Abitur 2010 Mathematik LK Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k :\mapsto x - \ln \dfrac{x}{k}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

Teilaufgabe 1a (3 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to 0$ und für $x \to \infty$.

Teilaufgabe 1b (8 BE)

Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_k sowie das Krümmungsverhalten von G_k. Berechnen Sie $f_1(6)$ und skizzieren Sie G_1 in ein geeignetes Koordinatensystem. [zur Kontrolle: Tiefpunkt bei $x = 1$]

Teilaufgabe 1c (6 BE)

Zeigen Sie, dass G_k aus G_1 durch eine Verschiebung in Richtung der y-Achse hervorgeht. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k. (Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Nullstellen zu berechnen.)

Teilaufgabe 1d (4 BE)

Begründen Sie, dass f_k im Intervall $]0;1]$ umkehrbar ist, und geben Sie Definitions- und Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion f_k^{-1} an. Geben Sie die Stelle an, an der f_k^{-1} nicht differenzierbar ist.

Teilaufgabe 1e (7 BE)

Betrachtet wird folgende Aussage:

$$\int_0^1 f_k(x)\,d\,x = 1,5 + \ln k$$

α) Weisen Sie nach, dass die Aussage wahr ist.
β) Interpretieren Sie die Aussage für $k = 1$ geometrisch.
γ) Geben Sie ein Integral über f_1^{-1} an, dessen Wert Sie mit Hilfe der Aussage ermitteln können, und bestimmen Sie diesen Wert.

Teilaufgabe 1f (3 BE)

In dieser Teilaufgabe werden diejenigen Funktionen f_k betrachtet, deren Graphen G_k die x-Achse jeweils in genau zwei Punkten schneiden. Durch G_k, die beiden Koordinatenachsen sowie die Gerade $x = 1$ werden dann jeweils im Bereich $x \leq 1$ zwei Flächenstücke endlichen Inhalts festgelegt, von denen das eine oberhalb, das andere unterhalb der x-Achse liegt. Bestimmen Sie k so, dass diese beiden Flächenstücke inhaltsgleich sind.

Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte, zweimal differenzierbare Funktion g mit der Eigenschaft

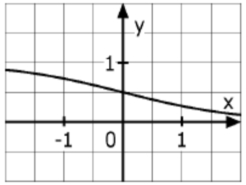
$g'(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)]$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2a (3 BE)

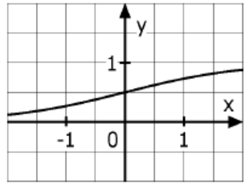
Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$g''(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)] \cdot [1 - 2 \cdot g(x)]$

Teilaufgabe 2b (6 BE)

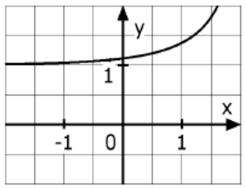
Einer der vier im Folgenden abgebildeten Graphen stellt den Graphen von g dar. Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die anderen nicht in Betracht kommen.



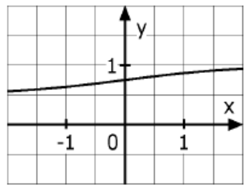
Graph I



Graph II



Graph III



Graph IV

Lösung

Teilaufgabe 1a (3 BE)

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k :\mapsto x - \ln\dfrac{x}{k}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to 0$ und für $x \to \infty$.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

$$f_k(x) = x - \ln\frac{x}{k}, \quad k \in \mathbb{R}^+,\ D = \mathbb{R}^+$$

Grenzwert gegen 0^+:

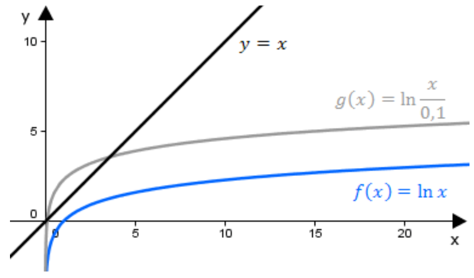
$$\lim_{x\to 0^+} f_k(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{x}_{\to 0^+} - \underbrace{\ln\overbrace{\frac{x}{k}}^{\to 0^+}}_{\to -\infty}\right) = \infty$$

Grenzwert gegen ∞:

Erläuterung: *Steigung der Logarithmusfunktion*

Der Ausdruck "$\infty - \infty$ "(Unendlich minus Unendlich) ist in der Regel nicht bestimmbar.

