Abitur 2010 Mathematik GK Stochastik III

Die Klasse 7a eines Gymnasiums fährt ins Skilager. Alle 11 Jungen und alle 18 Mädchen der Klasse nehmen an dem einwöchigen Skikurs teil.

Teilaufgabe 1 (4 BE)

In der Unterkunft stehen für die 18 Mädchen der Klasse ein Sechsbett-, ein Fünfbett-, ein Vierbett- und ein Dreibettzimmer zur Verfügung. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Mädchen so auf die vier Zimmer zu verteilen, dass jedes Zimmer voll besetzt ist?

Am Ankunftstag müssen die Schülerinnen und Schüler ihren „Pistenführerschein" in Form eines Multiple-Choice-Tests machen. Zu jeder der 10 vorgelegten Fragen gibt es gleich viele Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist; pro Frage ist genau eine der Antwortmöglichkeiten anzukreuzen. Der Test gilt als bestanden, wenn mehr als die Hälfte der Fragen korrekt beantwortet wurde.

Christoph wählt bei jeder Frage genau eine der Antwortmöglichkeiten rein zufällig aus und kreuzt diese an. Betrachtet wird das Ereignis A: „Christoph besteht den Pistenführerschein."

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Berechnen Sie $P(A)$ für den Fall, dass bei jeder Frage 3 Antwortmöglichkeiten vorgegeben sind.

Teilaufgabe 2b (5 BE)

Wie viele Antwortmöglichkeiten je Frage müssen mindestens vorgegeben werden, damit $P(A)$ unter 1% liegt? Begründen Sie Ihre Antwort mit geeigneten Werten aus dem stochastischen Tafelwerk.

Erfahrungsgemäß beträgt das Risiko, sich während eines einwöchigen Skikurses zu verletzen, für einen Jungen 5% und für ein Mädchen 2%.

Teilaufgabe 3a (3 BE)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit verletzen sich innerhalb der Kurswoche genau 2 der 11 Jungen?

Teilaufgabe 3b (2 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich innerhalb der Kurswoche niemand aus der Klasse 7a verletzt.

Teilaufgabe 3c (5 BE)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich innerhalb der Kurswoche höchstens ein Mitglied der Klasse 7a verletzt?

Teilaufgabe 4 (5 BE)

„Alkohol auf der Piste" erhöht bekanntlich das Verletzungsrisiko. Nach einer groß angelegten Aufklärungskampagne vermutet die ortsansässige Bergwacht, dass im Skigebiet der Anteil p aller Erwachsenen, die auf Alkoholkonsum beim Wintersport verzichten, mindestens 80% beträgt. Die Bergwacht will die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,8$ auf dem Signifikanzniveau 5% testen. Dazu wird bei 200 zufällig ausgewählten erwachsenen Wintersportlern ein Alkoholtest durchgeführt. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich.

Teilaufgabe 5 (5 BE)

Von einer Bergstation führen zwei Abfahrten ins Tal, eine einfache „blaue" und eine anspruchsvolle „schwarze". Im Auftrag der ortsansässigen Skischule wird untersucht, ob die Wahl der Abfahrt geschlechtsabhängig ist. Eine über mehrere Wochen erstellte Statistik über die von der Bergstation abfahrenden Personen zeigt, dass 45% unter ihnen weiblich sind; 22% unter ihnen sind männlich und entscheiden sich für die schwarze Abfahrt, 27% unter ihnen sind weiblich und wählen die blaue Abfahrt.
Eine in der Statistik erfasste Person wird zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie die beiden Ereignisse „Die ausgewählte Person ist männlich" und „Die ausgewählte Person entscheidet sich für die blaue Abfahrt" auf stochastische Unabhängigkeit.

Bei einem Abfahrtslauf der fortgeschrittenen Skifahrerinnen und Skifahrer der Klasse 7a werden die Startnummern von 1 bis 20 zufällig von den 20 Teilnehmern gezogen. Unter ihnen sind die 3 Mädchen aus dem Dreibettzimmer.

Teilaufgabe 6a (3 BE)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 3 Mädchen unter den ersten zehn Startern sind?

Teilaufgabe 6b (4 BE)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 3 Mädchen aufeinander folgende Startnummern ziehen?

