Abitur 2010 Mathematik LK Stochastik IV

Eine große Kiste enthält gut gemischt mehrere hundert rote, blaue, grüne und gelbe Bausteine, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden. Jeder fünfte Baustein ist gelb, 8% sind grün. Außerdem befinden sich dreimal so viele blaue wie grüne Steine in der Kiste.

Teilaufgabe 1a (5 BE)

Aus der Kiste werden 10 Bausteine zufällig entnommen. Zeigen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis „Keiner der Bausteine ist grün“ bei den Modellen „Ziehen mit Zurücklegen“ und „Ziehen ohne Zurücklegen“ um weniger als $0,2$ Prozentpunkte unterscheiden, wenn von einer Kiste mit 1000 Steinen ausgegangen wird.

Im Folgenden soll jeweils das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ verwendet werden.

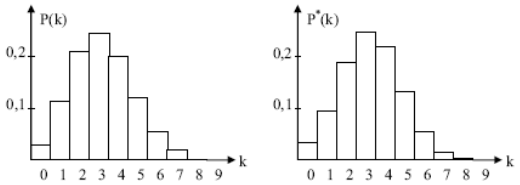
Teilaufgabe 1b (4 BE)

Wie viele Bausteine müssen mindestens aus der Kiste zufällig entnommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% wenigstens ein grüner Baustein darunter ist?

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Lars denkt sich ein Spiel aus. Ein Spieler soll dazu 16 Bausteine aus der Kiste zufällig entnehmen; für jeden gelben und für jeden blauen Stein zahlt Lars 1 €, für jeden grünen 5 € an den Spieler. Für jeden roten Baustein muss der Spieler jedoch einen bestimmten Betrag an ihn zahlen. Wie hoch muss Lars diesen Betrag mindestens festsetzen, damit er bei häufigem Spielen im Mittel keinen Verlust zu befürchten hat?

Es werden zufällig 16 Bausteine aus der Kiste entnommen. Die beiden Säulendiagramme zeigen die Wahrscheinlichkeiten, dabei k gelbe Steine zu erhalten. Das linke Diagramm zeigt die zugehörige Binomialverteilung, das rechte ergibt sich bei Näherung durch die Normalverteilung.



Teilaufgabe 1d (7 BE)

Prüfen Sie, ob das Kriterium für eine brauchbare Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung erfüllt ist (vgl. Formelsammlung). Zeigen Sie rechnerisch, dass es einen Wert für k gibt, bei dem die in den Diagrammen dargestellten Wahrscheinlichkeiten $P(k)$ und $P^*(k)$ um mehr als 2 Prozentpunkte voneinander abweichen.

Teilaufgabe 1e (3 BE)

In die Kiste werden weitere gelbe Bausteine gegeben. Um wie viel Prozent muss dabei die Anzahl der gelben Bausteine erhöht werden, damit anschließend jeder dritte Baustein in der Kiste gelb ist?

Es gibt zwei Typen A und B von Jumbo-Verkaufspackungen, die jeweils gut gemischt Tausende von Bausteinen enthalten; diese unterscheiden sich nur in ihrer Farbe. Bei Typ A ist jeder fünfte, bei Typ B jeder dritte Baustein gelb.
Bei einer gelieferten Jumbo-Verkaufspackung ist der Aufkleber mit der Typenbezeichnung verloren gegangen. Durch zufällige Entnahme von 25 Bausteinen soll entschieden werden, um welchen Typ es sich handelt.
Verwenden Sie im Folgenden das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“.

Teilaufgabe 2a (5 BE)

Geben Sie die Entscheidungsregel an, bei der die beiden Wahrscheinlichkeiten, sich irrtümlich für einen falschen Typ zu entscheiden, möglichst nahe beieinander liegen. Wie groß sind in diesem Fall die beiden Irrtumswahrscheinlichkeiten?

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Wie muss die Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 2a bei gleichbleibendem Stichprobenumfang geändert werden, wenn man die Wahrscheinlichkeit, sich irrtümlich für Typ A zu entscheiden, verringern will? Nennen Sie eine Konsequenz, die diese Änderung hinsichtlich einer Entscheidung für Typ B hat.

Lars' kleine Schwester spielt mit 3 roten, 4 blauen und 3 gelben würfelförmigen Bausteinen, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden.

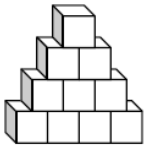
Teilaufgabe 3a (4 BE)

Sie baut einen Turm, indem sie alle Steine aufeinandersetzt. Wie viele verschiedene Farbmuster sind bei diesem Turm möglich, wenn weder der oberste noch der unterste Stein rot sein sollen?

