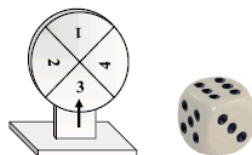


Abitur 2010 Mathematik GK Stochastik IV

Das Spiel „Gewinn mit Vier“ besteht aus dem einmaligen Drehen des abgebildeten Laplace-Glücksrades mit 4 gleich großen Sektoren und dem einmaligen Werfen eines üblichen Laplace-Würfels.



Teilaufgabe 1 (7 BE)

Es werden die beiden Ereignisse

- A: „Beim Drehen des Glücksrades wird die Zahl 4 erzielt“ und
 B: „Beim Werfen des Würfels wird die Zahl 4 erzielt“

betrachtet.

Drücken Sie die Ereignisse

- C: „Keines der beiden Ereignisse A und B tritt ein“ und
 D: „Höchstens eines der beiden Ereignisse A und B tritt ein“

durch A und B unter Verwendung der Mengenschreibweise aus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten von C und D.

In einer Spielshow spielt jeder Kandidat das Spiel „Gewinn mit Vier“ genau einmal.

Ein Kandidat erhält nur dann einen Kleingewinn, wenn er beim Spiel „Gewinn mit Vier“ genau einmal die Zahl 4 erzielt.

Teilaufgabe 2a (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür $\frac{1}{3}$ beträgt.

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Für die Show wurden 5 Kleingewinne bereitgestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese ausreichen, wenn 15 Kandidaten am Spiel teilnehmen?

Teilaufgabe 2c (5 BE)

Wie viele Kandidaten müssen in der Show mindestens „Gewinn mit Vier“ spielen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kandidat einen Kleingewinn erhält, mehr als 99 % beträgt?

Teilaufgabe 3 (4 BE)

Ein Kandidat wird zur nächsten Show erneut eingeladen, wenn beim Spiel „Gewinn mit Vier“ die Summe der beiden von ihm erzielten Zahlen den Wert 4 ergibt. Berechnen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Teilaufgabe 4 (5 BE)

Erzielt ein Kandidat beim Spiel „Gewinn mit Vier“ zweimal die Zahl 4, darf er an die Glückswand. An dieser sind zwölf Felder in zufälliger Anordnung beschriftet, und zwar je drei mit 0 €, 100 €, 500 € bzw. 1000 €. Die folgende Abbildung zeigt eine mögliche Anordnung der Geldbeträge an der Glückswand.

100 €	0 €	500 €	100 €
0 €	1000 €	500 €	100 €
500 €	0 €	1000 €	1000 €

Die Felder sind zunächst verdeckt. Ein Spieler darf vier Felder aufdecken und erhält die Summe der aufgedeckten Geldbeträge. Wie groß ist für einen Kandidaten die Wahrscheinlichkeit, dass er im Rahmen einer Show an die Glückswand darf und dort mindestens 3000 € gewinnt?

Teilaufgabe 5 (4 BE)

Es wird vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 4 beim Würfel nicht mehr $\frac{1}{6}$ beträgt, sondern höher ist. Um zu entscheiden, ob der Würfel ausgetauscht werden muss, wird er 100-mal geworfen. Der Würfel soll ausgetauscht werden, wenn die Augenzahl 4 dabei mehr als 20-mal erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Laplace-Würfel irrtümlich ausgetauscht wird?

Die Wahrscheinlichkeit für einen Kleingewinn (vgl. Aufgabe 2) soll von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{4}$ reduziert werden. Dazu verkleinert man den Sektor mit der Zahl 4 auf dem Glücksrad. Die Sektoren der anderen Zahlen werden so angepasst, dass die Winkel aller Sektoren zusammen wieder 360° ergeben. Der Laplace-Würfel bleibt unverändert.

Teilaufgabe 6a (5 BE)

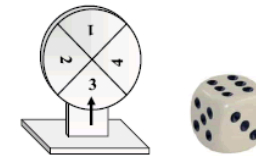
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p , mit der die Zahl 4 nun beim Drehen des Glücksrades erzielt wird, und geben Sie die Größe des Winkels des zugehörigen Sektors an.

Teilaufgabe 6b (3 BE)

Begründen Sie, dass durch diese Änderungen am Glücksrad die Wahrscheinlichkeit für den Summenwert 4 gegenüber der Ausgangssituation (vgl. Aufgabe 3) größer wird.

