Abitur 2010 Mathematik LK Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Schar der Funktionen $g_k : x \mapsto \dfrac{x^2 - k}{x^2 - 1}$ mit $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Der Graph von g_k wird mit G_k bezeichnet.

Teilaufgabe 1a (6 BE)

Untersuchen Sie G_k auf Symmetrie, bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_k mit den Koordinatenachsen und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.

Teilaufgabe 1b (6 BE)

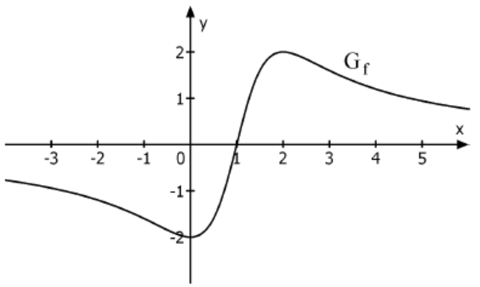
Zeigen Sie, dass G_k genau einen Extrempunkt besitzt, und bestimmen Sie dessen Lage und Art in Abhängigkeit von k.

Teilaufgabe 1c (6 BE)

Wählen Sie zwei Scharparameter k_1 und k_2 so, dass sich die zugehörigen Graphen in der Art ihres Extrempunkts unterscheiden. Skizzieren Sie G_{k_1} und G_{k_2} unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignetes Koordinatensystem.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten, stetigen Funktion f. G_f ist punktsymmetrisch zum einzigen Schnittpunkt $S(1|0)$ mit der x-Achse. Die Extrempunkte von G_f sind $(0|-2)$ und $(2|2)$.

Die Funktion $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine Integralfunktion von f.



Teilaufgabe 2a (5 BE)

Geben Sie Monotonie- und Krümmungsverhalten des Graphen von F an.

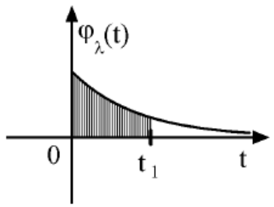
Teilaufgabe 2b (4 BE)

Begründen Sie, dass F genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie diese an.

Teilaufgabe 2c (5 BE)

Begründen Sie, dass für $h > 0$ gilt: $F(1-h) = F(1+h)$.
Welche Bedeutung hat diese Beziehung für den Graphen der Integralfunktion F?

Für die Abschätzung des Risikos von Meteoriteneinschlägen auf der Erde spielt die folgende Funktionenschar eine zentrale Rolle:
$\phi_\lambda : t \mapsto \lambda\, e^{-\lambda t}, t \neq 0, \lambda > 0$
t gibt die Wartezeit bis zum ersten Einschlag in Jahren an. λ ist ein von der Meteoritengröße abhängiger Parameter.
Für einen Zeitpunkt $t_1 > 0$ entspricht der Inhalt der schraffierten Fläche (vgl. Skizze) der Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt t_1 der erste Meteoriteneinschlag erfolgt ist.



Teilaufgabe 3a (3 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bis zum Zeitpunkt $t_1 = \dfrac{1}{\lambda}$ der erste Einschlag erfolgt ist.

Teilaufgabe 3b (5 BE)

Berechnen Sie die mittlere Wartezeit $\overline{T}$ (in Jahren) bis zum ersten Einschlag, die durch $\overline{T} = \displaystyle\int_{0}^{\infty} t \cdot \phi_\lambda(t)\,dt$ gegeben ist.

Lösung

Teilaufgabe 1a (6 BE)

Gegeben ist die Schar der Funktionen $g_k : x \mapsto \frac{x^2-k}{x^2-1}$ mit $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Der Graph von g_k wird mit G_k bezeichnet.

Untersuchen Sie G_k auf Symmetrie, bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_k mit den Koordinatenachsen und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Symmetrieverhalten einer Funktion

$$g_k(x) = \frac{x^2-k}{x^2-1} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\ ,\ D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$$

Symmetrie bestimmen:

> Erläuterung: *Symmetrieverhalten*
>
> Man ermittelt zunächst $f(-x)$ und vergleicht dann. Es gilt:
>
> - G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung wenn gilt: $f(x) = f(-x)$
> - G_f ist achsensymmetrisch zum Ursprung wenn gilt: $-f(x) = f(-x)$

$$g_k(-x) = \frac{(-x)^2-k}{(-x)^2-1} = \frac{x^2-k}{x^2-1} = g_k(x)$$

$\Rightarrow G_k$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkt mit der y-Achse:

