Abitur 2010 Mathematik LK Geometrie VI

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(0|0|2)$, $C(1|4|1)$, $D(-1|2|0)$ und die Gerade $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

Teilaufgabe 1a (4 BE)

Zeigen Sie, dass die drei Punkte A, C und D eine Ebene E festlegen, und bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0$]

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Die Gerade g schneidet die Ebene E in einem Punkt B. Berechnen Sie die Koordinaten von B und zeigen Sie, dass der Punkt B das Dreieck ACD zu einem Quadrat $ABCD$ ergänzt.

[Teilergebnis: $B(2|2|3)$]

Zusätzlich ist die Geradenschar $h_t: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \\ 2t \end{pmatrix}$ mit $\mu, t \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe 2a (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Schar der Geraden h_t enthalten ist.

Teilaufgabe 2b (5 BE)

Eine der Schargeraden h_t ist parallel zur Ebene E. Bestimmen Sie den zugehörigen Scharparameter t und den Abstand dieser Geraden von E.

Teilaufgabe 3a (6 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des von B verschiedenen Punktes $P \in g$ so, dass die Geraden PA und PC senkrecht zueinander stehen.

Teilaufgabe 3b (6 BE)

Begründen Sie, dass es eine Kugel K mit Mittelpunkt $M \in E$ gibt, auf der die Punkte A, B, C, D und P liegen. Ermitteln Sie die Koordinaten von M und den Radius r von K.

[zur Kontrolle: $M(0,5|2|1,5)$; $r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$]

Teilaufgabe 3c (4 BE)

Prüfen Sie, ob der Ursprung O des Koordinatensystems innerhalb oder außerhalb der Kugel F liegt, und geben Sie die Radien der Kugeln um den Ursprung an, die die Kugel K berühren.

Teilaufgabe 4 (6 BE)

Für einen Punkt $Q \in g$ wird der Flächeninhalt des Dreiecks AQC minimal. Bestimmen Sie diesen minimalen Flächeninhalt.

Lösung

Teilaufgabe 1a (4 BE)

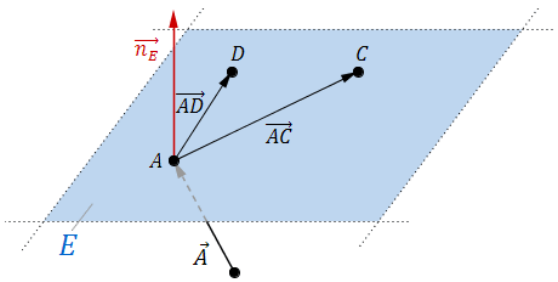
In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(0|0|2)$, $C(1|4|1)$, $D(-1|2|0)$ und die Gerade $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

Zeigen Sie, dass die drei Punkte A, C und D eine Ebene E festlegen, und bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0$]

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Ebene aus drei Punkte



$A(0|0|2)$, $C(1|4|1)$, $D(-1|2|0)$

Richtungsvektoren der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Überprüfen ob die Richtungsvektoren parallel sind:

> Erläuterung: *Parallele Vektoren*
>
> Zwei Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ sind genau dann parallel, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.
> Also genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:
>
> $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} 1 = -k \\ 4 = 2k \\ -1 = -2k \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} k = -1 \\ k = 2 \\ k = \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \text{Widerspruch!}$$

Die Richtungsvektoren sind nicht parallel.

$\Rightarrow$ Die Punkte A, B und C legen eine Ebene E fest

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E aus den beiden Richtungsvektoren bestimmen:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Vektorprodukt*
>
> Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.
>
> Für die komponentenweise Berechnung gilt:
>
> $$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$
>
> In diesem Fall ist:
>
> $$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor vereinfachen:

> Erläuterung: *Vereinfachen*
>
> Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
> Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.
>
> Hier wird der Normalenvektor durch -3 geteilt.
>
> Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\overrightarrow{n_E} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Normalenform E^N der Ebene E:

> Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*
>
> Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.
>
> $$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{n_E} = 0$$
>
> Hier:
>
> $$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$
>
> Kann auch geschrieben werden:
>
> $$\overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E^N : \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E^N : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -4$$

$$E^N : 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0$$

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Die Gerade g schneidet die Ebene E in einem Punkt B. Berechnen Sie die Koordinaten von B und zeigen Sie, dass der Punkt B das Dreieck ACD zu einem Quadrat $ABCD$ ergänzt.