In diesem Fall kann jedoch folgendermaßen argumentiert werden:
Die Steigung der Geraden $y = x$ ist konstant gleich 1. Die Steigung der Logarithmusfunktion $g(x) = \ln\dfrac{x}{k}$ ist monoton fallend, denn $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.
Die Gerade $y = x$ "gewinnt "über die Logarithmusfunktion und die Differenz ihrer Funktionswerte wird immer größer für x gegen Unendlich.



$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{x}_{\to\infty} - \underbrace{\ln\frac{x}{k}}_{\to\infty}\right) = \infty$$

Alternative Lösung

Alternative Rechnungswege für den Grenzwert $x \to \infty$:

Umstellen der Funktionsgleichung:

Erläuterung: *Rechnen mit Logarithmen*

Logarithmus eines Quotienten:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Logarithmusfunktion ist Umkehrfunktion der Exponentialfunktion:

$$x = \ln e^x$$

$$f_k(x) = x - \ln\frac{x}{k} = \ln e^x - \ln\frac{x}{k} = -\left(\ln\frac{x}{k} - \ln e^x\right) = -\ln\frac{x}{k\,e^x}$$

Erläuterung: *Grenzwert*

Aus der Formelsammlung:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty} -\underbrace{\ln\Big(\underbrace{\frac{x}{k\,e^x}}_{\to 0}\Big)}_{\to -\infty} = \infty$$

Berechnung des Grenzwertes mit L'Hospital:

$$f_k(x) = x - \ln\frac{x}{k} = \ln e^x - \ln\frac{x}{k} = \ln\frac{k\cdot e^x}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{\overbrace{k\cdot e^x}^{\to\infty}}{\underbrace{x}_{\to\infty}}$$

Erläuterung: *L'Hospitalsche Regel*

Liegt bei $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ ein "unbestimmter Ausdruck "der Form "$\frac{0}{0}$ "oder "$\frac{\infty}{\infty}$ "vor, dann besagt die Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Zähler und Nenner werden einzeln abgeleitet)

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\ln\frac{\overbrace{e^x}^{\to\infty}}{1}}_{\to\infty} = \infty$$

Teilaufgabe 1b (8 BE)

Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_k sowie das Krümmungsverhalten von G_k. Berechnen Sie $f_1(6)$ und skizzieren Sie G_1 in ein geeignetes Koordinatensystem. [zur Kontrolle: Tiefpunkt bei $x = 1$]

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Ermitteln der Art von Extrempunkten

$$f_k(x) = x - \ln\frac{x}{k}, \quad k\in\mathbb{R}^+,\ D = \mathbb{R}^+$$

Erste Ableitung bilden:

$$f_k'(x) = \left(x - \ln\frac{x}{k}\right)'$$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel der Differentialrechnung für Logarithmusfunktionen:

$$f(x) = \ln g(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Hier ist $f(x) = \ln \frac{x}{k}$ mit $g(x) = \frac{x}{k}$

Dann ist $f'(x) = \dfrac{1/k}{x/k} = \dfrac{1}{x}$

$= 1 - \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{x-1}{x}$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

Erläuterung: *Notwendige Bedingung*

Folgende notwendige Bedingung muss für ein Extrempunkt an der Stelle x^E erfüllt sein:

$f'\left(x^E\right) = 0$, daher immer der Ansatz: $f'(x) = 0$

$$f_k'(x) = 0 \iff \frac{x-1}{x} = 0$$

Erläuterung: *Bruch gleich Null setzen*

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.
Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$x - 1 = 0$

$\Rightarrow x^E = 1$

$\Rightarrow$ An der Stelle $x^E = 1$ hat der Graph G_k eine waagerechte Tangente

Zweite Ableitung bilden:

$$f_k''(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = x - 1$ *und* $v(x) = x$.