Lösung**Teilaufgabe 1** (7 BE)

Das Spiel „Gewinn mit Vier“ besteht aus dem einmaligen Drehen des abgebildeten Laplace-Glücksrades mit 4 gleich großen Sektoren und dem einmaligen Werfen eines üblichen Laplace-Würfels.



Es werden die beiden Ereignisse

A: „Beim Drehen des Glücksrades wird die Zahl 4 erzielt“ und

B: „Beim Werfen des Würfels wird die Zahl 4 erzielt“

betrachtet.

Drücken Sie die Ereignisse

C: „Keines der beiden Ereignisse A und B tritt ein“ und

D: „Höchstens eines der beiden Ereignisse A und B tritt ein“

durch A und B unter Verwendung der Mengenschreibweise aus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten von C und D.

Lösung zu Teilaufgabe 1**Wahrscheinlichkeit**

Mengenschreibweise für die Ereignisse C und D :

Erläuterung: *Schnitt zweier Ereignisse*

Das Ereignis C bedeutet:

Nicht A UND nicht B treten ein, also die Schnittmenge von $\bar{A}$ und $\bar{B}$.

$$C = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Erläuterung: Vereinigung zweier Ereignisse, De Morgansche Gesetze

Das Ereignis D bedeutet:

Entweder nicht A oder nicht B , also die Vereinigung von $\overline{A}$ und $\overline{B}$.

Nach dem Gesetz von De Morgan, gilt: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$D = \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Baumdiagramm erstellen:

Erläuterung: Laplace-Wahrscheinlichkeit, 1. Pfadregel

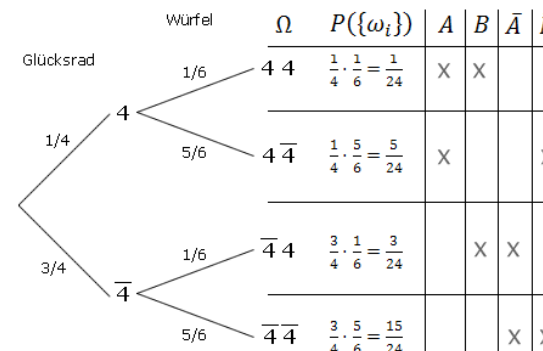
Jede Zahl auf dem Laplace-Glücksrad ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ vertreten $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$.

Jede Zahl auf dem Laplace-Würfel ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ vertreten $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$.

1. Pfadregel:

In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Beispiel: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$



Wahrscheinlichkeiten bestimmen:

$$P(C) = P(\overline{A \cap B}) = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} = 62,5\%$$

$$P(D) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24} \approx 95,8\%$$

Teilaufgabe 2a (3 BE)

In einer Spielshow spielt jeder Kandidat das Spiel „Gewinn mit Vier“ genau einmal.

Ein Kandidat erhält nur dann einen Kleingewinn, wenn er beim Spiel „Gewinn mit Vier“ genau einmal die Zahl 4 erzielt.

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür $\frac{1}{3}$ beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Wahrscheinlichkeit

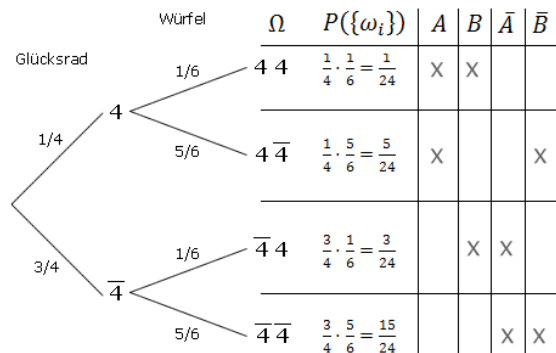
Ereignisse:

A : „Beim Drehen des Glücksrades wird die Zahl 4 erzielt“

B : „Beim Werfen des Würfels wird die Zahl 4 erzielt“

E : „Kandidat erzielt genau einmal die Zahl 4“

Baumdiagramm (aus Teilaufgabe 1):



Wahrscheinlichkeit für einen Kleingewinn:

Erläuterung: *Ereignis*

Das Ereignis E bedeutet:

Der Kandidat dreht eine 4 beim Glücksrad (Ereignis A) und wirft keine 4 beim Würfeln (Ereignis $\bar{B}$) ODER der Kandidat dreht kein 4 beim Glücksrad (Ereignis $\bar{A}$) und wirft eine 4 beim Würfeln (Ereignis B).