[Teilergebnis: $B(2|2|3)$]

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Schnitt Ebene und Gerade

$$g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$E^N : 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0$$

Ebene E mit Gerade g schneiden: $E \cap g$

> Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*
>
> Schneidet eine Gerade $g : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E^N in einem Punkt B, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E^N.
>
> Man setzt g in E^N ein und löst nach λ auf.

$$g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= 1 + \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= 1 + \lambda \end{aligned} \quad \text{in} \quad E^N : 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0 \quad \text{einsetzen:}$$

$$2 \cdot 2 - \lambda - 2 \cdot (1 + \lambda) + 4 = 0$$

$$4 - \lambda - 2 - 2\lambda + 4 = 0$$

$6-3\lambda=0$

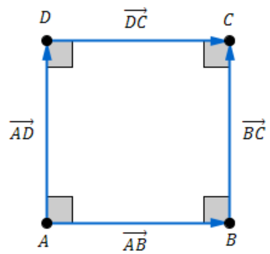
$\lambda=2$

$\lambda=2$ in die Geradengleichung einsetzen:

$$\overrightarrow{B}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Gerade g schneidet die Ebene E im Punkt $B(2|2|3)$

Länge eines Vektors



$A(0|0|2),\ B(2|2|3),\ C(1|4|1),\ D(-1|2|0)$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{C}-\overrightarrow{D}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{D}-\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Länge der Vektoren bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$\overline{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}^2}=\sqrt{4+4+1}=3$$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overline{DC}=3$$

$$\overline{AD}=\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$

$$\overline{BC}=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Prüfen ob die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ senkrecht aufeinander stehen:

$$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}=-2+4-2=0$$

$\Rightarrow$ die Vektoren stehen senkrecht aufeinander

$\Rightarrow$ $ABCD$ ist ein Quadrat

Teilaufgabe 2a (3 BE)

Zusätzlich ist die Geradenschar $h_t:\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}2t\\t\\2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}t-1\\t+1\\2t\end{pmatrix}$ mit $\mu,t\in\mathbb{R}$ gegeben.

Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Schar der Geraden h_t enthalten ist.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Lagebeziehung von Geraden

$$g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$h_t : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad , \ \mu, t \in \mathbb{R}$$

Prüfen für welchen Wert von t die Gerade h_t parallel zur Geraden g ist:

> Erläuterung: *Parallelität von zwei Geraden*
>
> Zwei Geraden g und h sind parallel, wenn der Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der einen Gerade durch den Richtungsvektor $\overrightarrow{u}$ der anderen Geraden ausgedrückt werden kann (ob also der eine ein Vielfaches vom anderen ist):
>
> $\overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{u} \quad , \ k \in \mathbb{R}$
>
> In diesem Fall ist $k = 2$, wenn $t = 1$ gewählt wird.

$$\begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \\ 2t \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} t-1=0 \\ t+1=k \\ 2t=k \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} t=1 \\ k=2 \\ k=2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow h_1 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ist parallel zu } g$$

Prüfen ob der Ortsvektor von g die Geradengleichung h_1 erfüllt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} 2=2 \\ 0=1+2\mu \\ 1=2+2\mu \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2=2 \\ -\frac{1}{2}=\mu \\ -\frac{1}{2}=\mu \end{matrix}$$

$\Rightarrow h_1 = g$

$\Rightarrow$ Die Gerade g ist für $t = 1$ in der Schar der Geraden h_t enthalten.