Dann ist $u'(x) = 1$ *und* $v'(x) = 1$

$= \dfrac{1\cdot x - (x-1)\cdot 1}{x^2}$

$= \dfrac{1}{x^2}$

Art des Extrempunktes bestimmen:

Erläuterung: *Art eines Extremums*

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) > 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Tiefpunkt (Minimum)

Ist $f'\left(x^E\right) = 0$ und $f''\left(x^E\right) < 0$, so hat die Funktion an der Stelle x^E einen Hochpunkt (Maximum)

$$f_k''\left(x^E\right) = f_k''(1) = \frac{1}{1^2} = 1 > 0$$

$\Rightarrow G_k$ hat an der Stelle $x^E = 1$ ein Minimum

Ermitteln der Lage von Extrempunkten

$$y^E = f_k\left(x^E\right) = f_k(1) = 1 - \ln\frac{1}{k}$$

Erläuterung: *Rechnen mit Logarithmen*

Logarithmus eines Quotienten:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$= 1 - \ln 1 + \ln k = 1 + \ln k$

$\Rightarrow E(1|1 + \ln k)$ Minimum

Krümmungsverhalten einer Funktion

Vorzeichen der zweiten Ableitung bestimmen:

$f_k''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ für alle $x \in D$

Erläuterung: *Krümmungsverhalten einer Funktion*

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Aufschluss über das Krümmungsverhalten des Graphen.

Es gilt:

Ist die zweite Ableitung einer Funktion F negativ auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $F''(x) < 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall rechtsgekrümmt (konkav)

Ist die zweite Ableitung einer Funktion F positiv auf einem Intervall $]a, b[$, d.h. $F''(x) > 0$ für $x \in]a; b[$, so ist der Graph der Funktion G_f in diesem Intervall linksgekrümmt (konvex)

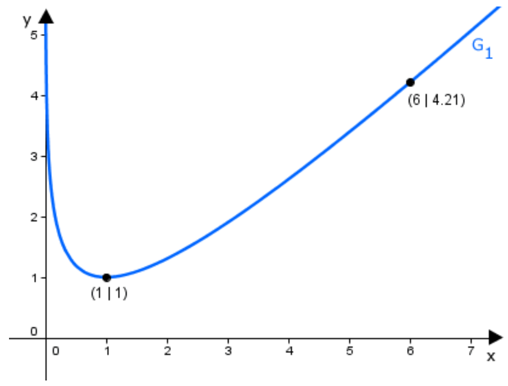
Ist die zweite Ableitung einer Funktion F gleich Null an einer Stelle x^W, d.h. $F''(x^W) = 0$, **und** findet ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung an dieser Stelle statt, so liegt ein Wendepunkt an der Stelle x^W vor.

$\Rightarrow G_k$ ist linksgekrümmt (konvex) in D

Skizze

$f_1(x) = x - \ln x$

$f_1(6) = 6 - \ln 6 \approx 4,2$



Teilaufgabe 1c (6 BE)

Zeigen Sie, dass G_k aus G_1 durch eine Verschiebung in Richtung der y-Achse hervorgeht. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k. (Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Nullstellen zu berechnen.)

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Verschiebung von Funktionsgraphen

$f_k(x) = x - \ln \dfrac{x}{k}$

Erläuterung: *Rechnen mit Logarithmen*

Logarithmus eines Quotienten:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$= x - (\ln x - \ln k)$

$= x - \ln x + \ln k$

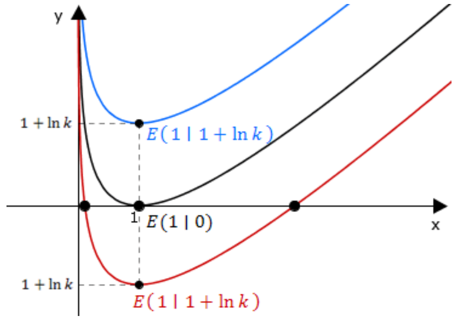
$= f_1(x) + \underbrace{\ln k}_{\text{Verschiebung}}$

$\Rightarrow G_k$ geht hervor durch eine Verschiebung von G_1 in Richtung der y-Achse

Nullstellen einer Funktion

$E(1|1+\ln k)$ Minimum (siehe Teilaufgabe 1b)

Erläuterung: *Lage des Extrempunkts*



Wie bei einer Parabel, hat die Funktion f_k keine Nullstellen wenn das Minimum oberhalb der x-Achse liegt, genau eine Nullstelle wenn das Minimum auf der x-Achse liegt und zwei Nullstellen wenn das Minimum unterhalb der x-Achse liegt.