Lösung

Teilaufgabe 1 (4 BE)

Die Klasse 7a eines Gymnasiums fährt ins Skilager. Alle 11 Jungen und alle 18 Mädchen der Klasse nehmen an dem einwöchigen Skikurs teil.

In der Unterkunft stehen für die 18 Mädchen der Klasse ein Sechsbett-, ein Fünfbett-, ein Vierbett- und ein Dreibettzimmer zur Verfügung. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Mädchen so auf die vier Zimmer zu verteilen, dass jedes Zimmer voll besetzt ist?

Lösung zu Teilaufgabe 1

Ziehen ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen

18 Mädchen sollen auf 4 Zimmer verteilt werden:

Erläuterung: *Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen*

Ansatz: „Lottoprinzip“

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge bedeutet $\binom{n}{k}$:

6 Mädchen von 18 beziehen das Zimmer mit dem 6er-Bett $\Rightarrow \binom{18}{6}$

Das erste Zimmer ist nun belegt. Es bleiben 18 - 6 = 12 Mädchen übrig.

5 Mädchen von 12 beziehen das Zimmer mit dem 5er-Bett $\Rightarrow \binom{12}{5}$

Das zweite Zimmer ist nun belegt. Es bleiben 12 - 5 = 7 Mädchen übrig.

4 Mädchen von 7 beziehen das Zimmer mit dem 4er-Bett $\Rightarrow \binom{7}{4}$

Das dritte Zimmer ist nun belegt. Es bleiben 7- 4 = 3 Mädchen übrig.

3 Mädchen von 3 beziehen das Zimmer mit dem 3er-Bett $\Rightarrow \binom{3}{3}$

$|E| = \binom{18}{6} \cdot \binom{12}{5} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3}$

$= 18564 \cdot 792 \cdot 351 \cdot 1$

$= 514.594.080$

$\Rightarrow$ Es gibt 514.594.080 verschiedene Möglichkeiten!

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Am Ankunftstag müssen die Schülerinnen und Schüler ihren „Pistenführerschein“ in Form eines Multiple-Choice-Tests machen. Zu jeder der 10 vorgelegten Fragen gibt es gleich viele Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist; pro Frage ist genau eine der Antwortmöglichkeiten anzukreuzen. Der Test gilt als bestanden, wenn mehr als die Hälfte der Fragen korrekt beantwortet wurde.

Christoph wählt bei jeder Frage genau eine der Antwortmöglichkeiten rein zufällig aus und kreuzt diese an. Betrachtet wird das Ereignis A: „Christoph besteht den Pistenführerschein.“

Berechnen Sie $P(A)$ für den Fall, dass bei jeder Frage 3 Antwortmöglichkeiten vorgegeben sind.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Binomialverteilung

Daten aus der Aufgabenstellung analysieren:

10 Fragen $\Rightarrow n = 10$

Von 3 Antwortmöglichkeiten, ist nur eine richtig $\Rightarrow p = \dfrac{1}{3}$

A: „Christoph besteht den Pistenführerschein“

Test bestanden bei mehr als die Hälfte richtig $\Rightarrow Z \geq 6$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$P(A) = P_{\frac{1}{3}}^{10}(Z \geq 6)$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

P(mindestens k Treffer) = 1 - P(weniger als k Treffer)

In mathematischen Zeichen:

$P(Z = k) = 1 - P(Z < k)$ bzw. $P(Z = k) = 1 - P(Z = k - 1)$

Angewendet auf diese Aufgabenstellung:

P(mehr als die Hälfte) = P(mindestens 6 richtige Fragen)= 1 - P(weniger als 6 richtige Fragen)

In mathematischen Zeichen:

$P(Z = 6) = 1 - P(Z = 5)$

$= 1 - P_{\frac{1}{3}}^{10}(Z \leq 5)$

$= 1 - 0{,}92344$ (Wert wird im stoch. Tafelwerk abgelesen)

$= 0{,}07656$

$\approx 7{,}7\%$

$\Rightarrow$ Christoph besteht den Pistenführerschein mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $7{,}7\%$

Teilaufgabe 2b (5 BE)