> Erläuterung: *Schnittpunkt mit der y-Achse*
>
> Um den Schnittpunkt einer Funktion mit der y-Achse zu bestimmen, setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein.

$$g_k(0) = \frac{0^2-k}{0^2-1} = \frac{-k}{-1} = k$$

$\Rightarrow G_k$ schneidet die y-Achse im Punkt $(0|k)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

> Erläuterung: *Nullstellen*
>
> Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x-Achse) zu bestimmen, lautet stets:
>
> $f(x) = 0$
>
> Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$g_k(x) = 0 \iff \frac{x^2-k}{x^2-1} = 0$$

> Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*
>
> Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
> Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).
> Dies ist in diesem Fall schon ausgeschlossen worden mit der Beschränkung von k: $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$x^2 - k = 0$

$x^2 = k$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{k}$

$\Rightarrow G_k$ schneidet die x-Achse im Punkt $\left(-\sqrt{k}|0\right)$ und $\left(\sqrt{k}|0\right)$

Asymptoten bestimmen

Grenzwert gegen $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g_k(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{x^2-k}^{\to+\infty}}{\underbrace{x^2-1}_{\to+\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\overbrace{\frac{k}{x^2}}^{\to 0}}{1-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ ist waagerechte Asymptote

Grenzverhalten an der Definitionslücke $x_0 = 1$:

> Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*
>
> Untersucht man das Verhalten einer Funktion an einer Definitionslücke, also eine Stelle x_0 die nicht zum Definitionsbereich gehört, so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:
>
> $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ (rechtsseitiger Grenzwert)
>
> $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ (linksseitiger Grenzwert)
>
> Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von links.
> Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von rechts.
>
> In diesem Fall ist 1 die Definitionslücke

Grenzwert gegen 1^+ (Annäherung von rechts an 1):

$$\lim_{x\to 1^+} g_k(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{\overbrace{x^2-k}^{1-k}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^+}} = \begin{array}{lll} \nearrow & +\infty & \text{für} \quad k<1 \\ \searrow & -\infty & \text{für} \quad k>1 \end{array}$$

Grenzwert gegen 1^- (Annäherung von links an 1):

$$\lim_{x\to 1^-} g_k(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\overbrace{x^2-k}^{1-k}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^-}} = \begin{array}{lll} \nearrow & -\infty & \text{für} \quad k<1 \\ \searrow & +\infty & \text{für} \quad k>1 \end{array}$$

$\Rightarrow x = 1$ ist senkrechte Asymptote

Grenzverhalten an der Definitionslücke $x_0 = -1$:

> Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*
>
> Untersucht man das Verhalten einer Funktion an einer Definitionslücke, also eine Stelle x_0 die nicht zum Definitionsbereich gehört, so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:
>
> $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ (rechtsseitiger Grenzwert)
>
> $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ (linksseitiger Grenzwert)
>
> Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von links.
> Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von rechts.
>
> In diesem Fall ist -1 die Definitionslücke

Grenzwert gegen -1^+ (Annäherung von rechts an -1):

$$\lim_{x\to -1^+} g_k(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{x^2-k}^{1-k}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^-}} = \begin{array}{lll} \nearrow & -\infty & \text{für} \quad k<1 \\ \searrow & +\infty & \text{für} \quad k>1 \end{array}$$

Grenzwert gegen -1^- (Annäherung von links an -1):

$$\lim_{x\to -1^-} g_k(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{x^2-k}^{1-k}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^+}} = \begin{array}{lll} \nearrow & +\infty & \text{für} \quad k<1 \\ \searrow & -\infty & \text{für} \quad k>1 \end{array}$$

$\Rightarrow x = -1$ ist senkrechte Asymptote

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Zeigen Sie, dass G_k genau einen Extrempunkt besitzt, und bestimmen Sie dessen Lage und Art in Abhängigkeit von k.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Ermitteln der Art von Extrempunkten

$$g_k(x) = \frac{x^2-k}{x^2-1} \quad \text{mit } \ k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\ ,\ D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$$

Erste Ableitung bilden:

$$g_k'(x) = \left(\frac{x^2-k}{x^2-1}\right)'$$

> Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*
>
> Quotientenregel:
>
> $$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$
>
> Hier ist $\quad u(x) = x^2 - k \quad und \quad v(x) = x^2 - 1$.
> Dann ist $\quad u'(x) = 2x \quad und \quad v'(x) = 2x$

$$= \frac{2x\cdot\left(x^2-1\right) - \left(x^2-k\right)\cdot(2x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$
$$= \frac{2x^3-2x-2x^3+2x\,k}{\left(x^2-1\right)^2}$$
$$= \frac{2x(k-1)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