Der y-Wert des Minimums sagt somit aus wann und wie viele Nullstellen die Funktion hat in Abhängigkeit von k.

$1+\ln k = 0$

$\ln k = -1$

$e^{\ln k} = e^{-1}$

$k = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$$\Rightarrow \text{Anzahl Nullstellen} \quad \begin{array}{lll} \nearrow & 0 \text{ Nullstellen für} & k > \frac{1}{e} \\ \rightarrow & 1 \text{ Nullstelle für} & k = \frac{1}{e} \\ \searrow & 2 \text{ Nullstellen für} & k < \frac{1}{e} \end{array}$$

Teilaufgabe 1d (4 BE)

Begründen Sie, dass f_k im Intervall $]0;1]$ umkehrbar ist, und geben Sie Definitions- und Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion f_k^{-1} an. Geben Sie die Stelle an, an der f_k^{-1} nicht differenzierbar ist.

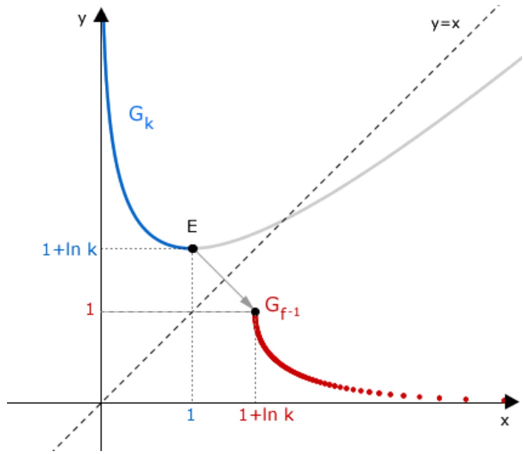
Lösung zu Teilaufgabe 1d

Umkehrfunktion bestimmen

$f_k(x) = x - \ln \dfrac{x}{k}, \quad k \in \mathbb{R}^+, \ D = \mathbb{R}^+$

Die Funktion f_k ist im Intervall $]0;1]$ stetig und streng monoton fallend (siehe Teilaufgabe 1b), also umkehrbar.

Erläuterung: *Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion*



Die Regel lautet:
Der Definitionsbereich der Funktion wird der Wertebereich der Umkehrfunktion und der Wertebereich der Funktion wird der Definitionsbereich der Umkehrfunktion.

In diesem Fall betrachtet man die Funktion f auf einem Teilintervall des Definitionsbereichs. Der Graph von f_k^{-1} ergibt sich aus der Spiegelung von G_k an der Winkelhalbierenden $y = x$.

$W_{f_k^{-1}} =]0;1]$

$D_{f_k^{-1}} = [1 + \ln k; \infty[$

f_k^{-1} ist an der Stelle $x = 1 + \ln k$ nicht differenzierbar.

Teilaufgabe 1e (7 BE)

Betrachtet wird folgende Aussage:

$$\int\limits_0^1 f_k(x)d\,x = 1,5 + \ln k$$

α) Weisen Sie nach, dass die Aussage wahr ist.
β) Interpretieren Sie die Aussage für $k = 1$ geometrisch.
γ) Geben Sie ein Integral über f_1^{-1} an, dessen Wert Sie mit Hilfe der Aussage ermitteln können, und bestimmen Sie diesen Wert.