Die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ereignisse werden aus dem Baumdiagramm entnommen.

$$P(E) = \underbrace{P(A \cap \bar{B})}_{\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6}} + \underbrace{P(\bar{A} \cap B)}_{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{5}{24} + \frac{3}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Für die Show wurden 5 Kleingewinne bereitgestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese ausreichen, wenn 15 Kandidaten am Spiel teilnehmen?

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Binomialverteilung

Treffer = Kleingewinn bekommen

Niete = Kleingewinn nicht bekommen

$$p = P(\text{Treffer}) = \frac{1}{3} \quad (\text{siehe Teilaufgabe 2a})$$

$n = 15$ Anzahl der Kandidaten

$Z \leq 5$ (Kleingewinne reichen aus bei höchstens 5 Gewinnen)

Wahrscheinlichkeit bestimmen (Wert wird aus dem Tafelwerk entnommen):

$$P_{\frac{1}{3}}^{15}(Z \leq 5) = 0,61837 = 61,8\%$$

Teilaufgabe 2c (5 BE)

Wie viele Kandidaten müssen in der Show mindestens „Gewinn mit Vier“ spielen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kandidat einen Kleingewinn erhält, mehr als 99 % beträgt?

Lösung zu Teilaufgabe 2c

Binomialverteilung

Treffer = Kandidat bekommt Kleingewinn

Niete = Kandidat bekommt kein Kleingewinn

$$p = P(\text{Treffer}) = \frac{1}{3} \quad (\text{siehe Teilaufgabe 2a})$$

$$q = P(\text{Niete}) = 1 - p = \frac{2}{3}$$

n Anzahl der Kandidaten (die zu bestimmen sind)

$Z \geq 1$ mindestens ein Treffer

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kandidat einen Kleingewinn erhält, soll mehr als 99% betragen. Es gilt somit:

$$P_{\frac{1}{3}}^n(Z \geq 1) > 0,99$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Es wird das Gegenereignis betrachtet:

$$P(\text{mindestens 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$$

$$1 - P_{\frac{1}{3}}^n(Z = 0) > 0,99$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(k \text{ Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

n = Anzahl der Versuche

k = Anzahl der Treffer

p = Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch

$1-p$ = Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$$P(0 \text{ Treffer}) = P_p^n(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_1 \cdot \underbrace{p^0}_1 \cdot (1-p)^{n-0}$$

$$\Rightarrow P(0 \text{ Treffer}) = (1-p)^n$$

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0,99$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0,99$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 1 - 0,99 \quad | \text{ logarithmieren}$$

$$\ln \left(\frac{2}{3}\right)^n < \ln(1 - 0,99)$$

$$n \cdot \ln \left(\frac{2}{3}\right) < \ln(1 - 0,99) \quad | : \underbrace{\ln \left(\frac{2}{3}\right)}_{<0}$$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$$n > \frac{\ln(1 - 0,99)}{\ln \left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$n > \frac{\ln(1 - 0,99)}{\ln \left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$n > 11,35$$

$$\Rightarrow n \geq 12$$

Es müssen mindestens 12 Kandidaten am Spiel „Gewinn mit Vier“ teilnehmen.

Teilaufgabe 3 (4 BE)

Ein Kandidat wird zur nächsten Show erneut eingeladen, wenn beim Spiel „Gewinn mit Vier“ die Summe der beiden von ihm erzielten Zahlen den Wert 4 ergibt. Berechnen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 3

Wahrscheinlichkeit

A: „Summe der erzielten Zahlen ist gleich 4“

Mögliche Augensumme:

entweder $1 + 3$ oder $3 + 1$ oder $2 + 2$

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit einer Zufallsgröße*

Jede Zahl auf dem Laplace-Glücksrad ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ vertreten. Jede Zahl auf dem Laplace-Würfel mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$.

Die Wahrscheinlichkeit eine 1 beim Glücksrad UND eine 3 beim Würfeln zu erzielen ist gegeben aus dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten:

$$P(1 \text{ und } 3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$$

Analoges gilt für die Fälle „3 und 1“ und „2 und 2“.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A ergibt sich dann durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fällen.

$$P(A) = \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}}^{1+3} + \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}}^{3+1} + \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}}^{2+2} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 12,5\%$$

Teilaufgabe 4 (5 BE)

Erzielt ein Kandidat beim Spiel „Gewinn mit Vier“ zweimal die Zahl 4, darf er an die Glückswand. An dieser sind zwölf Felder in zufälliger Anordnung beschriftet, und zwar je drei mit 0 €, 100 €, 500 € bzw. 1000 €. Die folgende Abbildung zeigt eine mögliche Anordnung der Geldbeträge an der Glückswand.

