-0,55)$
relativer Hochpunkt $HOP(1|4)$

$x_1^N = 0$ Nullstelle
$x_2^N = 3$ Nullstelle
$x_3^N = 5$ Nullstelle

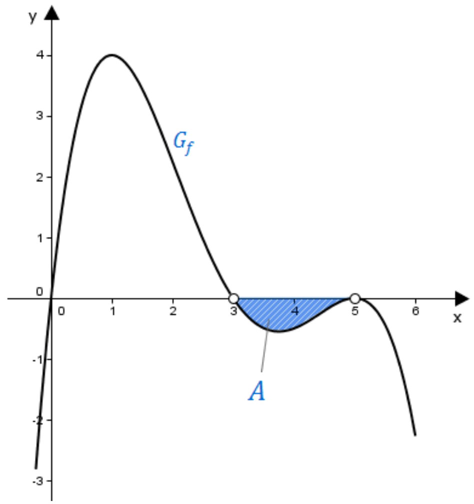


Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen im 4. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau.

Lösung zu Teilaufgabe 2.4

Flächenberechnung



Flächeninhalt A bestimmen:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x-Achse zwischen 3 und 5 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A = \left| \int_3^5 f(x)\mathrm{d}x \right|$$

$$A = \left| \int_3^5 f(x)\mathrm{d}x \right|$$

$$= \left| \int_3^5 -\frac{1}{8}(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x)\mathrm{d}x \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{13}{4}x^4 + \frac{55}{3}x^3 - \frac{75}{2}x^2 \right]_3^5 \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{5}\cdot 5^5 - \frac{13}{4}\cdot 5^4 + \frac{55}{3}\cdot 5^3 - \frac{75}{2}\cdot 5^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(-\frac{1}{5}\cdot 3^5 - \frac{13}{4}\cdot 3^4 + \frac{55}{3}\cdot 3^3 - \frac{75}{2}\cdot 3^2 \right)\right)\right|$$

$$= \left| -\frac{1}{8}\left(-52\frac{1}{12} - \left(-57\frac{3}{20} \right) \right) \right| = \frac{19}{30} \approx 0,63$$

Die gesuchte Fläche beträgt $0,63\,\mathrm{FE}$. (Flächeneinheiten)

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Forscher untersuchten jeweils fünf Tage lang das Wachstum von Bakteriensorten. Hierbei ergab sich, dass die von den Bakterien bedeckte Fläche annähernd durch die reelle Funktion

$$A: t \mapsto A(t) \text{ mit } A(t) = \frac{1}{8}(t^3 + a\,t^2 + b\,t + c) \text{ mit } a, b, c, \in \mathbb{R} \text{ und } t \in [0;5]$$

beschrieben werden kann, wobei $A(t)$ die bedeckte Fläche (in mm^2) zum Zeitpunkt t (in Tagen) bezeichnet.
Bei einer bestimmten Sorte war zu Beginn des Untersuchungszeitraums ($t = 0$) die von den Bakterien bedeckte Fläche $1\,\mathrm{mm}^2$ groß. Nach zwei Tagen hat der Bestand sein Maximum mit $5\mathrm{mm}^2$ erreicht.

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c und damit $A(t)$.
[Ergebnis: $A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$]

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Extremwertaufgabe

$$A(t) = \frac{1}{8}(t^3 + a\,t^2 + b\,t + c)$$

Erste Ableitung bilden:

$$A'(t) = \frac{1}{8}(3t^2 + 2a\,t + b)$$

Bedingungen analysieren:

Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*

Über die gegebenen Bedingungen lassen sich Gleichungen aufstellen, welche die Parameter a, b und c enthalten. Durch das Lösen des dadurch entstandenen Gleichungssystems erhält man die gesuchten Werte.

- Fläche zum Zeitpunkt $t = 0$ ist 1mm^2: $A(0) = 1$
  $A(0) = \frac{1}{8}(0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c) = 1$
  $c = 8$

- Nach 2 Tagen beträgt die Fläche 5mm^2: $A(2) = 5$
  $A(2) = \frac{1}{8}(2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 8) = 5 \quad | \cdot 8$
  $4a + 2b = 24 \;\; \text{(I)}$

Erläuterung: *Erste Ableitung*

Für $t = 2$ Tagen liegt ein Extremum vor, d.h. die erste Ableitung ist an dieser Stelle gleich Null.