Lösung zu Teilaufgabe 1e

Uneigentliches Integral

$f_k(x) = x - \ln \dfrac{x}{k}, \quad k \in \mathbb{R}^+, D = \mathbb{R}^+$

α)

$$A = \int\limits_0^1 f_k(x)d\,x$$

Erläuterung: *Uneigentliches Integral*

Das uneingentliche Integral $\int\limits_{x_0}^{a} f(x)d\,x$ einer Funktion $f(x)$, die an der Stelle $x = x_0$ eine Definitionslücke besitzt, ist definiert als Grenzwert:

$$\int\limits_{x_0}^{a} f(x)d\,x = \lim_{b\to x_0} \int\limits_b^a f(x)d\,x = \lim_{b\to x_0} [F(b) - F(a)]$$

wobei F die Stammfunktion zu f ist.

$$= \lim_{b\to 0} \underbrace{\int\limits_b^1 f_k(x)d\,x}_{\overline{A}}$$

Bestimmtes Integral $\overline{A}$ mit partieller Integration bestimmen:

$$\overline{A} = \int\limits_b^1 f_k(x)d\,x$$

$$= \int\limits_b^1 \left(x - \ln \frac{x}{k}\right)\; d\,x$$

$$= \int\limits_b^1 x\,d\,x - \int\limits_b^1 \ln \frac{x}{k}\,d\,x$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Hier ist $\dfrac{x^2}{2}$ eine Stammfunktion von x.

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_b^1 - \int\limits_b^1 \ln \frac{x}{k}\,d\,x$$

Erläuterung: *Partielle Integration, Kettenregel der Differenzialrechnung*

Regel für die partielle Integration:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,d\,x = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,d\,x$$

In diesem Fall setzt man:

$u(x) = \ln\frac{x}{k}$ und $v'(x) = 1$

Dann ist:

$u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = x$

$u'(x)$ wird mit der Kettenregel der Differentialrechnung für Logarithmusfunktionen bestimmt:

$$u(x) = \ln g(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_b^1 - \left(\left[\ln\frac{x}{k}\cdot x\right]_b^1 - \int_b^1 \frac{1}{x}\cdot x\,d\,x\right)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_b^1 - \left[\ln\frac{x}{k}\cdot x\right]_b^1 + [x]_b^1$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\cdot\left(\ln\frac{x}{k}-1\right)\right]_b^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{k} + 1\right) - \left[\frac{b^2}{2} - b\cdot\left(\ln\frac{b}{k}-1\right)\right]$$

Grenzwert bestimmen:

$$A = \lim_{b\to0}\overline{A}$$

Erläuterung: *L'Hospitalsche Regel*

Liegt bei $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ ein "unbestimmter Ausdruck "der Form "$\frac{0}{0}$ "oder "$\frac{\infty}{\infty}$ "vor, dann besagt die Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Zähler und Nenner werden einzeln abgeleitet)

In diesem Fall betrachtet man den Grenzwert:

$$\lim_{b\to0}\underbrace{b}_{\to0}\cdot\underbrace{\left(\ln\frac{b}{k}-1\right)}_{\to-\infty} = \lim_{b\to0}\frac{\overbrace{\left(\ln\frac{b}{k}-1\right)}^{\to-\infty}}{\underbrace{1/b}_{\to\infty}} = \lim_{b\to0}\frac{1/k\,b}{-1/b^2} = \lim_{b\to0} -b = 0$$

$$= \lim_{b\to0}\left(\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{k} + 1\right) - \underbrace{\left[\frac{b^2}{2} - b\cdot\left(\ln\frac{b}{k}-1\right)\right]}_{\to0}$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{k} + 1$$

Erläuterung: *Rechnen mit Logarithmen*

Logarithmus eines Quotienten:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$= \frac{1}{2} - \ln 1 + \ln k + 1$$

$$= 1,5 + \ln k$$

Bemerkung

Aus der Formelsammlung:

$$\lim_{x\to0} x\cdot\ln x = 0$$

Angewendet auf diese Aufgabe:

$$\lim_{b\to 0} b\cdot\left(\ln\frac{b}{k}-1\right)=\underbrace{\lim_{b\to 0} b\cdot\ln\frac{x}{k}}_{\to 0}-b=0$$

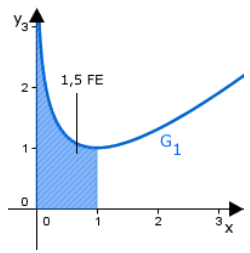
Geometrische Interpretation eines Integrals