100 €	0 €	500 €	100 €
0 €	1000 €	500 €	100 €
500 €	0 €	1000 €	1000 €

Die Felder sind zunächst verdeckt. Ein Spieler darf vier Felder aufdecken und erhält die Summe der aufgedeckten Geldbeträge. Wie groß ist für einen Kandidaten die Wahrscheinlichkeit, dass er im Rahmen einer Show an die Glückswand darf und dort mindestens 3000 € gewinnt?

Lösung zu Teilaufgabe 4

Wahrscheinlichkeit

A : „Kandidat kommt an die Glückswand und gewinnt mindestens 3000 Euro“

Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat an die Glückswand kommt (siehe Teilaufgabe 1):

$$P(2 \text{ mal } 4) = \frac{1}{24}$$

Möglichkeiten mehr als 3000 Euro aufzudecken:

$$3 \cdot 1000 + 1 \cdot 0/100/500 \quad \text{oder} \quad 2 \cdot 1000 + 2 \cdot 500$$

Erläuterung: *Wahrscheinlichkeit einer Zufallsgröße*

Damit ein Kandidat mehr als 3000 Euro gewinnen kann, muss er erst an die Glückswand kommen. Danach muss einer der oben genannten Fälle eintreten: entweder werden drei 1000 Euro Felder aufgedeckt und ein weiteres beliebiges Feld oder zwei 1000 Euro Felder und zwei 500 Euro Felder.

$$P(A) = P(2 \text{ mal } 4) \cdot P(\text{gewinnt mehr als 3000 Euro})$$

$$P(\text{gewinnt mehr als 3000 Euro}) = P(3 \text{ mal } 1000 \text{ Euro Feld und } 1 \text{ mal beliebiges Feld}) + P(2 \text{ mal } 1000 \text{ Euro Feld und } 2 \text{ mal } 500 \text{ Euro Feld})$$

Anzahl der Möglichkeiten drei 1000 Euro Felder aus drei vorhandenen zu wählen: $\binom{3}{3}$.

Anzahl der Möglichkeiten ein beliebiges Feld aus 9 übrigen Felder zu wählen: $\binom{9}{1}$.

Anzahl der Möglichkeiten 4 Felder aus 12 zu wählen: $\binom{12}{4}$.

$$\Rightarrow P(3 \text{ mal } 1000 \text{ Euro Feld und } 1 \text{ mal beliebiges Feld}) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{12}{4}}$$

Anzahl der Möglichkeiten zwei 1000 Euro Felder aus 3 vorhandenen zu wählen: $\binom{3}{2}$.

Anzahl der Möglichkeiten zwei 500 Euro Felder aus 3 vorhandenen Felder zu wählen: $\binom{3}{2}$.

Anzahl der Möglichkeiten 4 Felder aus 12 zu wählen: $\binom{12}{4}$.

$$\Rightarrow P(2 \text{ mal } 1000 \text{ Euro Feld und } 2 \text{ mal } 500 \text{ Euro Feld}) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{12}{4}}$$

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A :

$$P(A) = \frac{1}{24} \cdot \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{9}{1} + \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{12}{4}} \approx 0,15\%$$

Teilaufgabe 5 (4 BE)

Es wird vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 4 beim Würfel nicht mehr $\frac{1}{6}$ beträgt, sondern höher ist. Um zu entscheiden, ob der Würfel ausgetauscht werden muss, wird er 100-mal geworfen. Der Würfel soll ausgetauscht werden, wenn die Augenzahl 4 dabei mehr als 20-mal erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Laplace-Würfel irrtümlich ausgetauscht wird?

Lösung zu Teilaufgabe 5

Hypothesentest - Fehler 1.Art

Daten aus der Aufgabenstellung analysieren:

Hypothese H_1 :

$$p_1 = \frac{1}{6}$$

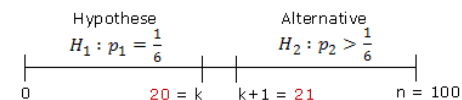
Alternative H_2 :

$$p_2 > \frac{1}{6}$$

$n = 100$ Anzahl Würfe

$k = 20$

Entscheidungsregel:



Erläuterung: *Fehler 1^o Art*

Es soll die Wahrscheinlichkeit für ein irrtümliches Austauschen eines Laplace-Würfels berechnet werden.

