

Abitur 2010 Mathematik GK Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1a (5 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an.

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Die Terme der gebrochen-rationalen Funktionen g und h haben den gleichen Zähler wie $f(x)$, aber jeweils einen anderen Nenner. Geben Sie je einen möglichen Funktionsterm für g und h an, so dass im jeweils maximalen Definitionsbereich gilt:

- Der Graph von g hat keine senkrechte Asymptote.
- Die Funktion h hat an der Stelle $x - 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

Teilaufgabe 2a (5 BE)

Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f an und untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f .

Teilaufgabe 2b (4 BE)

Berechnen Sie $f(3)$, $f(-2)$ und $f(-5)$. Zeichnen Sie G_f sowie die Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe 3 (4 BE)

Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion von f . Was lässt sich aus dem Ergebnis hinsichtlich der Symmetrie von G_f folgern?

Teilaufgabe 4a (3 BE)

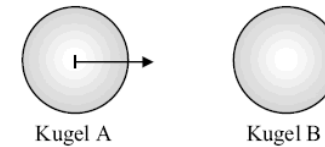
Bestätigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto -x + 2 \ln(x+1)$ für $x \in]-1; +\infty[$ eine Stammfunktion von f ist.

Teilaufgabe 4b (5 BE)

Weisen Sie durch Rechnung nach, dass G_f im I. Quadranten den Viertelkreis um den Koordinatenursprung mit Radius 1 in zwei etwa inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.

Die Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 3 können im Folgenden verwendet werden.

Eine Kugel A der Masse 1 kg bewegt sich nach rechts und stößt mit der Geschwindigkeit $1 \frac{m}{s}$ elastisch und zentral auf eine gleich große ruhende Kugel B .



Die Maßzahl der Geschwindigkeit der Kugel A in $\frac{m}{s}$ unmittelbar nach dem Zusammenstoß wird durch die Funktion $v : m \mapsto \frac{1-m}{1+m}$ mit $m \in \mathbb{R}^+$ beschrieben, wobei m für die Maßzahl der Masse der Kugel B in kg steht. Zu einer Bewegung nach rechts gehören positive Geschwindigkeiten, zu einer Bewegung nach links negative Geschwindigkeiten.

Teilaufgabe 5a (5 BE)

Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich Kugel A unmittelbar nach dem Stoß bewegt, wenn die Masse der Kugel B 0,6 kg beträgt.

Geben Sie die Grenzwerte der Funktion v für $m \rightarrow 0$ sowie $m \rightarrow +\infty$ an und machen Sie für diese beiden Grenzfälle jeweils den Bewegungsablauf der Kugel A im Sachzusammenhang plausibel.

Teilaufgabe 5b (5 BE)

Ermitteln Sie, für welche Werte von m sich Kugel A unmittelbar nach dem Stoß nach rechts bewegt.

Berechnen Sie, für welchen Wert von m sich die Kugel A unmittelbar nach dem Stoß mit $0,9 \frac{m}{s}$ nach links bewegt.

Lösung

Teilaufgabe 1a (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an.

Lösung zu Teilaufgabe 1a**Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs**

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Grenzwert gegen $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{1-x}^{\rightarrow -\infty}}{\underbrace{1+x}_{\rightarrow +\infty}}$$

Erläuterung: *Unbestimmter Ausdruck*

Die Funktionswerte von Zähler und Nenner streben beide gegen Unendlich für x gegen Unendlich. Der Grenzwert ist somit nicht eindeutig.

Man nennt $\frac{\infty}{\infty}$ einen unbestimmten Ausdruck.

Trick: Teilen durch die höchste, gemeinsame Potenz von x sowohl im Zähler als auch im Nenner (hier einfach x).

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\rightarrow 0} - 1}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} + 1} = -1^+$$

Grenzwert gegen $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{1-x}^{\rightarrow +\infty}}{\underbrace{1+x}_{\rightarrow -\infty}}$$

Erläuterung: *Unbestimmter Ausdruck*

Die Funktionswerte von Zähler und Nenner streben beide gegen Unendlich für x gegen Unendlich. Der Grenzwert ist somit nicht eindeutig.

Man nennt $\frac{\infty}{\infty}$ einen unbestimmten Ausdruck.

Trick: Teilen durch die höchste, gemeinsame Potenz von x sowohl im Zähler als auch im Nenner (hier einfach x).