$\beta)$

$k=1$

$$\int_0^1 f_1(x)d\,x=1,5+\underbrace{\ln 1}_{=0}=1,5$$

Erläuterung: *Flächenberechnung*



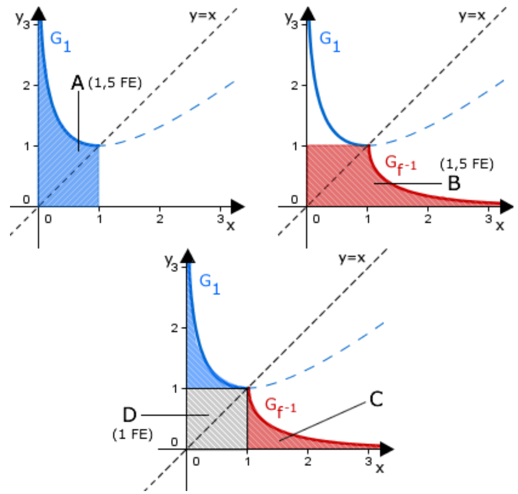
Das uneigentliche Integral $\int_0^1 f_1(x)d\,x$ ist gleich der Fläche die der Graph G_1 mit der x-Achse einschließt zwischen 0 und 1. Da $x=0$ eine Definitionslücke von f_1 ist und f_1 sich in der Nähe von $x=0$ ins Unendliche bewegt, erstreckt sich die Fläche ins Unendliche.

$\Rightarrow$ Das sich ins Unendliche erstreckende Flächenstück zwischen dem Graphen G_1 und der x-Achse zwischen 0 und 1 hat den endlichen Inhalt $1,5$.

Uneigentliches Integral

$\gamma)$

Erläuterung: *Umkehrfunktion*



Der Graph der Umkehrfunktion f_1^{-1} entsteht durch Spiegelung des Graphen G_1 an der Winkelhalbierenden $y=x$.
Wegen dieser Symmetrie ist die Fläche (A) die G_1 mit der x-Achse zwischen 0 und 1 einschließt gleich groß wie die Fläche (B) die $G_{f^{-1}}$ mit der **<u>y-Achse</u>** zwischen 0 und 1 einschließt.

Somit ist die Fläche (C) die $G_{f^{-1}}$ mit der **<u>x-Achse</u>** zwischen 1 und ∞ einschließt gleich groß wie die Fläche die G_1 mit der x-Achse zwischen 0 und 1 einschließt (1,5 FE) minus die Fläche (D) eines Einheitsviereck (1 FE).

$$\int_1^\infty f_1^{-1}(x)d\,x=1,5-1=0,5$$

$$\int_1^\infty f_1^{-1}(x)d\,x=1,5-1=0,5$$

Teilaufgabe 1f (3 BE)

In dieser Teilaufgabe werden diejenigen Funktionen f_k betrachtet, deren Graphen G_k die x-Achse jeweils in genau zwei Punkten schneiden. Durch G_k, die beiden Koordinatenachsen sowie die Gerade $x = 1$ werden dann jeweils im Bereich $x \leq 1$ zwei Flächenstücke endlichen Inhalts festgelegt, von denen das eine oberhalb, das andere unterhalb der x-Achse liegt. Bestimmen Sie k so, dass diese beiden Flächenstücke inhaltsgleich sind.

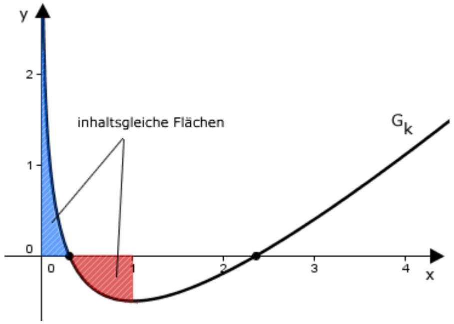
Lösung zu Teilaufgabe 1f

Flächenberechnung

Laut Teilaufgabe 1e) gilt:

$$\int_0^1 f_k(x)dx = 1,5 + \ln k \quad , \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*



Das bestimmte Integral $\int_0^1 f_k(x)dx$ entspricht der Differenz (Fläche unterhalb der x-Achse ist negativ) der zwei Flächen die der Graph G_k mit der x-Achse zwischen 0 und 1 einschließt.