Wie viele Antwortmöglichkeiten je Frage müssen mindestens vorgegeben werden, damit $P(A)$ unter 1% liegt? Begründen Sie Ihre Antwort mit geeigneten Werten aus dem stochastischen Tafelwerk.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Binomialverteilung

Aus Teilaufgabe 2a) gilt (bei 3 Antwortmöglichkeiten):

$P(A) = P_{\frac{1}{3}}^{10}(Z \geq 6) = 1 - \underbrace{P_{\frac{1}{3}}^{10}(Z \leq 5)}_{0{,}92344} = 7,7\%$

Es soll gelten (bei einer bestimmten Anzahl an Antwortmöglichkeiten bzw. bei einer Trefferwahrscheinlichkeit p):

$P(A) = P_{p}^{10}(Z \geq 6) < 0,01$

In Worten: „Die Wahrscheinlichkeit von A soll unter 1% liegen“.

Daraus folgt:
(Berechnung über das Gegenereignis wie in Teilaufgabe 2a)

$1 - P_{p}^{10}(Z \leq 5) < 0,01$

Umstellen der Ungleichung:

$0,99 - P_{p}^{10}(Z \leq 5) < 0$

$P_{p}^{10}(Z \leq 5) > 0,99$

Aus dem stoch. Tafelwerk entnimmt man:

$$P_{p}^{10}(Z \leq 5) > 0,99 \quad \text{für} \quad \begin{array}{lcc} p & = & 0,10 \\ p & = & 0,125 \\ p & = & 0,15 \\ p & = & \frac{1}{6} \\ p & = & \frac{1}{5} = 0,20 \end{array}$$

Erst für $p = \dfrac{1}{4}$ gilt:

$P_{p}^{10}(Z \leq 5) = 0,98027 < 0,99$

$p = \dfrac{1}{5} \iff 5$ Antwortmöglichkeiten

$\Rightarrow$ Es müssen mindesten 5 Antwortmöglichkeiten je Frage vorgegeben werden

Teilaufgabe 3a (3 BE)

Erfahrungsgemäß beträgt das Risiko, sich während eines einwöchigen Skikurses zu verletzen, für einen Jungen 5% und für ein Mädchen 2%.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit verletzen sich innerhalb der Kurswoche genau 2 der 11 Jungen?

Lösung zu Teilaufgabe 3a

Binomialverteilung

Daten aus dem Text analysieren:

Das Risiko, dass ein Junge sich in einer Woche verletzt beträgt 5%
$\Rightarrow p = 0,05$

11 Jungen insgesamt
$\Rightarrow n = 11$

Genau 2 Jungen verletzten sich
$\Rightarrow k = 2$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$P_{0,05}^{11}(Z = 2) =$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_{p}^{n}(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$= \binom{11}{2} \cdot (0,05)^2 \cdot (0,95)^9$

$\approx 55 \cdot 0,0025 \cdot 0,63$

$\approx 0,087$

$\Rightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $8,7\%$ verletzen sich 2 von 11 Jungen in der ersten Kurswoche

Teilaufgabe 3b (2 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich innerhalb der Kurswoche niemand aus der Klasse 7a verletzt.

Lösung zu Teilaufgabe 3b

Binomialverteilung

Daten aus der Aufgabenstellung analysieren:

Das Risiko, dass ein Junge sich in einer Woche verletzt beträgt 5%
$\Rightarrow p_J = 0,05$

Das Risiko, dass ein Mädchen sich in einer Woche verletzt beträgt 2%
$\Rightarrow p_M = 0,02$

11 Jungen insgesamt
$\Rightarrow n_J = 11$

18 Mädchen insgesamt
$\Rightarrow n_M = 18$

Niemand verletzt sich
$\Rightarrow Z = 0$

Ereignis B: „Niemand aus der Klasse 7a verletzt sich innerhalb der Kurswoche.“

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung: *Ereignis*

Das Ereignis B bedeutet:

Kein Juge verletzt sich innerhalb der Kurswoche UND kein Mädchen verletzt sich innerhalb der ersten Kurswoche.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich kein Junge verletzt innerhalb der Kurswoche ist gegeben durch:

$P_{0,05}^{11}(Z = 0)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich kein Mädchen verletzt innerhalb der Kurswoche ist gegeben durch:

$P_{0,02}^{18}(Z = 0)$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B ist dann gegeben durch das Produkt der beiden Wahrscheinlichkeiten.