Das ist der Fall wenn H_1 stimmt, aber man sich im Bereich H_2 befindet, also $Z \geq k + 1$. Da H_1 stimmt, rechnet man mit der Wahrscheinlichkeit p_1 .

$$\Rightarrow \text{Fehler erster Art: } P_{\frac{1}{6}}^{100}(Z \geq 21)$$

Man spricht vom „Fehler erster Art“, wenn die Hypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Fehler erster Art:

$$P_{\frac{1}{6}}^{100}(Z \geq 21)$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Es wird das Gegenereignis betrachtet:

$$P(\text{mindestens } k+1 \text{ Treffer}) = 1 - P(\text{höchstens } k \text{ Treffer})$$

$$= 1 - P_{\frac{1}{6}}^{100}(Z \leq 20)$$

$$= 1 - 0,84811 \quad (\text{Wert wird im stoch. Tafelwerk abgelesen})$$

$$\approx 15,2\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Laplace-Würfel irrtümlich ausgetauscht wird, ist gleich 15,2%.

Teilaufgabe 6a (5 BE)

Die Wahrscheinlichkeit für einen Kleingewinn (vgl. Aufgabe 2) soll von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{4}$ reduziert werden. Dazu verkleinert man den Sektor mit der Zahl 4 auf dem Glücksrad. Die Sektoren der anderen Zahlen werden so angepasst, dass die Winkel aller Sektoren zusammen wieder 360° ergeben. Der Laplace-Würfel bleibt unverändert.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p , mit der die Zahl 4 nun beim Drehen des Glücksrades erzielt wird, und geben Sie die Größe des Winkels des zugehörigen Sektors an.

Lösung zu Teilaufgabe 6a

Wahrscheinlichkeit

Aus Teilaufgabe 2a) folgt:

$$P(E) = \overbrace{P(A \cap \bar{B})}^{4 \quad \bar{4}} + \overbrace{P(\bar{A} \cap B)}^{\bar{4} \quad 4} = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$$

mit

A : „Beim Drehen des Glücksrades wird die Zahl 4 erzielt“

B : „Beim Werfen des Würfels wird die Zahl 4 erzielt“

E : „Kandidat erzielt genau einmal die Zahl 4“

Sei nun $P(A) = p$ und $P(E) = \frac{1}{4}$. Daraus folgt:

$$P(E) = p \cdot \frac{5}{6} + (1-p) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{6}p + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}p = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{6}p = \frac{2}{24}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{8}$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 4 beim Drehen des Glücksrades zu erzielen, beträgt $\frac{1}{8}$.

Winkel α des Sektors der Zahl 4:

$$\alpha = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$$

Teilaufgabe 6b (3 BE)

Begründen Sie, dass durch diese Änderungen am Glücksrad die Wahrscheinlichkeit für den Summenwert 4 gegenüber der Ausgangssituation (vgl. Aufgabe 3) größer wird.

Lösung zu Teilaufgabe 6b**Wahrscheinlichkeit**

Begründung:

Für den Summenwert 4 dürfen am Glücksrad nur die Werte 1,2 oder 3 auftreten.

Da der Sektor der Zahl 4 kleiner geworden, ist als in der Ausgangssituation, sind die Sektoren der anderen Zahlen größer geworden, somit ist auch die Wahrscheinlichkeit größer geworden einer dieser Zahlen und dementsprechend den Summenwert 4 zu erzielen.

Alternative Lösung

Begründung:

A: „Summe der erzielten Zahlen ist gleich 4“

Aus Teilaufgabe 3 folgt:

$$P(A) = \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}}^{1+3} + \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}}^{3+1} + \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}}^{2+2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$$

Mit $p = P(\text{Zahl 4 beim Glücksrad}) = \frac{1}{8}$ (siehe Teilaufgabe 6a), folgt für die Wahrscheinlichkeit, eine andere Zahl beim Drehen des Glücksrades zu erzielen:

$$P(\text{Zahl 1}) = P(\text{Zahl 2}) = P(\text{Zahl 3}) = \frac{1 - \frac{1}{8}}{3} = \frac{7}{24}$$

Die Wahrscheinlichkeit den Summenwert 4 zu erzielen, ist dann:

$$P(A) = \overbrace{\frac{7}{24} \cdot \frac{1}{6}}^{1+3} + \overbrace{\frac{7}{24} \cdot \frac{1}{6}}^{3+1} + \overbrace{\frac{7}{24} \cdot \frac{1}{6}}^{2+2} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{6} > \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$$