© Abiturloesung.de

Teilaufgabe 3b (4 BE)

Nun baut sie aus den 10 Steinen eine „Treppe“ (siehe Abbildung). Wie viele verschiedene Farbmuster sind für die aus 10 Quadraten bestehende Stirnseite der „Treppe“ möglich, wenn in jeder waagrechten Reihe ein blauer Stein sitzen soll?



Lösung

Teilaufgabe 1a (5 BE)

Eine große Kiste enthält gut gemischt mehrere hundert rote, blaue, grüne und gelbe Bausteine, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden. Jeder fünfte Baustein ist gelb, 8% sind grün. Außerdem befinden sich dreimal so viele blaue wie grüne Steine in der Kiste.

Aus der Kiste werden 10 Bausteine zufällig entnommen. Zeigen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis „Keiner der Bausteine ist grün“ bei den Modellen „Ziehen mit Zurücklegen“ und „Ziehen ohne Zurücklegen“ um weniger als $0,2$ Prozentpunkte unterscheiden, wenn von einer Kiste mit 1000 Steinen ausgegangen wird.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Wahrscheinlichkeit

Angaben aus der Einleitung:

Erläuterung: *Tabelle*

„Jeder fünfte Baustein ist gelb“ $\Rightarrow$ $P(\text{gelb}) = \frac{1}{5} = 0,2$

“ 8% sind grün“ $\Rightarrow$ $P(\text{grün}) = 0,08$

„3 mal so viele blaue wie grüne“ $\Rightarrow$ $P(\text{blau}) = 3 \cdot 0,08 = 0,24$

Restliche Bausteine sind rot:

$P(\text{rot}) = 1 - P(\text{nicht rot}) = 1 - (0,2 + 0,08 + 0,24) = 0,048$

ω_i	gelb	grün	blau	rot
$P(\omega_i)$	0,2	0,08	0,24	0,48

Wahrscheinlichkeit im Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ bestimmen:

Ereignis: A: „Baustein ist nicht grün“

© Abiturloesung.de

Treffer = „Baustein ist grün“
$p = P(\text{Treffer}) = 0,08$
$n = 10$ Anzahl der Versuche
$Z = 0$ kein Baustein ist grün

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche
k = Anzahl der Treffer
p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$$P(0 \text{ Treffer}) = P_p^n(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$$

$$\Rightarrow P(0 \text{ Treffer}) = (1-p)^n$$

$$P(A) = P_{0,08}^{10}(Z = 0) = (1 - 0,08)^{10} = 0,92^{10} = 0,43438$$

Wahrscheinlichkeit im Modell „Ziehen ohne Zurücklegen“ bestimmen:

1000 Bausteine in der Kiste.
$\Rightarrow 1000 \cdot 0,08 = 80$ Anzahl der grünen Bausteine

Erläuterung: *Ziehen ohne Zurücklegen*

Anzahl der Möglichkeiten 0 aus 80 grünen Bausteinen: $\binom{80}{0}$

Anzahl der Möglichkeiten 10 aus $1000 - 80 = 920$ nicht grünen Bausteinen: $\binom{920}{10}$

Anzahl der Möglichkeiten 10 aus 1000 Bausteinen: $\binom{1000}{10}$

$$P(A) = \frac{\binom{80}{0} \cdot \binom{920}{10}}{\binom{1000}{10}} = 0,43268$$

Differenz der Wahrscheinlichkeiten:
$0,43438 - 0,43268 = 0,0017 < 0,002$

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeiten unterscheiden sich um weniger als 0,2 Prozentpunkte.

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Im Folgenden soll jeweils das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ verwendet werden.

Wie viele Bausteine müssen mindestens aus der Kiste zufällig entnommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% wenigstens ein grüner Baustein darunter ist?