> Erläuterung: *Notwendige Bedingung*
>
> Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:
>
> $f'\left(x^E\right) = 0$, $\quad$ daher immer der Ansatz: $\quad f'(x) = 0$

$$g_k'(x) = 0 \iff \frac{2x(k-1)}{\left(x^2-1\right)^2} = 0$$

> Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*
>
> Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
> Zu beachten ist dabei, dass die Nullstellen des Zählers nicht mit den Nullstellen des Nenners übereinstimmen (hebbare Lücken).

$$2x \underbrace{(k-1)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{da } k \neq 1}} = 0$$

$2x = 0$

$\Rightarrow x^E = 0$

$\Rightarrow$ An der Stelle $x^E = 0$ hat der Graph G_k eine waagerechte Tangente

Vorzeichen der ersten Ableitung bestimmen:

Ansatz: $g_k'(x) > 0 \iff \dfrac{2x(k-1)}{\left(x^2-1\right)^2} > 0$

> Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*
>
> Die erste Ableitung ist ein Bruch.
>
> Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).
>
> Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$)
>
> In diesem Fall ist:
>
> der Nenner $\left(x^2-1\right)^2$ positiv für alle $x \in D$
>
> das Vorzeichen des Zählers abhängig vom Parameter k und es bedarf einer näheren Untersuchung

Nenner:

$\left(x^2-1\right)^2 > 0 \quad$ für alle $x \in D$
$\Rightarrow$ positives Vorzeichen des Nenners für alle $x \in D$

Zähler:

Fallunterscheidung:

a) $k > 1$

$2x \underbrace{(k-1)}_{>0} > 0 \quad$ für $x > 0$

$\Rightarrow$ positives Vorzeichen des Zählers für $x > 0$
$\Rightarrow$ negatives Vorzeichen des Zählers für $x < 0$

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von "- "nach "+ ", an der Stelle $x^E = 0$ hat der Graph der Funktion einen Tiefpunkt

b) $0 < k < 1$

$2x \underbrace{(k-1)}_{<0} > 0 \quad$ für $x < 0$

$\Rightarrow$ positives Vorzeichen des Zählers für $x < 0$
$\Rightarrow$ negatives Vorzeichen des Zählers für $x > 0$

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von "+ "nach "- ", an der Stelle $x^E = 0$ hat der Graph der Funktion einen Hochpunkt

Alternative Lösung

Ermitteln der Art des Extrempunktes mit Hilfe der zweiten Ableitung:

Zweite Ableitung bilden

$$g_k''(x) = \left[\frac{2x(k-1)}{(x^2-1)^2}\right]'$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $\quad u(x) = 2x(k-1) \quad und \quad v(x) = \left(x^2-1\right)^2$.
Dann ist $\quad u'(x) = 2(k-1) \quad und \quad v'(x) = 4x(x^2-1)$

Bemerkung: $v(x) = \left(x^2-1\right)^2$ wird mit der Kettenregel abgeleitet.

$$\left[\left(x^2-1\right)^2\right] = 2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot 2x$$

$$= \frac{2(k-1)\cdot\left(x^2-1\right)^2 - 2x(k-1)\cdot 2\,\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}$$
$$= \frac{2(k-1)(x^2-1)\cdot(x^2-1-4x^2)}{(x^2-1)^4}$$
$$= \frac{2(k-1)\cdot(-3x^2-1)}{(x^2-1)^3}$$

Art des Extrempunktes bestimmen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum)

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum)

$$g_k''(x^E) = g_k''(0) = \frac{2(k-1)\cdot(-3\cdot 0^2-1)}{(0^2-1)^3} = \frac{2(k-1)\cdot(-1)}{-1} = 2(k-1)$$

Fallunterscheidung:

$g_k''(0) = 2(k-1) < 0 \quad$ für $0 < k < 1 \quad$ Maximum

$g_k''(0) = 2(k-1) > 0 \quad$ für $k > 1 \quad$ Minimum

Ermitteln der Lage von Extrempunkten

$$y^E = g_k\left(x^E\right) = g_k(0) = \frac{0^2 - k}{0^2 - 1} = k$$

$\Rightarrow E(0|k)$ Maximum für $0 < k < 1$

$\Rightarrow E(0|k)$ Minimum für $k > 1$

Teilaufgabe 1c (6 BE)