$P(B) = P_{0,05}^{11}(Z = 0) \cdot P_{0,02}^{18}(Z = 0)$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

$= \underbrace{\binom{11}{0} \cdot (0,05)^0}_{1} \cdot (0,95)^{11} \cdot \underbrace{\binom{18}{0} \cdot (0,02)^0}_{1} \cdot (0,98)^{18}$

$\approx 0,57 \cdot 0,695$

$\approx 0,395$

$\Rightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. $39,5\%$ verletzt sich niemand innerhalb der Kurswoche.

Teilaufgabe 3c (5 BE)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich innerhalb der Kurswoche höchstens ein Mitglied der Klasse 7a verletzt?

Lösung zu Teilaufgabe 3c

Binomialverteilung

Daten aus dem Text analysieren:

Das Risiko, dass ein Junge sich in einer Woche verletzt beträgt 5%
$\Rightarrow p_J = 0,05$

Das Risiko, dass ein Mädchen sich in einer Woche verletzt beträgt 2%
$\Rightarrow p_M = 0,02$

11 Jungen insgesamt
$\Rightarrow n_J = 11$

18 Mädchen insgesamt
$\Rightarrow n_M = 18$

Ereignis C: „Innerhalb der Kurswoche verletzt sich *höchstens* ein Mitglied der Klasse 7a"

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

Erläuterung: *Ereignis*

Das Ereignis C bedeutet:

ENTWEDER kein Mitglied (kein Junge und kein Mädchen) verletzt sich ODER es verletzt sich 1 Junge und kein Mädchen ODER es verletzt sich 1 Mädchen und kein Junge

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich kein Mitglied innerhalb der Kurswoche verletzt, ist gegeben durch $P(B)$ (siehe Teilaufgabe 3b):

$$\underbrace{P_{0,05}^{11}(Z=0)\cdot P_{0,02}^{18}(Z=0)}_{P(B)}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich 1 Junge und keine Mädchen innerhalb der Kurswoche verletzt, ist gegeben durch:

$$\underbrace{P_{0,05}^{11}(Z=1)}_{1\text{ J}}\cdot \underbrace{P_{0,02}^{18}(Z=0)}_{0\text{ M}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich 1 Mädchen und kein Junge innerhalb der Kurswoche verletzt, ist gegeben durch:

$$\underbrace{P_{0,05}^{11}(Z=0)}_{0\text{ J}}\cdot \underbrace{P_{0,02}^{18}(Z=1)}_{1\text{ M}}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C ist dann durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Alternativen gegeben.

$$\begin{aligned} P(C) = \ & P_{0,05}^{11}(Z=0)\cdot P_{0,02}^{18}(Z=0) \\ & + \\ & P_{0,05}^{11}(Z=1)\cdot P_{0,02}^{18}(Z=0) \\ & + \\ & P_{0,05}^{11}(Z=0)\cdot P_{0,02}^{18}(Z=1) \end{aligned}$$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$$P(\text{k Treffer}) = P_p^n(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$$P(0\ \text{Treffer}) = P_p^n(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$$

$$\Rightarrow P(0\ \text{Treffer}) = (1-p)^n$$

$$\begin{aligned} P(C) \quad = \quad & (0,95)^{11} \cdot (0,98)^{18} \\ & + \\ & \binom{11}{1} \cdot (0,05)^1 \cdot (0,95)^{10} \cdot (0,98)^{18} \\ & + \\ & (0,95)^{11} \cdot \binom{18}{1} \cdot (0,02)^1 \cdot (0,98)^{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C) \quad \approx \quad & 0,569 \cdot 0,695 \\ & + \\ & 11 \cdot 0,05 \cdot 0,599 \cdot 0,695 \\ & + \\ & 0,569 \cdot 18 \cdot 0,02 \cdot 0,709 \end{aligned}$$

$P(C) \approx 0,395455 + 0,22896775 + 0,14523156$

$P(C) \approx 0,769$

$\Rightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 77% verletzt sich höchstens ein Mitglied der Klasse 7a innerhalb der Kurswoche.