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Binomialverteilung

Treffer = grüner Baustein
$p = P(\text{Treffer}) = 0,08$ (siehe Tabelle aus Teilaufgabe 1a)

$q = P(\text{Niete}) = 1 - p = 0,92$

n Anzahl der Treffer

$Z \geq 1$ wenigstens ein Treffer

© Abiturloesung.de

Die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens ein grüner Baustein dabei ist, soll mehr als 75% betragen. Es gilt somit:

$P^n_{0,08}(Z \geq 1) > 0,75$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Es wird das Gegenereignis betrachtet:

P(mindestens 1 Treffer) = 1 - P(kein Treffer)

$1 - P^n_{0,08}(Z = 0) > 0,75$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P^n_p(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche
k = Anzahl der Treffer
p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(0 \text{ Treffer}) = P^n_p(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(0 \text{ Treffer}) = (1-p)^n$

$1 - (0,92)^n > 0,75$

Erläuterung: *Rechenweg*

$1 - (0,92)^n > 0,75 \quad | -1, \cdot(-1)$

(das Relationszeichen dreht sich um, da mit -1 multipliziert wurde)

$(0,92)^n < 1 - 0,75 \quad |$ logarithmieren

$\ln (0,92)^n < \ln(1 - 75)$

$n \cdot \ln\,(0,92) < \ln(1 - 0,75) \quad | : \underbrace{\ln\,(0,92)}_{<0}$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$n > \dfrac{\ln(1 - 0,75)}{\ln\,(0,92)}$

$n > \dfrac{\ln(1 - 0,75)}{\ln\,(0,92)}$

$n > 16,6$

$\Rightarrow \quad n \geq 17$

Es müssen mindestens 17 Bausteine zufällig aus der Kiste entnommen werden.

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Lars denkt sich ein Spiel aus. Ein Spieler soll dazu 16 Bausteine aus der Kiste zufällig entnehmen; für jeden gelben und für jeden blauen Stein zahlt Lars 1 €, für jeden grünen 5 € an den Spieler. Für jeden roten Baustein muss der Spieler jedoch einen bestimmten Betrag an ihn zahlen. Wie hoch muss Lars diesen Betrag mindestens festsetzen, damit er bei häufigem Spielen im Mittel keinen Verlust zu befürchten hat?

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Erwartungswert einer Zufallsgröße

Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung erstellen:

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Tabelle*

r ist der Betrag, den ein Spieler an Lars beim Ziehen eines roten Bausteins entrichten muss. Da es sich um einen Verlust handelt, wird mit $-r$ gerechnet.

Die Wahrscheinlichkeiten p_i entnimmt man aus der Tabelle aus Teilaufgabe 1a.

	rot	gelb oder blau	grün
x_i	$-r$ €	1 €	5 €
$p_i = P(X = x_i)$	0,48	0,44	0,08
$x_i \cdot p_i$	$-0{,}48 \cdot r$	0,44	0,40

Erwartungswert beim ersten Zug bestimmen:

Erläuterung: *Erwartungswert einer Zufallsgröße*

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X, die die Werte x_i annimmt, ist definiert als:

$$E_n(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{P(X = x_i)}_{p_i} = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \cdots + x_n\, p_n$$

$E(X) = -0{,}48 \cdot r + 0{,}44 + 0{,}40 = 0{,}84 - 0{,}48 \cdot r$

Erwartungswert bei 16 Züge bestimmen:

$$E(Z) = E(\underbrace{X + X + \cdots + X}_{16 \text{ mal}}) = E(X) + \cdots + E(X) = 16 \cdot E(X) = 16 \cdot (0{,}84 - 0{,}48 \cdot r)$$

r bestimmen:

Erläuterung: *Faires Spiel*

Ein Spiel ist fair (für den Spieler), wenn der Erwartungswert gleich Null ist: $E(Z) = 0$.

$E(Z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 16 \cdot (0{,}84 - 0{,}48 \cdot r) = 0$

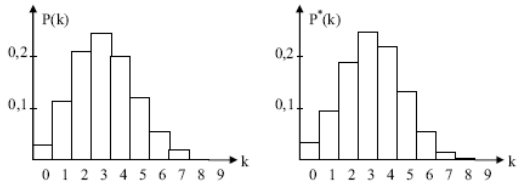
$0{,}84 - 0{,}48 \cdot r = 0$

$r = 1{,}75$

$\Rightarrow$ Lars muss mindestens 1,75 € festlegen damit er im Mittel keinen Verlust befürchten muss, also $r \geq 1{,}75$

Teilaufgabe 1d (7 BE)

Es werden zufällig 16 Bausteine aus der Kiste entnommen. Die beiden Säulendiagramme zeigen die Wahrscheinlichkeiten, dabei k gelbe Steine zu erhalten. Das linke Diagramm zeigt die zugehörige Binomialverteilung, das rechte ergibt sich bei Näherung durch die Normalverteilung.