Wählen Sie zwei Scharparameter k_1 und k_2 so, dass sich die zugehörigen Graphen in der Art ihres Extrempunkts unterscheiden. Skizzieren Sie G_{k_1} und G_{k_2} unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignetes Koordinatensystem.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Funktionenschar

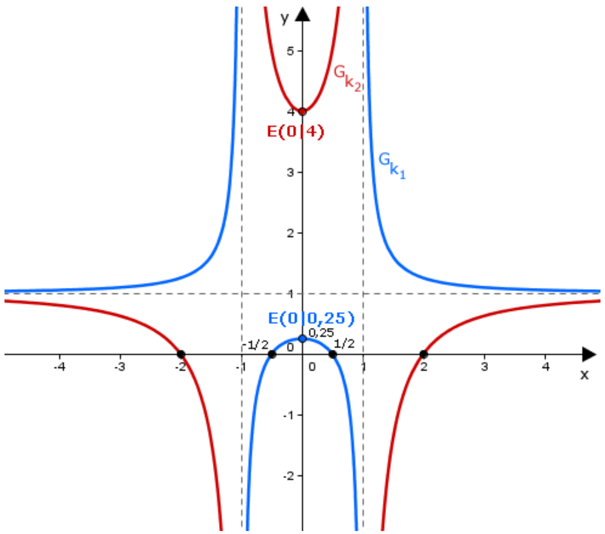
$$g_k(x) = \frac{x^2 - k}{x^2 - 1} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\,,\; D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

Erläuterung: *Art und Lage des Extrempunktes*

Laut Teilaufgabe 1b besitzt G_k ein Maximum $E(0|k)$ für $0 < k < 1$ und ein Minimum $E(0|k)$ für $k > 1$.

$k_1 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad g_{k_1} = \frac{x^2 - 0{,}25}{x^2 - 1}$ mit $E(0|0{,}25)$ Maximum
$k_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad g_{k_2} = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ mit $E(0|4)$ Minimum

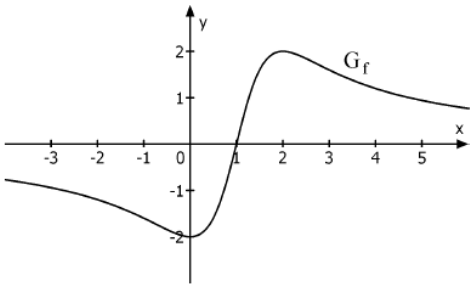
Skizze



Teilaufgabe 2a (5 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten, stetigen Funktion f. G_f ist punktsymmetrisch zum einzigen Schnittpunkt $S(1|0)$ mit der x-Achse. Die Extrempunkte von G_f sind $(0|-2)$ und $(2|2)$.

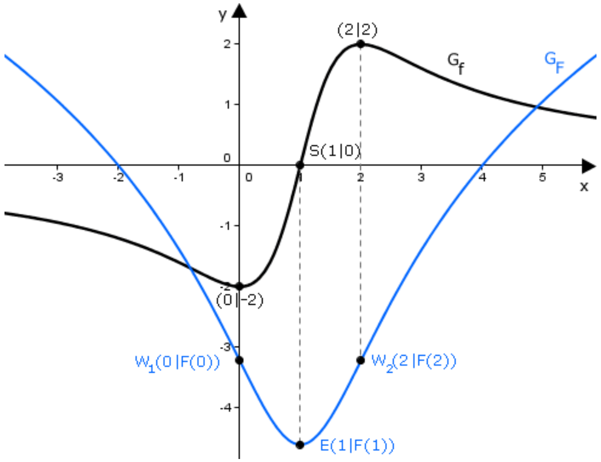
Die Funktion $F : x \mapsto \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine Integralfunktion von f.



Geben Sie Monotonie- und Krümmungsverhalten des Graphen von F an.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Monotonieverhalten der Integralfunktion



$f(x)$ stetige Funktion mit:

- $S(1|0)$ Symmetrie- und Schnittpunkt mit der x-Achse
- $(0|-2)$ Minimum und Schnittpunkt mit der y-Achse
- $(2|2)$ Maximum

$F(x) = \int\limits_{-2}^{x} f(t)dt$ Integralfunktion von f

Erläuterung: *Eigenschaften der Integralfunktion*

$F_a(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ ist Integralfunktion von $f(x)$, d.h:

$F_a(a) = 0$
(a ist Nullstelle der Integralfunktion, da a Integrationsanfang)

$F_a'(x) = f(x)$
(Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Integrandenfunktion $f(x)$)

$F_a(x)$ ist stetig wenn es $f(x)$ auch ist.