Teilaufgabe 4 (5 BE)

„Alkohol auf der Piste“ erhöht bekanntlich das Verletzungsrisiko. Nach einer groß angelegten Aufklärungskampagne vermutet die ortsansässige Bergwacht, dass im Skigebiet der Anteil p aller Erwachsenen, die auf Alkoholkonsum beim Wintersport verzichten, mindestens 80% beträgt. Die Bergwacht will die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,8$ auf dem Signifikanzniveau 5% testen. Dazu wird bei 200 zufällig ausgewählten erwachsenen Wintersportlern ein Alkoholtest durchgeführt. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich.

Lösung zu Teilaufgabe 4

Hypothesentest - Fehler 1.Art

Daten aus der Aufgabenstellung analysieren:

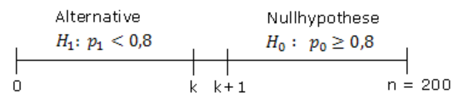
Nullhypothese:
$H_0 : p_0 \geq 0,8$

Alternative:
$H_1 : p_1 < 0,8$

$n = 200$ Testpersonen

5% Signifikanzniveau

Entscheidungsregel:



Erläuterung: *Fehler 1.Art*

Die Vermutung der Bergwacht soll auf dem Signifikanzniveau 5% getestet werden, d.h. die Vermutung soll irrtümlich mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% verworfen werden.

Das ist der Fall wenn H_0 stimmt, aber man sich im vorderem Bereich H_1 befindet, also $Z \leq k$. Da H_0 stimmt, rechnet man mit der Wahrscheinlichkeit $p_0 = 0,8$.
(Bemerkung: gilt für die zu verwendende Wahrscheinlichkeit p_0 das Größer-Gleich-Zeichen, so wählt man das Gleichheitszeichen; in diesem Fall $p_0 = 0,8$)

$\Rightarrow$ Fehler erster Art: $P_{p_0}^{n}(Z \leq k) \leq 0,05$

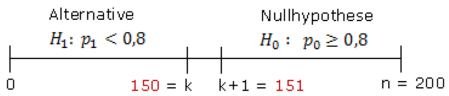
Man spricht von „Fehler erster Art“ wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird.

Fehler erster Art:

$P_{0,8}^{200}(Z \leq k) \leq 0,05$

$k \leq 150$ (Wert wird im stoch. Tafelwerk abgelesen)

Die Entscheidungsregel lautet somit:



$\Rightarrow$ Ablehnugsbereich für $p_0 \geq 0,8 : \{0, 1, 2, \ldots, 150\}$

Bemerkung:

Der Ablehnungsbereich kann auch für $k < 150$ gewählt werden, also beispielsweise für $k = 149$
.
Mit der Wahl von $k \leq 150$ gibt man den größtmöglichen Ablehnungsbereich an, so wie es von der Aufgabenstellung verlangt ist.

Teilaufgabe 5 (5 BE)

Von einer Bergstation führen zwei Abfahrten ins Tal, eine einfache „blaue“ und eine anspruchsvolle „schwarze“. Im Auftrag der ortsansässigen Skischule wird untersucht, ob die Wahl der Abfahrt geschlechtsabhängig ist. Eine über mehrere Wochen erstellte Statistik über die von der Bergstation abfahrenden Personen zeigt, dass 45% unter ihnen weiblich sind; 22% unter ihnen sind männlich und entscheiden sich für die schwarze Abfahrt, 27% unter ihnen sind weiblich und wählen die blaue Abfahrt.
Eine in der Statistik erfasste Person wird zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie die beiden Ereignisse „Die ausgewählte Person ist männlich“ und „Die ausgewählte Person entscheidet sich für die blaue Abfahrt“ auf stochastische Unabhängigkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 5

Vier Felder Tafel für zwei Ereignisse

Daten aus der Aufgabenstellung analysieren:

Ereignisse:

M : „Person ist männlich“
W : „Person ist weiblich“

B : „Blaue Abfahrt“
S : „Schwarze Abfahrt“

Wahrscheinlichkeiten:

45% sind weiblich
$\Rightarrow P(W) = 0,45$

22% sind männlich und entscheiden sich für die schwarze Piste
$\Rightarrow P(M \cap S) = 0,22$

27% sind weiblich und entscheiden sich für die blaue Piste
$\Rightarrow P(W \cap B) = 0,27$

Vier-Felder-Tafel aus obigen Daten erstellen:

	B	S	
M	$P(M \cap B) = 0{,}33$	$P(M \cap S) = 0{,}22$	$P(M) = 0{,}55$
W	$P(W \cap B) = 0{,}27$	$P(W \cap S) = 0{,}18$	$P(W) = 0{,}45$
	$P(B) = 0{,}60$	$P(S) = 0{,}40$	1

Stochastische Unabhängigkeit

Überprüfen ob gilt: $P(M \cap B) = P(M) \cdot P(B)$

Erläuterung: *Stochastische Unabhängigkeit*

Zwei Ereignisse M und B heißen stochastisch unabhängig, wenn

$P(M \cap B) = P(M) \cdot P(B)$

gilt, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit dass beide Ereignisse zusammen auftreten, gleich dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist.

Die Wahrscheinlichkeiten werden aus der Vier-Felder-Tafel entnommen.

$P(M \cap B) \overset{!}{=} P(M) \cdot P(B)$

$0,33 = \underbrace{0,55 \cdot 0,60}_{0,33}$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse M und B sind stochastisch unabhängig!

Teilaufgabe 6a (3 BE)

Bei einem Abfahrtslauf der fortgeschrittenen Skifahrerinnen und Skifahrer der Klasse 7a werden die Startnummern von 1 bis 20 zufällig von den 20 Teilnehmern gezogen. Unter ihnen sind die 3 Mädchen aus dem Dreibettzimmer.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 3 Mädchen unter den ersten zehn Startern sind?

Lösung zu Teilaufgabe 6a

Wahrscheinlichkeit

Daten aus der Aufgabenstellung analysieren:

Ereignis A: „3 Mädchen unten den ersten zehn Startern“

$n = 20$ Startplätze

$k = 3$ Mädchen

Anzahl der Möglichkeiten 3 Mädchen auf 20 Startplätzen zu verteilen:

$|\Omega| = \binom{n}{k} = \binom{20}{3}$

Weitere Daten aus der Aufgabenstellung analysieren:

$n = 10$ erste Startplätze

$k = 3$ Mädchen

Anzahl der Möglichkeiten 3 Mädchen auf ersten 10 Startplätzen zu verteilen:

$|A| = \binom{n}{k} = \binom{10}{3}$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{120}{1140} = \frac{2}{19} \approx 10,5\%$$

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass die 3 Mädchen unter den ersten 10 Startplätzen sind, beträgt ca. $10,5\%$

Teilaufgabe 6b (4 BE)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 3 Mädchen aufeinander folgende Startnummern ziehen?

Lösung zu Teilaufgabe 6b

Wahrscheinlichkeit

Daten aus der Aufgabenstellung analysieren:

Ereignis A: „3 Mädchen mit aufeinander folgende Startnummern“

$n = 20$ Startplätze

$k = 3$ Mädchen

Anzahl der Möglichkeiten 3 Mädchen auf 20 Startplätzen zu verteilen:

$|\Omega| = \binom{n}{k} = \binom{20}{3}$ (siehe Teilaufgabe 6a)

Anzahl der Möglichkeiten 3 aufeinander folgende Startnummern aus 20:

Erläuterung: *Ereignis*

Es gibt 20 Nummern:

1,2,3,4,5,6, ... , 18,19,20

3 aufeinander folgende Nummern sind z.B. (1,2,3)

Für jede Nummer nach der 1 kann eine Serie aufeinander folgender Nummern gebildet werden:

(1,2,3)
(2,3,4)
(3,4,5)
etc..

Da mit der Nummer 18 die letzte mögliche Serie gebildet werden kann (18,19,20), gibt es 18 mögliche aufeinander folgende Startnummern.

$|A| = 18$

Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{\binom{20}{3}} = \frac{18}{1140} = \frac{3}{190} \approx 1,6\%$$

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass die 3 Mädchen aufeinander folgende Startnummern ziehen, beträgt ca. $1,6\%$