Prüfen Sie, ob das Kriterium für eine brauchbare Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung erfüllt ist (vgl. Formelsammlung). Zeigen Sie rechnerisch, dass es einen Wert für k gibt, bei dem die in den Diagrammen dargestellten Wahrscheinlichkeiten $P(k)$ und $P^*(k)$ um mehr als 2 Prozentpunkte voneinander abweichen.

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Standardabweichung einer Zufallsgröße

© Abiturloesung.de

$n = 16$
$p = P(\text{gelb}) = 0,2$ (siehe Teilaufgabe 1a)
$q = 1 - p = 0,8$

Erwartungswert μ bestimmen:
$\mu = n \cdot p = 16 \cdot 0,2 = 3,2$

Varianz σ^2 bestimmen:
$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 3,2 \cdot 0,8 = 2,56$

Standardabweichung σ bestimmen:
$\sigma = \sqrt{2,56} = 1,6 < 3$

$\Rightarrow$ Keine Normalverteilung möglich.

Binomialverteilung

Wähle $k = 2$.

Binomialverteilung:

$P(2) = P_{0,2}^{16}(Z = 2)$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$$= \binom{16}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{14} = 0,2111$$

Normalverteilung

Normalverteilung als Approximation der Binomialverteilung:

$P^*(Z = 2)$

Erläuterung: *Lokale Näherung*

Für große $n(n \cdot p \cdot q > 9)$ gilt:

$$P_n^p(Z = k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$$

Dabei ist φ die Gaußsche Dichtefunktion.

$$= \frac{\varphi\left(\frac{2-3,2}{1,6}\right)}{1,6}$$
$$= \frac{\varphi\left(\frac{-0,75}{1,6}\right)}{1,6}$$
$$= \frac{\varphi\left(\frac{0,75}{1,6}\right)}{1,6}$$

(Wert wird aus den Quantilen des stochastischen Tafelwerks entnommen)

$$= \frac{0,30144}{1,6} = 0,1884$$

Differenz:

$P(2) - P^*(2) = 0,2111 - 0,1884 = 0,0227 > 0,2$

$\Rightarrow$ Für $k = 2$ weichen die Wahrscheinlichkeiten $P(k)$ und $P^*(k)$ um mehr als 2 Prozentpunkte voneinander ab.

Teilaufgabe 1e (3 BE)

In die Kiste werden weitere gelbe Bausteine gegeben. Um wie viel Prozent muss dabei die Anzahl der gelben Bausteine erhöht werden, damit anschließend jeder dritte Baustein in der Kiste gelb ist?

Lösung zu Teilaufgabe 1e

Wahrscheinlichkeit

© Abiturloesung.de

n Gesamtanzahl der Bausteine
$p = P(\text{gelb}) = 0,2$ (siehe Teilaufgabe 1a)

$0,2 \cdot p$ Anzahl der gelben Bausteine

x Anzahl der zusätzlichen gelben Bausteine
$x + n$ neue Gesamtanzahl der Bausteine

Jeder dritte Stein soll gelb sein, also muss gelten: $P(\text{gelb}) = \frac{1}{3}$

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit*

Für die Wahrscheinlichkeit einen gelben Baustein zu ziehen, gilt:

$$P(\text{gelb}) = \frac{\text{Anzahl der gelben Bausteine}}{\text{Gesamtanzahl Bausteine}}$$

$$\frac{0,2 \cdot n + x}{n + x} = \frac{1}{3}$$

$$0,6 \cdot n + 3x = n + x$$

$$x = 0,2 \cdot n$$

$\Rightarrow$ Die Anzahl der gelben Bausteine muss um 100 Prozent erhöht werden.

Teilaufgabe 2a (5 BE)

Es gibt zwei Typen A und B von Jumbo-Verkaufspackungen, die jeweils gut gemischt Tausende von Bausteinen enthalten; diese unterscheiden sich nur in ihrer Farbe. Bei Typ A ist jeder fünfte, bei Typ B jeder dritte Baustein gelb.
Bei einer gelieferten Jumbo-Verkaufspackung ist der Aufkleber mit der Typenbezeichnung verloren gegangen. Durch zufällige Entnahme von 25 Bausteinen soll entschieden werden, um welchen Typ es sich handelt.
Verwenden Sie im Folgenden das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“.

Geben Sie die Entscheidungsregel an, bei der die beiden Wahrscheinlichkeiten, sich irrtümlich für einen falschen Typ zu entscheiden, möglichst nahe beieinander liegen. Wie groß sind in diesem Fall die beiden Irrtumswahrscheinlichkeiten?