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\rightarrow 0} - 1}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} + 1} = -1^-$$

Grenzverhalten der Funktion an der Definitionslücke $x_0 = -1$:

Erläuterung: *Linksseitiger/Rechtsseitiger Grenzwert*

Untersucht man das Verhalten einer Funktion an einer Definitionslücke, also eine Stelle x_0 die nicht zum Definitionsbereich gehört, so müssen folgende Grenzwerte gebildet werden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad (\text{linksseitiger Grenzwert})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (\text{rechtsseitiger Grenzwert})$$

Beim linksseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von links.

Beim rechtsseitigen Grenzwert nähert man sich der Definitionslücke x_0 von rechts.

In diesem Fall ist -1 die Definitionslücke

Grenzwert gegen -1^- (Annäherung von links an -1):

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\overbrace{1-x}^{\rightarrow 2}}{\underbrace{1+x}_{\rightarrow 0^-}} = -\infty$$

Grenzwert gegen -1^+ (Annäherung von rechts an -1):

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\overbrace{1-x}^{\rightarrow 2}}{\underbrace{1+x}_{\rightarrow 0^+}} = +\infty$$

Asymptoten bestimmen

Asymptoten:

Erläuterung: *Asymptoten*

Aus den zuvor berechneten Grenzwerten, folgt:

$y = -1$ ist waagerechte Asymptote, da $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$

$x = -1$ ist senkrechte Asymptote, da $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \pm\infty$

$y = -1$ (waagerechte Asymptote)

$x = -1$ (senkrechte Asymptote)

Teilaufgabe 1b (4 BE)

Die Terme der gebrochen-rationalen Funktionen g und h haben den gleichen Zähler wie $f(x)$, aber jeweils einen anderen Nenner. Geben Sie je einen möglichen Funktionsterm für g und h an, so dass im jeweils maximalen Definitionsbereich gilt:

- Der Graph von g hat keine senkrechte Asymptote.
- Die Funktion h hat an der Stelle $x = 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

Lösung zu Teilaufgabe 1b

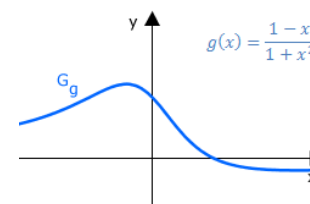
Funktionsgleichung ermitteln

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Erläuterung: *Senkrechte Asymptote*

Es gibt keine senkrechte Asymptote, wenn der Nenner keine Nullstelle hat.

Da $1+x^2$ keine Nullstelle hat, ist $g(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$ eine gesuchte Funktion.

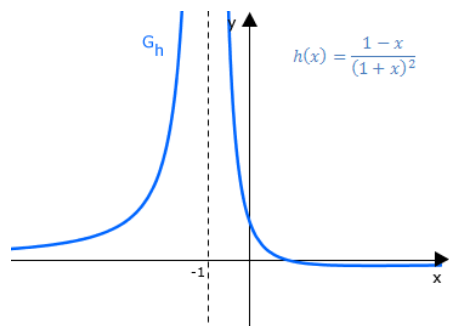


$$g(x) = \frac{1-x}{1+x^2}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Erläuterung: Doppelte Nullstelle

Eine Funktion hat eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, wenn der Nenner eine doppelte Nullstelle besitzt.

Der Nenner $(1+x)^2$ von $h(x)$ hat eine doppelte Nullstelle $x = -1$. Somit ist $h(x)$ eine gesuchte Funktion.



$$h(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}, \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Teilaufgabe 2a (5 BE)

Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f an und untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f .

Lösung zu Teilaufgabe 2a**Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Schnittpunkt mit der y -Achse:

Erläuterung: Schnittpunkt mit der y -Achse

Um den Schnittpunkt einer Funktion mit der y -Achse zu bestimmen, setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein.

$$y = f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$\Rightarrow G_f$ schneidet die y -Achse im Punkt $(0|1)$

Schnittpunkt mit der x -Achse:

Erläuterung: Nullstellen

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der x -Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$$f(x) = 0$$

Die Gleichung muss anschließend nach x aufgelöst werden.

$$f(x) = 0 \iff \frac{1-x}{1+x} = 0$$

Erläuterung: Bruch gleich Null setzen

Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist. Zu beachten ist dabei, dass die Nullstelle des Zählers nicht gleich sein darf wie die Nullstelle des Nenners (hebbare Lücke).

$$1-x=0$$

$$x=1$$

$\Rightarrow G_f$ schneidet die x -Achse im Punkt $(1|0)$ (Nullstelle)

Monotonieverhalten einer Funktion

Erste Ableitung bilden:

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)'$$

Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = 1 - x$ und $v(x) = 1 + x$
 Dann ist $u'(x) = -1$ und $v'(x) = 1$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1) \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-1-x+x-1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-2}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Vorzeichen der ersten Ableitung bestimmen:

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Die erste Ableitung ist ein Bruch.