- Nach 2 Tagen ist die Fläche maximal: $A'(2) = 0$
  $A'(2) = \frac{1}{8}(3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b) = 0 \quad | \cdot 8$
  $4a + b = -12 \;\; \text{(II)}$

Gleichungssystem:
(I) $4a + 2b = 24$
(II) $4a + b = -12$

(I)-(II): $b = 36$

$b = 36$ in (II) einsetzen:

$4a + 36 = -12$
$a = -12$

Berechnete Werte für die Parameter a, b und c in $A(t)$ einsetzen:

$$A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Berechnen Sie die von den Bakterien nach drei Stunden bedeckte Fläche gerundet auf eine Nachkommastelle genau.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Funktionswert berechnen

$$A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$$

Erläuterung:

Da t in Tagen (d) angegeben wird, müssen die gefragten 3 Stunden (h) zunächst in Tage umgerechnet werden. Eine Stunde entspricht $\frac{1}{24}$ Tag, also sind drei Stunden:
$3\,\text{h}= \frac{3}{24}\,\text{d}= \frac{1}{8}\,\text{d}$

Zeitpunkt t in Tagen:

$$t = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Einsetzen in den Funktionsterm:

$$A\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^3 - 12 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + 36 \cdot \frac{1}{8} + 8\right) \approx 1,5$$

Die von den Bakterien bedeckte Fläche nach 3 Stunden beträgt ungefähr $1,5\,\text{mm}^2$.

Teilaufgabe 3.3 (5 BE)

Ermitteln Sie die Wendestelle t_W der Funktion A und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3

Wendepunkt ermitteln

$A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$

$A'(t) = \frac{1}{8}(3t^2 - 24t + 36)$ (s. Teilaufgabe 3.1)

Zweite Ableitung bilden:
$A''(t) = \frac{1}{8}(6t - 24)$

> Erläuterung: *Bedingungen für ein Wendepunkt*
>
> Wendepunkte sind Punkte eines Funktionsgraphen, an denen sich die Krümmungsrichtung ändert. Die 2. Ableitung hat an solchen Stellen einen Vorzeichenwechsel, sie ist also zum Beispiel links des Wendepunkts positiv und rechts davon negativ. An der Wendestelle x_W selbst ist die 2. Ableitung Null.
> $f''(x_W) = 0$
>
> Um den Vorzeichenwechsel von f'' jedoch garantieren zu können, ist eine zusätzliche Bedingung notwendig. An Wendepunkten ist die 3. Ableitung stets von Null verschieden.
>
> $f'''(x_W) \neq 0$
>
> Da f'' die 1. Ableitung von f' ist, sind die Nullstellen von f'' auch die Extremwerte von f'.
>
> $f'' = (f')'$
>
> Wendepunkte sind also auch die Stellen, an denen die Steigung extremal wird, also am größten oder am kleinsten ist.

$A''(t) = 0$

$\frac{1}{8}(6t - 24) = 0$

$6t - 24 = 0$

$t_W = 4$

Dritte Ableitung bilden:
$A'''(t) = \frac{3}{4} \neq 0$

$\Rightarrow$ Wendestelle bei $t_W = 4$

Interpretation

Nach 4 Tagen ist der Rückgang ($A'(4) = -\frac{3}{2} < 0$) der Bakterien am größten, d.h. die Fläche nimmt also am stärksten ab.

Teilaufgabe 3.4 (3 BE)

Zeichnen Sie für $t \in [0;5]$ den Graphen der Funktion A mit Hilfe vorliegender Ergebnisse.

Lösung zu Teilaufgabe 3.4

Skizze

$A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$

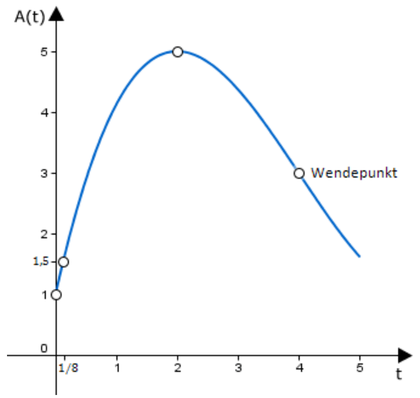
$A(0) = 1$

$A(2) = 5$ (Maximum)

$A(5) = 1{,}63$

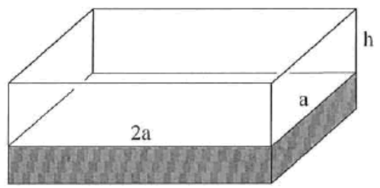
$A\left(\frac{1}{8}\right) \approx 1{,}5$

$t_W = 4$ (Wendestelle)



Teilaufgabe 4.1 (4 BE)

Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Länge $2a$, der Breite a und der Höhe h. Dieses wird auf ein geeignetes Fundament gesetzt. Die lichtdurchlässige Oberfläche soll $4\,\text{m}^2$ betragen. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



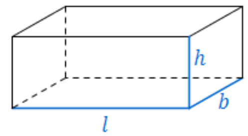
Bestimmen Sie das Volumen $V(a)$ des Daches in Abhängigkeit von a.
[Mögliches Ergebnis: $V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$]

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Volumen eines Quaders

Gegeben: $O = 4\,\text{m}^2$
Gesucht: $V(a)$

Erläuterung: *Volumen eines Quaders*



l: Länge
b: Breite
h: Höhe

Volumen: Länge x Breite x Höhe
$V = l \cdot b \cdot h$

Das Volumen des Terrariumdaches ist: $V = 2a \cdot a \cdot h$

Erläuterung:

Während man für a einen beliebigen Wert wählen kann, muss die Höhe h so gewählt werden (in Abhängigkeit von a), dass die genannte Bedingung für die Oberfläche erfüllt ist.