Teilaufgabe 2b (5 BE)

Eine der Schargeraden h_t ist parallel zur Ebene E. Bestimmen Sie den zugehörigen Scharparameter t und den Abstand dieser Geraden von E.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Lagebeziehung Gerade und Ebene

$$h_t : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad , \ \mu \ , \ t \in \mathbb{R}$$

$$E^N : 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(s. Teilaufgabe 1a)}$$

Scharparameter bestimmen:

> Erläuterung: *Skalarprodukt*
>
> Wenn eine Schargerade h_t parallel zur Ebene E ist, dann steht der Normalvektor der Ebene senkrecht zum Richtungsvektor der Schargerade.
>
> Man bildet also das Skalarprodukt dieser Vektoren und setzt es gleich Null, da das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, gleich Null ist.
>
> Die Gleichung muss anschließend nach t aufgelöst werden.

$$\begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \\ 2t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2(t-1) - (t+1) - 4t = -3t - 3 = 0$$

$\Rightarrow t = -1$

$$\Rightarrow \text{Die Gerade } h_{-1} : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{ist parallel zu } E$$

Abstand Punkt - Ebene

Betrag des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E aufstellen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.

Beispiel:

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$$E^{HNF}: \frac{1}{3} \cdot (2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4) = 0$$

Abstand des Punktes $P(-2|-1|2)$ von der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P,E)$ des Punktes zur Ebene. Ist zusätzlich P ein Punkt einer Geraden, die parallel zur Ebene verläuft, so ist der Abstand des Punktes zur Ebene gleich dem Abstand der Geraden zur Ebene.

Beispiel:

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$P(1|3|-6)$

$$d(P,E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\frac{9}{3} \right| = 3$$

$$d(P,E) = d(h_{-1}, E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot (-2) - (-1) - 2 \cdot 2 + 4) \right| = 1$$

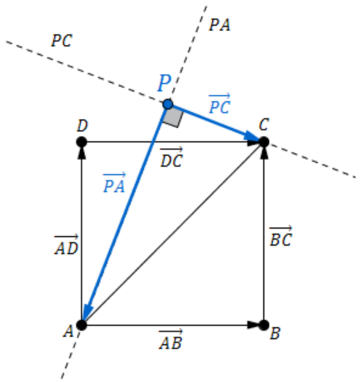
$\Rightarrow$ Der Abstand der Geraden h_{-1} zur Ebene E beträgt 1 LE (Längeneinheit)

Teilaufgabe 3a (6 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des von B verschiedenen Punktes $P \in g$ so, dass die Geraden PA und PC senkrecht zueinander stehen.

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Schnitt zweier Geraden



Man kann die Geradengleichung so umschrieben, dass man <u>einen</u> Vektor erhält, der jeden Punkt auf der Geraden beschreibt.

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$P \in g \Rightarrow P(2|\lambda|1+\lambda)$

$A(0|0|2)$
$C(1|4|1)$

Richtungsvektor $\overrightarrow{PA}$ der Geraden PA bestimmen:

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor $\overrightarrow{PC}$ der Gerade PC bestimmen:

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4-\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt der Richtungsvektoren bilden und gleich Null setzen:

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Es wird das Skalarprodukt der Richtungsvektoren $\overrightarrow{PA}$ und $\overrightarrow{PC}$ gebildet um den Parameter λ zu bestimmen für den die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Da das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren die senkrecht zueinander stehen, gleich Null ist, wird auch hier gleich Null gesetzt.

$$\overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 4-\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

$= 2 - \lambda(4-\lambda) - \lambda(1-\lambda)$

$= 2 - 4\lambda + \lambda^2 - \lambda + \lambda^2 = 0$

$2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Punkt P bestimmen:

$\lambda_1 \Rightarrow P = B(2|2|3)$

$$\lambda_2 \Rightarrow P\left(2|\frac{1}{2}|\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Der gesuchte Punkt ist } P\left(2|\frac{1}{2}|\frac{3}{2}\right)$$

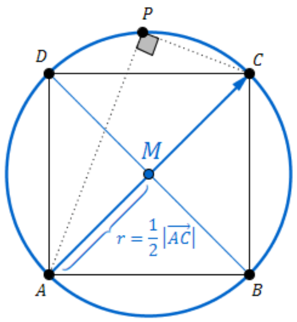
Teilaufgabe 3b (6 BE)

Begründen Sie, dass es eine Kugel K mit Mittelpunkt $M \in E$ gibt, auf der die Punkte A, B, C, D und P liegen. Ermitteln Sie die Koordinaten von M und den Radius r von K.

[zur Kontrolle: $M(0,5|2|1,5)$; $r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$]

<u>**Lösung zu Teilaufgabe 3b**</u>

Lagebeziehung Punkt und Kugel



Begründung:

Die Punkte A, C und D legen, wie in Teilaufgabe 1a gezeigt wird, die Ebene E fest. Der Punkt B liegt auch auf der Ebene E, da dieser, wie in Teilaufgabe 1b gezeigt wird, Schnittpunkt zwischen der Ebene E und der Geraden g ist.

Die Punkte A, B, C und D bilden, wie in Teilaufgabe 1b gezeigt wird, ein Quadrat.

Der Punkt P liegt auf dem Thaleskreis über die Strecke $[AC]$, da , wie in Teilaufgabe 3a gezeigt wird, die Geraden PA und PC senkrecht zueinander stehen.

Wählt man nun den Schnittpunkt M der Diagonalen des Quadrats $ABCD$ als Mittelpunkt, so liegt M auf der Ebene E und die Punkte A, B, C, D und P auf einer Kugel K mit Großkreis der Umkreis des Quadrates $ABCD$.

Lage eines Punktes

$A(0|0|2)$
$C(1|4|1)$

Mittelpunkt M bestimmen:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left[\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Alternative:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{A} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M(0,5|2|1,5)$ Mittelpunkt

Länge eines Vektors

Radius bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

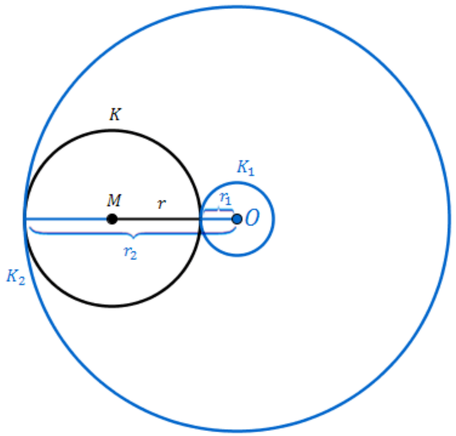
$$r = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+16+1} = \frac{18}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Teilaufgabe 3c (4 BE)

Prüfen Sie, ob der Ursprung O des Koordinatensystems innerhalb oder außerhalb der Kugel F liegt, und geben Sie die Radien der Kugeln um den Ursprung an, die die Kugel K berühren.

Lösung zu Teilaufgabe 3c

Abstand zweier Punkte



$M\left(\frac{1}{2}|2|\frac{3}{2}\right)$ Mittelpunkt

Abstand zwischen Mittelpunkt und Ursprung bestimmen:

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$d(M,O) = \overline{OM} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2} \approx 2,55$$

Lage eines Punktes

$r = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12$

$d(M,O) \approx 2,55$

$d(M,O) > r$

$\Rightarrow$ Der Ursprung liegt außerhalb der Kugel

Radius eines Kreises bestimmen

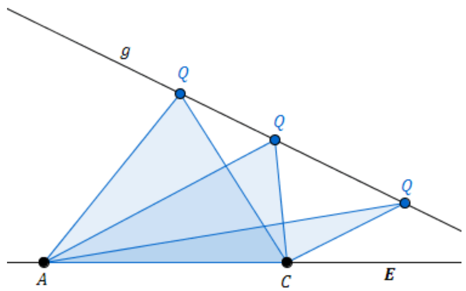
$$r_1 = d(M,O) - r = \frac{\sqrt{26}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$r_2 = d(M,O) + r = \frac{\sqrt{26}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Teilaufgabe 4 (6 BE)