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$).

$-2 < 0$ (Zähler) $\Rightarrow$ negatives Vorzeichen des Zählers

$(x+1)^2 > 0$ für $x \in D_f$ (Nenner) $\Rightarrow$ positives Vorzeichen des Nenners

$\Rightarrow f'(x) < 0$ für $x \in D_f \Rightarrow$ Ableitung für alle x negativ.

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

$f'(x) > 0$: Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$: Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

G_f ist sowohl im Bereich $] -\infty; -1[$ als auch im Bereich $] -1; \infty[$ streng monoton fallend.

Erläuterung: *Verhalten der Funktion an einer Polstelle*

Streng monoton fallend bedeutet:

Je größer die x -Werte werden, desto kleiner werden die Funktionswerte $f(x)$.

Da die Funktion an der Stelle $x = -1$ (Polstelle) einen Sprung macht (von minus Unendlich nach plus Unendlich, siehe Teilaufgabe 1a), ist sie nicht auf dem ganzen Definitionsbereich streng monoton.

Beispiel dafür:

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -3$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = -\frac{1}{3}$$

2 ist größer als -2, aber $f(2)$ ist nicht kleiner als $f(-2)$.

Da die Ableitung der Funktion jedoch für alle x -Werte negativ ist, sagt man, die Funktion ist stückweise auf ihre "Äste" (Intervalle des Definitionsbereich vor und nach einer Polstelle) streng monoton fallend.

Anders formuliert:

G_f ist abschnittsweise streng monoton fallend.

Teilaufgabe 2b (4 BE)

Berechnen Sie $f(3)$, $f(-2)$ und $f(-5)$. Zeichnen Sie G_f sowie die Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

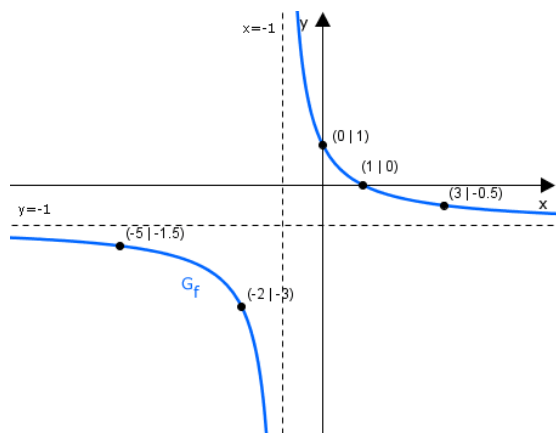
Skizze

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f(3) = \frac{1-3}{1+3} = \frac{-2}{4} = -0,5$$

$$f(-2) = \frac{1-(-2)}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$f(-5) = \frac{1-(-5)}{1-5} = \frac{6}{-4} = -1,5$$



Teilaufgabe 3 (4 BE)

Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion von f . Was lässt sich aus dem Ergebnis hinsichtlich der Symmetrie von G_f folgern?

Lösung zu Teilaufgabe 3

Umkehrfunktion bestimmen

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

Erläuterung: *Umkehrfunktion*

Um die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f zu bestimmen, vertauscht man die Variablen x und y in der Funktionsgleichung und löst die Gleichung nach y auf.

Einfaches Beispiel:

$$f(x) = x + 2$$

$$y = x + 2$$

Vertauschen:

$$x = y + 2$$

Auflösen:

$$y = x - 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$$

$$x = \frac{1-y}{1+y} \quad | \cdot (1+y)$$

$$x \cdot (1+y) = 1-y$$

$$x + xy = 1-y \quad | +y - x$$

$$xy + y = 1-x$$

$$y \cdot (1+x) = 1-x \quad | : (1+x)$$

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

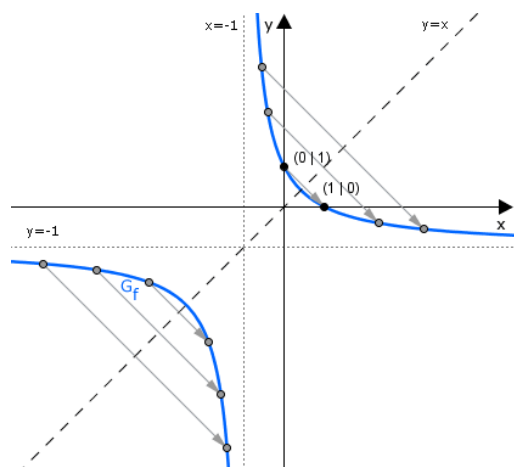
Symmetrieverhalten einer Funktion

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

Erläuterung: Spiegelung an der Winkelhalbierenden

Der Graph der Umkehrfunktion $G_{f^{-1}}$ entsteht durch Spiegelung des Graphen von G_f an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten, $y = x$.

Da $G_{f^{-1}} = G_f$ ist G_f symmetrisch zu $y = x$.



G_f ist achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden $y = x$.

Teilaufgabe 4a (3 BE)

Bestätigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto -x + 2 \ln(x+1)$ für $x \in]-1; +\infty[$ eine Stammfunktion von f ist.

Lösung zu Teilaufgabe 4a

Nachweis einer Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$F(x) = -x + 2 \ln(x+1), \quad x \in]-1; +\infty[$$

Erläuterung: Stammfunktion

Ist F eine Stammfunktion von f , dann gilt: $F' = f$

Zu zeigen: $F'(x) = f(x)$

Erste Ableitung $F'(x)$ bestimmen:

$$F'(x) = [-x + 2 \ln(x+1)]'$$

Erläuterung: Kettenregel der Differenzialrechnung

Kettenregel:

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Formel für Logarithmusfunktionen:

$$f(x) = \ln(v(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$$

Hier ist $v(x) = x+1$.

Dann ist $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} &= -1 + 2 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot 1 \\ &= \frac{-x-1+2}{x+1} \\ &= \frac{-x+1}{x+1} \\ &= \frac{1-x}{1+x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist F eine Stammfunktion von f , dann gilt: $F' = f$

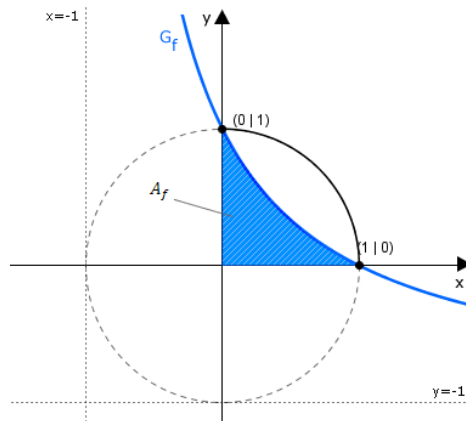
$\Rightarrow F(x)$ ist eine Stammfunktion von f

Teilaufgabe 4b (5 BE)

Weisen Sie durch Rechnung nach, dass G_f im I. Quadranten den Viertelkreis um den Koordinatenursprung mit Radius 1 in zwei etwa inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.

Lösung zu Teilaufgabe 4b

Flächenberechnung



$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$F(x) = -x + 2 \ln(x+1), \quad x \in]-1; +\infty[\text{ Stammfunktion von } f \text{ (s. Teilaufgabe 4a)}$$

Fläche A_f die G_f mit der x -Achse einschließt zwischen 0 und 1:

Erläuterung: *Bestimmtes Integral*

Die Fläche die G_f mit der x -Achse zwischen 0 und 1 einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:

$$A_f = \int_0^1 f(x) dx$$

$$A_f = \int_0^1 f(x) dx$$

Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Ist F eine Stammfunktion von f , dann ist $F' = f$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= [F(x)]_0^1$$

$$= [-x + 2 \ln(x+1)]_0^1$$

$$= -1 + 2 \ln 2 + \underbrace{0 - 2 \ln 1}_{=0}$$

$$= 2 \ln 2 - 1$$

$$\approx 0,386 \text{ FE (Flächeneinheiten)}$$

Viertelkreisfläche:

$$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

$$A_{Viertelkreis} = \frac{A_{Kreis}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Flächen vergleichen:

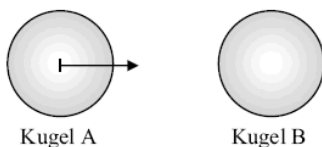
$$\frac{A_f}{A_{Viertelkreis}} = \frac{0,386}{\frac{\pi}{4}} \approx \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow G_f$ teilt die Viertelkreisfläche in etwa zwei inhaltsgleiche Teilflächen.