$F'(x) = f(x)$

Erläuterung: *Monotonieverhalten der Integralfunktion*

Da $F(x)$ stetig und $F'(x) = f(x)$, folgt:

Dort wo f negativ ist, ist es F' auch und F ist somit streng monoton fallend

Dort wo f positiv ist, ist F' es auch und F ist somit streng monoton steigend

Wo f Nullstellen hat, hat F waagrechte Tangenten (Extrema oder Wendepunkte).
Ansatz: $F'(x) = f(x) = 0$

In diesem Fall hat F' einen Vorzeichenwechsel von "$-$ "nach "$+$ "an der Stelle $x^E = 1$ und somit ein Minimum.

$$\begin{array}{llll}
f(x) < 0 \text{ für } x < 1 & \Rightarrow & F'(x) < 0 \text{ für } x < 1 \\
f(x) = 0 \text{ für } x_S = 1 & \Rightarrow & F'(x) = 0 \text{ für } x^E = 1 \\
f(x) > 0 \text{ für } x > 1 & \Rightarrow & F'(x) > 0 \text{ für } x > 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & G_F \text{ ist streng monoton fallend für} & x < 1 \\ \Rightarrow & G_F \text{ hat ein Minimum an der Stelle} & x^E = 1 \\ & G_F \text{ ist streng monoton steigend für} & x > 1 \end{array}$$

Krümmungsverhalten der Integralfunktion

$F'(x) = f(x)$

$F''(x) = f'(x)$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Ist die zweite Ableitung einer Funktion F negativ auf einem Intervall]a,b[, d.h. $F''(x) < 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall rechtsgekrümmt (konkav)

Ist die zweite Ableitung einer Funktion F positiv auf einem Intervall]a,b[, d.h. $F''(x) > 0$ für $x \in]a;b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall linksgekrümmt (konvex)

Ist die zweite Ableitung einer Funktion F gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $F''(x^W) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

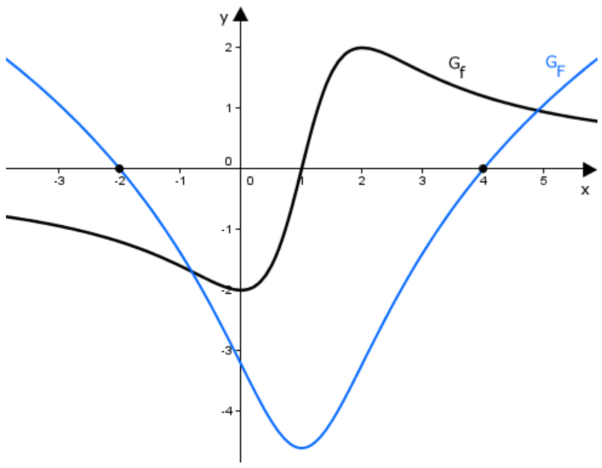
$$\begin{array}{lllll} F''(x) = f'(x) < 0 & \text{für} & x \in]-\infty;0[\cup]2;\infty[& \Rightarrow F''(x) & \text{rechtsgekrümmt} \\ F''(x) = f'(x) > 0 & \text{für} & x \in]0;2[& \Rightarrow F''(x) & \text{linksgekrümmt} \\ F''(x) = f'(x) = 0 & \text{für} & x_1^W = 0 \text{ und } x_2^W = 2 & \Rightarrow x_1^W, x_2^W & \text{Wendestellen} \end{array}$$

Teilaufgabe 2b (4 BE)

Begründen Sie, dass F genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie diese an.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen



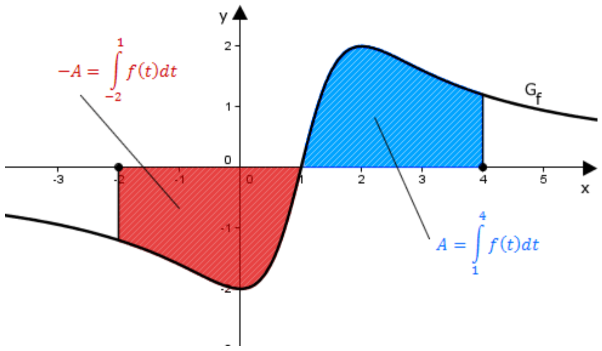
$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$$

1.Nullstelle:

$F(-2) = 0$ (da $x = -2$ Integrationsanfang)

2.Nullstelle:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*



Das bestimmte Integral $F(x) = \int\limits_{-2}^{x} f(t)\,dt$ ist gleich der Fläche die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen -2 und x einschließt.