Für einen Punkt $Q \in g$ wird der Flächeninhalt des Dreiecks AQC minimal. Bestimmen Sie diesen minimalen Flächeninhalt.

Lösung zu Teilaufgabe 4

Flächeninhalt eines Rechtecks



Man kann die Geradengleichung so umschrieben, dass man einen Vektor erhält, der jeden Punkt auf der Geraden beschreibt.

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$Q \in g \quad \Rightarrow \quad Q(2|\lambda|1+\lambda)$

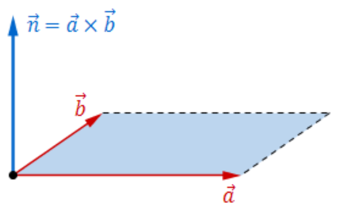
Seiten des Dreiecks bestimmen:

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dreiecksfläche bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt - Geometrische Bedeutung*



Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Die Länge $|\overrightarrow{n}|$ des Vektors $\overrightarrow{n}$ entspricht dem Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Seiten $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$.

In diesem Fall, teilt das Dreieck AQC das Parallelogramm mit den Seiten $\overrightarrow{AQ}$ und $\overrightarrow{AC}$ in 2 inhaltsgleiche Teilflächen.

$$A_{AQC}(\lambda) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AQ} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right|$$

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (-1) - 4 \cdot (\lambda - 1) \\ (\lambda - 1) \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 - 1 \cdot \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 5\lambda \\ 1 + \lambda \\ 8 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 4 - 5\lambda \\ 1 + \lambda \\ 8 - \lambda \end{pmatrix}\right|$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(4-5\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (8-\lambda)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16 - 40\lambda + 25\lambda^2 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 64 - 16\lambda + \lambda^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{27\lambda^2 - 54\lambda + 81}$$

Extremwertaufgabe

$$\Rightarrow f(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{27\lambda^2 - 54\lambda + 81}$$

Erste Ableitung bilden:

$A'_{AQC}(\lambda) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{27\lambda^2 - 54\lambda + 81}\right)'$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Die Wurzelfunktion kann umgeschrieben werden in: $\left(27\lambda^2 - 54\lambda + 81\right)^{\frac{1}{2}}$

Mit $u(\lambda) = (\ldots)^{\frac{1}{2}}$ und $v(\lambda) = 27\lambda^2 - 54\lambda + 81$

folgt

$u'(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot (\ldots)^{-\frac{1}{2}}$
$v'(\lambda) = 54\lambda - 54$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(27\lambda^2 - 54\lambda + 81\right)^{-1/2} \cdot (54\lambda - 54)$
$= \frac{1}{4} \cdot \frac{54\lambda - 54}{\sqrt{27\lambda^2 - 54\lambda + 81}}$

Erste Ableitung Null setzen:

$A'_{AQC}(\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{54\lambda - 54}{\sqrt{27\lambda^2 - 54\lambda + 81}} = 0$

$\Rightarrow 54\lambda - 54 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1$

Erläuterung: *Minimum der Funktion*

An der Stelle $\lambda = 1$ hat die Funktion $A_{AQC}(\lambda)$ ein Minimum, da die erste Ableitung ihr Vorzeichen wechselt von Minus nach Plus.

Minimalen Flächeninhalt bestimmen:

$A_{min} = A_{AQC}(1) = \frac{1}{2}\sqrt{27 - 54 + 81} = \frac{1}{2}\sqrt{54} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$ FE (Flächeneinheiten)