Da für die lichtdurchlässige Oberfläche O (Summe aus allen Seitenflächen und der Decke; der Boden ist nicht lichtdurchlässig und gehört somit nicht zu dieser Rechnung) der feste Wert $4\,\text{m}^2$ angesetzt ist, ergibt sich nachfolgende Bedingung für die Höhe.

$O = 4$
$O = 2 \cdot 2a\,h + 2 \cdot a\,h + 2a \cdot a = 4$
$6a\,h + 2a^2 = 4$

Erläuterung:

Um die Bedingung für h zu erhalten, lösen wir die Gleichung nach h auf.

$6a\,h = 4 - 2a^2$

$$h = \frac{4 - 2a^2}{6a} = \frac{2 - a^2}{3a}$$

Einsetzen in die Volumenformel:

$$V(a) = 2a \cdot a \cdot \frac{2-a^2}{3a} = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$$

Teilaufgabe 4.2 (5 BE)

Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V : a \mapsto V(a)$ für den in 4.0 gegebenen Sachzusammenhang.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Definitionsbereich bestimmen

Für die Größe a gibt es folgende Bedingungen, die **alle** erfüllt sein müssen:

Erläuterung:

a und h müssen beide positiv sein, da sie Breite und Höhe eines realen Quaders darstellen.

1. $a > 0$

2. $h > 0$

   $$\frac{2-a^2}{3a} > 0$$

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

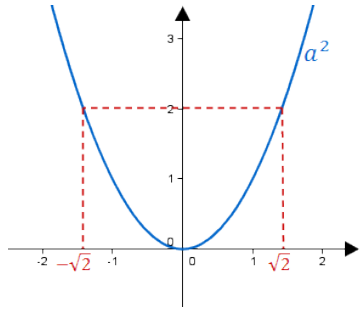
Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$)

Da $a > 0$, kann der Nenner nie kleiner Null werden. Es bleibt also nur der Fall Zähler und Nenner positiv.

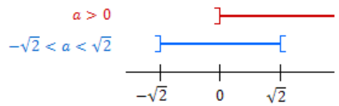
Zähler > 0 und Nenner > 0:

Zähler: $2 - a^2 > 0$
$2 > a^2$



Nenner: $3a > 0 \Rightarrow a > 0$

Veranschaulichung beider Bedingungen am Zahlenstrahl:



Beide Bedingungen müssen erfüllte sein.

$\Rightarrow 0 < a < \sqrt{2}$

Erläuterung:

Da beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, kann a nur Werte zwischen 0 und $\sqrt{2}$ annehmen.
Die Ränder sind ausgeschlossen, da für $a = 0$ bzw. $h = 0$ kein Quader entstehen kann.
Es folgt also für die Definitionsmenge:

$$D_V = \left]0; \sqrt{2}\right[$$

Teilaufgabe 4.3 (7 BE)

Ermitteln Sie a so, dass das Volumen des Daches den größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die zugehörige Höhe h.

Lösung zu Teilaufgabe 4.3

Extremwertaufgabe

$$V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$$

Gefragt ist nach demjenigen Wert a, für den das Volumen $V(a)$ maximal wird. Man sucht also die Extremstelle (absolutes Maximum) der Funktion V.

Erste Ableitung bilden:
$$V'(a) = \frac{4}{3} - 2a^2$$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$$V'(a) = \frac{4}{3} - 2a^2 = 0$$
$$a_{max} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Die negative Lösung ist nicht in der Definitionsmenge D_V. Es bleibt also nur die Lösung $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (relatives Extremum)

Untersuchen ob $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ein absolutes Maximum ist:

$$V''(a) = -4a$$

$$V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -4\sqrt{\frac{2}{3}} < 0 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ist relatives Maximum}$$

$$y^E = V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 0,51$$

Randbetrachtung:

$$\lim_{a\to 0} V(a) = 0 < 0,51$$

$$\lim_{a\to\sqrt{2}} V(a) = 0 < 0,51$$

$$\Rightarrow a_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ist absolutes Maximum}$$

Funktionswert berechnen

Für die Berechnung der zum eben berechneten Maximum gehörenden Höhe h setzt man den Wert von a_{max} in die Formel für die Höhe ein.

$$h = \frac{2 - a^2}{3a}$$

Für $a_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ gilt:

$$h_{max} = \frac{2 - a_{max}^2}{3a_{max}} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} \approx 0,54$$