Da f punktsymmetrisch zum Punkt $P(1|0)$ ist, ist die Fläche zwischen -2 und 1 betragsmäßig gleich wie die Flächen zwischen 1 und 4 (das Integrationsintervall ist immer gleich $3 = 1-(-2) = 4-1$)

Da die Fläche zwischen -2 und 1 unterhalb der x-Achse liegt, ist diese negativ. Die Summe der Flächeninhalte hebt sich somit gegenseitig auf:

$$\int\limits_{-2}^{4} f(t)\,dt = \underbrace{\int\limits_{-2}^{1} f(t)\,dt}_{-A} + \underbrace{\int\limits_{1}^{4} f(t)\,dt}_{A} = 0$$

$F(4) = 0$ (wegen Punktsymmetrie von f)

F hat genau zwei Nullstellen, da F für $x > 1$ streng monoton wachsend ist.

Teilaufgabe 2c (5 BE)

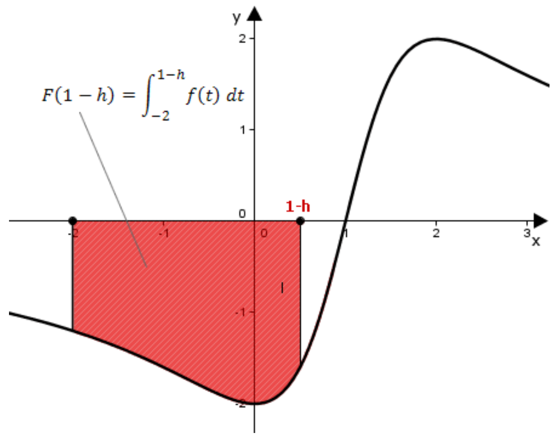
Begründen Sie, dass für $h > 0$ gilt: $F(1-h) = F(1+h)$.

Welche Bedeutung hat diese Beziehung für den Graphen der Integralfunktion F?

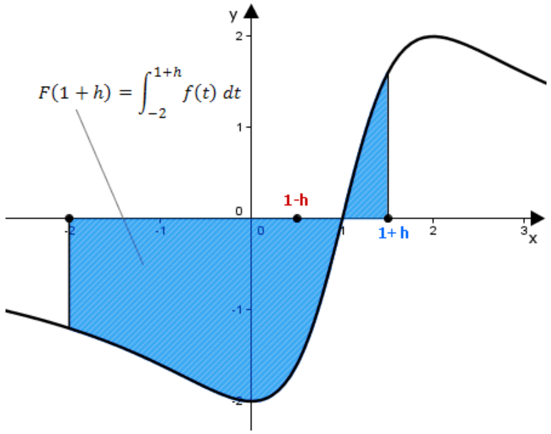
Lösung zu Teilaufgabe 2c

Eigenschaften der Integralfunktion

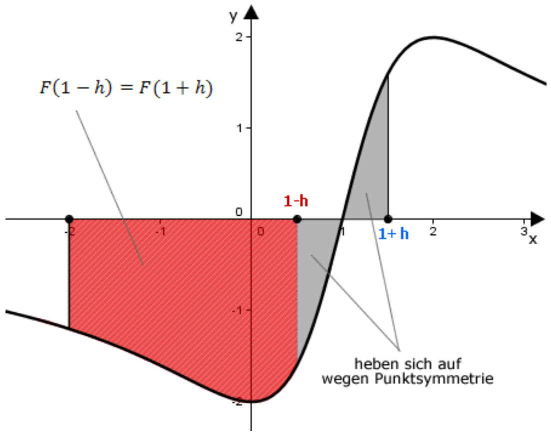
Begründung:



$F(1-h)$ entspricht der Fläche die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen -2 und $1-h$ einschließt.



$F(1-h)$ entspricht der Fläche die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen -2 und $1+h$ einschließt.