Wenn beide Flächen gleichen Inhalt haben, dann ist ihre Differenz gleich Null.

Ansatz: $1,5 + \ln k = 0$

$\ln k = -1,5$

$e^{\ln k} = e^{-1,5}$

$k = e^{-1,5}$

Teilaufgabe 2a (3 BE)

Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte, zweimal differenzierbare Funktion g mit der Eigenschaft

$g'(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)]$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$g''(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)] \cdot [1 - 2 \cdot g(x)]$

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Nachweis der Gültigkeit einer gegebenen Beziehung

Gegeben:
$g'(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)]$

Zu zeigen:
$g''(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)] \cdot [1 - 2g(x)]$

Nachweis:

$g''(x) = \left(g'(x)\right)'$

Erläuterung: *Einsetzen*

Für $g'(x)$ wird der Ausdruck $g(x) \cdot [(1 - g(x))]$ eingesetzt.

$= (g(x) \cdot [1 - g(x)])'$

Erläuterung: *Produktregel der Differenzialrechnung*

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) + v'(x)$

Hier ist $u(x) = g(x) \quad und \quad v(x) = 1 - g(x)$.
Dann ist $u'(x) = g'(x) \quad und \quad v'(x) = -g'(x)$

$= g'(x) \cdot [1 - g(x)] + g(x) \cdot \big(-g'(x)\big)$

Erläuterung: *Einsetzen*

Für $g'(x)$ wird der Ausdruck $g(x) \cdot [(1 - g(x))]$ eingesetzt.

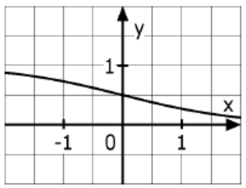
$= g(x) \cdot [1 - g(x)] \cdot [1 - g(x)] - g(x) \cdot g(x) \cdot [1 - g(x)]$

$= g(x) \cdot [1 - g(x)] \cdot [1 - g(x) - g(x)]$

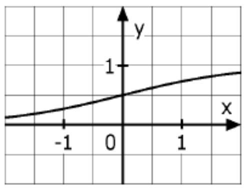
$= g(x) \cdot [1 - g(x)] \cdot [1 - 2g(x)]$

Teilaufgabe 2b (6 BE)

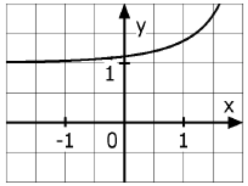
Einer der vier im Folgenden abgebildeten Graphen stellt den Graphen von g dar. Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die anderen nicht in Betracht kommen.



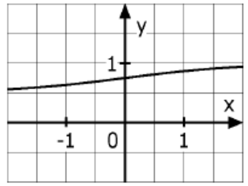
Graph I



Graph II



Graph III



Graph IV

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Monotonieverhalten einer Funktion

Nach Teilaufgabe 2a) hat die Funktion g folgende Eigenschaften:

$g'(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)]$

$g''(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)] \cdot [1 - 2g(x)]$

Graph I stellt nicht den Graphen von g dar, denn aus $0 < g(x) < 1$ folgt $g'(x) = g(x) \cdot \underbrace{[1 - g(x)]}_{>0} > 0$.

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Monotonie des Graphen (monoton fallend)

Graph III stellt nicht den Graphen von g dar, denn aus $g(x) > 1$ folgt $g'(x) = g(x) \cdot \underbrace{[1 - g(x)]}_{<0} < 0$.

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Monotonie des Graphen (monoton steigend)

Graph IV stellt nicht den Graphen von g dar, denn aus $\frac{1}{2} < g(x) < 1$ folgt $g''(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)] \underbrace{[1 - 2g(x)}_{<0}$

$\Rightarrow$ Widerspruch zum Krümmungsverhalten des Graphen (hat ein Wendepunkt)

Folglich stellt Graph II den Graphen von g dar.