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Hypothesentest - Fehler 1. Art

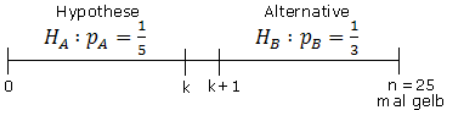
Daten aus der Aufgabenstellung analysieren:

(Hypothese) Typ A: Jeder fünfte Baustein ist gelb.
$\Rightarrow \quad p_A = \frac{1}{5}$

(Alternative) Typ B: Jeder dritte Baustein ist gelb.
$\Rightarrow \quad p_B = \frac{1}{3}$

$n = 25$ Anzahl der Züge (Ziehen mit Zurücklegen)

Entscheidungsregel:



Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Es soll die Wahrscheinlichkeit für ein irrtümliches Ablehnen der Verkaufspackung des Typs A berechnet werden.

Das ist der Fall wenn H_A stimmt, aber man sich im Bereich H_B befindet, also $Z \geq k+1$. Da H_A stimmt, rechnet man mit der Wahrscheinlichkeit p_A.

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P^{25}_{\frac{1}{5}}(Z \geq k+1)$

Man spricht vom „Fehler erster Art“ , wenn die Hypothese (hier Typ A) fälschlicherweise abgelehnt wird.

Fehler erster Art (A wird irrtümlich abgelehnt):

© Abiturloesung.de

Erläuterung: *Gegenereignis*

Es wird das Gegenereignis betrachtet:

P(mindestens k+1 Treffer) = 1 - P(höchstens k Treffer)

$P_{\frac{1}{5}}^{25}(Z \geq k+1) = 1 - P_{\frac{1}{5}}^{25}(Z \leq k)$

Hypothesentest - Fehler 2. Art

Fehler zweiter Art (B wird irrtümlich abgelehnt):

Erläuterung: *Fehler zweiter Art*

Es soll die Wahrscheinlichkeit für ein irrtümliches Ablehnen der Verkaufspackung des Typs B berechnet werden.

Das ist der Fall wenn H_B stimmt, aber man sich im Bereich H_A befindet, also $Z \leq k$. Da H_B stimmt, rechnet man mit der Wahrscheinlichkeit p_B.

⇒ Fehler zweiter Art: $P_{\frac{1}{3}}^{25}(Z \leq k)$

Man spricht vom „Fehler zweiter Art“ , wenn die Alternative (hier Typ B) fälschlicherweise abgelehnt wird.

$P_{\frac{1}{3}}^{25}(Z \leq k)$

Die Irrtumswahrscheinlichkeiten sollen möglichst nahe beieinander liegen:

$P_{\frac{1}{3}}^{25}(Z \leq k) \approx 1 - P_{\frac{1}{5}}^{25}(Z \leq k)$

$P_{\frac{1}{3}}^{25}(Z \leq k) + P_{\frac{1}{5}}^{25}(Z \leq k) \approx 1$

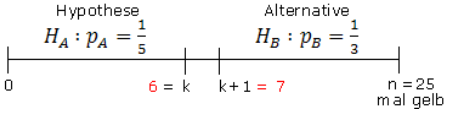
Erläuterung: *Tafelwerk*

Für jedes k müssen zwei Werte im Tafelwerk abgelesen und aufsummiert werden: $P_{\frac{1}{3}}^{25}(Z \leq k)$ und $P_{\frac{1}{5}}^{25}(Z \leq k)$.

	$P_{\frac{1}{3}}^{25}(Z \leq k)$	$P_{\frac{1}{5}}^{25}(Z \leq k)$	Σ
$k = 0$	0,00004	0,00378	0,00382
$k = 1$	0,00053	0,02739	0,02792
$k = 2$	0,00350	0,09823	0,10173
$k = 3$	0,01489	0,23399	0,24888
$k = 4$	0,04620	0,42067	0,46687
$k = 5$	0,11195	0,61669	0,72864
$k = 6$	0,22154	0,78004	1,00158
$k = 7$	0,37026	0,89088	1,26114
$k = 8$	0,53758	0,95323	1,49081
$k = 9$	0,69560	0,98267	1,67827
$k = 10$	0,82201	0,99445	1,81646
$k = 11$	0,90821	0,99846	1,90667
$k = 12$	0,95849	0,99963	1,95812
$k = 13$	0,98363	0,99992	1,98355
$k = 14$	0,99440	0,99999	1,99439
$k = 15$	0,99835	1,00000	1,99835

⇒ $k = 6$ (Wert wird im Tafelwerk abgelesen)

Die Entscheidungsregel lautet somit:



Die Irrtumswahrscheinlichkeiten lauten somit:

$P_{\frac{1}{3}}^{25}(Z \leq 6) = 0,22154 \approx 22,2\%$

$P_{\frac{1}{5}}^{25}(Z \geq 7) = 1 - P_{\frac{1}{5}}^{25}(Z \leq 6) = 1 - 0,78004 \approx 22,0\%$

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Wie muss die Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 2a bei gleichbleibendem Stichprobenumfang geändert werden, wenn man die Wahrscheinlichkeit, sich irrtümlich für Typ A zu entscheiden, verringern will? Nennen Sie eine Konsequenz, die diese Änderung hinsichtlich einer Entscheidung für Typ B hat.

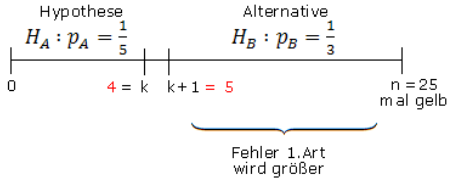
Lösung zu Teilaufgabe 2b

Hypothesentest - Entscheidungsregel

Um die Wahrscheinlichkeit, sich irrtümlich für Typ A zu entscheiden (Fehler zweiter Art), zu verringern, muss man für k eine kleinere Zahl wählen:

$k < 6$

Die Entscheidungsregel lautet dann zum Beispiel:



Konsequenz: die Wahrscheinlichkeit sich irrtümlich für Typ B zu entscheiden, also der Fehler erster Art, wird größer.

Teilaufgabe 3a (4 BE)

Lars' kleine Schwester spielt mit 3 roten, 4 blauen und 3 gelben würfelförmigen Bausteinen, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden.

Sie baut einen Turm, indem sie alle Steine aufeinandersetzt. Wie viele verschiedene Farbmuster sind bei diesem Turm möglich, wenn weder der oberste noch der unterste Stein rot sein sollen?

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Kombinatorik

3 rote, 4 blaue und 3 gelbe Bausteine.

Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*

Rote Steine dürfen weder an der obersten noch an der untersten Stelle platziert werden. Es gibt also 8 freie Stellen um die 3 roten Steine zu platzieren.

Anzahl der Möglichkeiten 8 freie Stellen mit 3 roten Steinen zu platzieren: $\binom{8}{3}$.

Die 4 blauen Steine können überall platziert werden. Da 3 Plätze von der roten Steinen besetzt sind, ist die Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{10-3}{4}$.

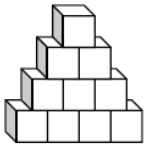
Es bleiben 3 freie Stellen, die mit 3 gelben Steinen besetzt werden: $\binom{3}{3}$.

$$|A| = \overbrace{\binom{8}{3}}^{rot} \cdot \overbrace{\binom{7}{4}}^{blau} \cdot \overbrace{\binom{3}{3}}^{gelb} = 1960$$

Teilaufgabe 3b (4 BE)

Nun baut sie aus den 10 Steinen eine „Treppe“ (siehe Abbildung). Wie viele verschiedene Farbmuster sind für die aus 10 Quadraten bestehende Stirnseite der „Treppe“ möglich, wenn in jeder waagrechten Reihe ein blauer Stein sitzen soll?

© Abiturloesung.de



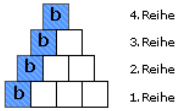
Lösung zu Teilaufgabe 3b

Kombinatorik

3 rote, 4 blaue und 3 gelbe Bausteine.

Erläuterung:

In jeder waagerechten Reihe soll ein blauer Stein sitzen.



Anzahl der Möglichkeiten die Steine in einer Reihe zu platzieren:

In der 1.Reihe gibt es 4 Möglichkeiten einen blauen Stein zu platzieren. In der 2.Reihe sind es 3 Möglichkeiten. In der 3.Reihe 2 und in der letzten Reihe 1 Möglichkeit. Sind alle blauen Steine platziert, so bleiben noch 6 freie Stellen zu besetzen.

Anzahl der Möglichkeiten 3 gelbe Steine auf 6 freien Stellen zu platzieren: $\binom{6}{3}$.

Es bleiben noch 3 freie Stellen und 3 rote Steine übrig. Anzahl der Möglichkeiten für die roten Steine: $\binom{3}{3}$.

$$|A| = \overbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{blau} \cdot \overbrace{\binom{6}{3}}^{gelb} \cdot \overbrace{\binom{3}{3}}^{rot} = 24 \cdot 20 = 480$$