Wegen der Punktsymmetrie der Funktion f zum Punkt $(1|0)$, ist die Fläche die der Graph G_f mit der x-Achse zwischen $1-h$ und 1 einschließt betragsmäßig gleichgroß wie die Fläche zwischen 1 und $1+h$. Somit heben sich diese Flächen bei der Berechnung von $F(1+h)$

gegenseitig auf (da verschiedenes Vorzeichen).

$\Rightarrow$ $F(1-h) = F(1+h)$ für $h > 0$

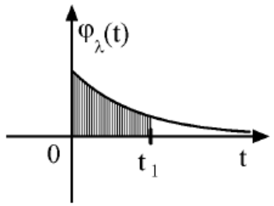
$\Rightarrow$ Der Graph G_F der Integralfunktion ist achsensymmetrisch bezüglich $x = 1$

Alternative Lösung

$$F(1+h) = \int\limits_{-2}^{1+h} f(t)dt = \int\limits_{-2}^{1-h} f(t)dt + \underbrace{\int\limits_{1-h}^{1} f(t)dt + \int\limits_{1}^{1+h} f(t)dt}_{\substack{=0 \\ \text{wegen} \\ \text{Punktsymmetrie}}} = \int\limits_{-2}^{1-h} f(t)dt = F(1-h)$$

Teilaufgabe 3a (3 BE)

Für die Abschätzung des Risikos von Meteoriteneinschlägen auf der Erde spielt die folgende Funktionenschar eine zentrale Rolle:
$\phi_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}, t \neq 0, \lambda > 0$
t gibt die Wartezeit bis zum ersten Einschlag in Jahren an. λ ist ein von der Meteoritengröße abhängiger Parameter.
Für einen Zeitpunkt $t_1 > 0$ entspricht der Inhalt der schraffierten Fläche (vgl. Skizze) der Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt t_1 der erste Meteoriteneinschlag erfolgt ist.



Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bis zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{1}{\lambda}$ der erste Einschlag erfolgt ist.

[Lösung zu Teilaufgabe 3a]()

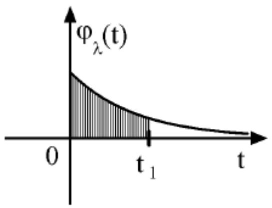
Flächenberechnung

$\phi_\lambda(t) = \lambda\, e^{-\lambda\, t}$, $t \geq 0, \lambda > 0$

$t_1 = \dfrac{1}{\lambda}$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Aus der Einleitung zur Teilaufgabe 3 ist zu entnehmen, dass die Fläche unter dem Graphen der Funktion $\phi_\lambda(t)$ gleich ist mit der Wahrscheinlichkeit, dass bis zu einem bestimmten Zeitpunk t_1 der erste Meteoriteneinschlag erfolgt ist.



Diese Fläche entspricht der Fläche die G_ϕ mit der x-Achse zwischen 0 und t_1 einschließt, und somit dem bestimmten Integral:

$$W = \int_0^{t_1} \phi_\lambda(t)\, d\,t$$

$$W = \int_0^{t_1} \phi_\lambda(t)\, d\,t$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, d\,t$$

$$= \lambda \cdot \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda\, t}\, d\,t$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\, d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Hier ist die Stammfunktion der Exponentialfunktion durch folgende Regel gegeben:

$$\int e^{a\,x+b}\, d\,x = \frac{1}{a} e^{a\,x+b}$$

$$= \lambda \cdot \left[\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\, e^{-\lambda\, t}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$= \lambda \cdot \left[\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\, e^{-\lambda \frac{1}{\lambda}} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\, \underbrace{e^{-\lambda \cdot 0}}_{=1}\right]$$

$$= \lambda \cdot \left[\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\, e^{-1} + \frac{1}{\lambda}\right]$$

$$= -\frac{1}{e} + 1$$

$\approx 0,632$

$\approx 63,2\%$

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Einschlag bis zum Zeitpunkt t_1 erfolgt, ist gleich $63,2\%$

Teilaufgabe 3b (5 BE)

Berechnen Sie die mittlere Wartezeit $\overline{T}$ (in Jahren) bis zum ersten Einschlag, die durch $\overline{T} = \int_0^{\infty} t \cdot \phi_\lambda(t)\, d\,t$ gegeben ist.

Lösung zu Teilaufgabe 3b

Uneigentliches Integral

$\phi_\lambda(t) = \lambda\, e^{-\lambda\, t} \quad , \quad t \geq 0, \lambda > 0$

$\overline{T} = \int\limits_0^\infty t \cdot \phi_\lambda(t) d\, t$

$= \int\limits_0^\infty t \cdot \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, d\, t$

Erläuterung: *Uneigentliches Integral*

Das uneingentliche Integral $\int\limits_a^\infty f(x) d\, x$ einer Funktion $f(x)$ ist definiert als Grenzwert:

$\int\limits_a^\infty f(x) d\, x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x) d\, x = \lim\limits_{b\to\infty} [F(b) - F(a)]$

wobei F die Stammfunktion zu f ist.

$= \lim\limits_{b\to\infty} \underbrace{\left(\int\limits_0^b t \cdot \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, d\, t \right)}_{T}$

Nebenrechnung:

Erläuterung: *Aufleiten einer einfachen Exponentialfunktion*

Eine Exponentialfunktion vom Typ $e^{a\,x+b}$ wird nach folgender Regel aufgeleitet:

$\int e^{a\,x+b}\, d\, x = \frac{1}{a} e^{a\,x+b}$

Hier ist $a = -\lambda$ und $b = 0$

$\int e^{-\lambda\, t}\, d\, t = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\, t}$

Bestimmtes Integral T mit partieller Integration bestimmen:

$T = \int\limits_0^b t \cdot \lambda\, e^{-\lambda\, t}\, d\, t$

Erläuterung: *Konstante*

Konstanten, wie in diesem Fall λ, dürfen aus einem Integral heraus gezogen werden.

$= \lambda \cdot \int\limits_0^b t \cdot e^{-\lambda\, t}\, d\, t$

Erläuterung: *Partielle Integration*

Regel für die partielle Integration:

$\int\limits_a^b u(x) \cdot v'(x) d\, x = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x) \cdot v(x) d\, x$

In diesem Fall (t ist die Variable) setzt man:

$u(t) = t \quad \text{und} \quad v'(t) = e^{-\lambda\, t}$

Dann ist:

$u'(t) = 1 \quad \text{und} \quad v(t) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\, t}$ (siehe Nebenrechnung)

$= \lambda \cdot \{ \left[t \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda\, t} \right]_0^b - \int\limits_0^b \left(-\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda\, t}\, d\, t \}$

Erläuterung: *Konstante*

Konstanten, wie in diesem Fall λ dürfen in einem Integral hinein multipliziert werden.

$= \left[-t\, e^{-\lambda\, t} \right]_0^b + \int\limits_0^b e^{-\lambda\, t}\, d\, t$

$$= \Big[-t\,e^{-\lambda\,t}\Big]_0^b + \left[\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\,e^{-\lambda\,t}\right]_0^b$$

$$= \left[e^{-\lambda\,t}\cdot\left(-t-\frac{1}{\lambda}\right)\right]_0^b$$

$$= \left[e^{-\lambda\,b}\cdot\left(-b-\frac{1}{\lambda}\right)\right] - \left[\underbrace{e^{-\lambda\cdot 0}}_{=1}\cdot\left(-0-\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$= e^{-\lambda\,b}\cdot\left(-b-\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda}$$

Grenzwert bestimmen:

$$\overline{T} = \lim_{b\to\infty} T$$

Erläuterung: *L'Hospitalsche Regel*

Liegt bei $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ein "unbestimmter Ausdruck "der Form "$\dfrac{0}{0}$ "oder "$\dfrac{\infty}{\infty}$ "vor, dann besagt die Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Zähler und Nenner werden einzeln abgeleitet)

In diesem Fall betrachtet man den Grenzwert:

$$\lim_{b\to\infty}\underbrace{e^{-\lambda\,b}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\left(-b-\frac{1}{\lambda}\right)}_{\to-\infty} = \lim_{b\to\infty}\frac{\overbrace{-b-\dfrac{1}{\lambda}}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^{\lambda\,b}}_{\to\infty}} = \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{\lambda\,\underbrace{e^{\lambda\,b}}_{\to\infty}} = 0$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\underbrace{e^{-\lambda\,b}\cdot\left(-b-\frac{1}{\lambda}\right)}_{\to 0}+\frac{1}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda}$$

Bemerkung

Aus der Formelsammlung:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$$

Angewendet auf diese Aufgabe:

$$\lim_{b\to\infty} e^{-\lambda\,b}\cdot\left(-b-\frac{1}{\lambda}\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{-b-\frac{1}{\lambda}}{e^{\lambda\,b}} = 0$$