Teilaufgabe 5a (5 BE)

Die Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 3 können im Folgenden verwendet werden.

Eine Kugel A der Masse 1 kg bewegt sich nach rechts und stößt mit der Geschwindigkeit $1 \frac{m}{s}$ elastisch und zentral auf eine gleich große ruhende Kugel B.



Die Maßzahl der Geschwindigkeit der Kugel A in $\frac{m}{s}$ unmittelbar nach dem Zusammenstoß wird durch die Funktion $v : m \mapsto \frac{1-m}{1+m}$ mit $m \in \mathbb{R}^+$ beschrieben, wobei m für die Maßzahl der Masse der Kugel B in kg steht. Zu einer Bewegung nach rechts gehören positive Geschwindigkeiten, zu einer Bewegung nach links negative Geschwindigkeiten.

Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich Kugel A unmittelbar nach dem Stoß bewegt, wenn die Masse der Kugel B 0,6 kg beträgt. Geben Sie die Grenzwerte der Funktion v für $m \rightarrow 0$ sowie $m \rightarrow +\infty$ an und machen Sie für diese beiden Grenzfälle jeweils den Bewegungsablauf der Kugel A im Sachzusammenhang plausibel.

Lösung zu Teilaufgabe 5a**Anwendungsaufgabe****Wichtiger Hinweis**

Das Verständnis des physikalischen Zusammenhangs ist für die Lösung dieser Aufgabe nicht notwendig!

$m_A = 1$ kg
(Masse der Kugel A)

$v_A = 1 \frac{m}{s}$
(Geschwindigkeit der Kugel A vor dem Zusammenstoß)

$m_B = 0,6$ kg
(Masse der Kugel B)

$$v(m_B) = \frac{1 - m_B}{1 + m_B}$$

Geschwindigkeit der Kugel nach dem Zusammenstoß:

0,6 in die Funktion $v(m) = \frac{1-m}{1+m}$ für m einsetzen:

$$v(0,6) = \frac{1 - 0,6}{1 + 0,6} = 0,25 \frac{m}{s}$$

$\Rightarrow$ Die Kugel A bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 0,25 m/s nach dem Zusammenstoß.

Grenzwerte bestimmen:

$$\lim_{m_B \rightarrow 0} v(m_B) = \lim_{m_B \rightarrow 0} \frac{1 - m_B}{1 + m_B} = 1 \quad (\text{s. Teilaufgabe 1a})$$

Bedeutung: Hat Kugel B eine sehr kleine Masse, bewegt sich Kugel A mit nahezu unveränderter Geschwindigkeit weiter.

$$\lim_{m_B \rightarrow +\infty} v(m_B) = \lim_{m_B \rightarrow +\infty} \frac{1 - m_B}{1 + m_B} = -1 \quad (\text{s. Teilaufgabe 1a})$$

Bedeutung: Hat Kugel B eine sehr große Masse, prallt Kugel A von Kugel B so ab, dass sie sich mit betragsmäßig nahezu unveränderter Geschwindigkeit nach links bewegt.

Teilaufgabe 5b (5 BE)

Ermitteln Sie, für welche Werte von m sich Kugel A unmittelbar nach dem Stoß nach rechts bewegt.

Berechnen Sie, für welchen Wert von m sich die Kugel A unmittelbar nach dem Stoß mit $0,9 \frac{m}{s}$ nach links bewegt.

Lösung zu Teilaufgabe 5b**Anwendungsaufgabe****Wichtiger Hinweis**

Das Verständnis des physikalischen Zusammenhangs ist für die Lösung dieser

Aufgabe nicht notwendig!

m_B
(Masse der Kugel B in kg)

$v(m_B) = \frac{1 - m_B}{1 + m_B}$
(Geschwindigkeit der Kugel A vor dem Zusammenstoß)

- 1.Fall: Kugel A bewegt sich nach rechts

Masse m_B bestimmen:

Erläuterung:

Wenn die Kugel A sich nach dem Zusammenstoß nach rechts bewegt, dann hat sie eine positive Geschwindigkeit ($v > 0$)

$$v(m_B) > 0 \iff \frac{1 - m_B}{1 + m_B} > 0$$

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches*

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$)

Da die Masse der Kugel B nicht negativ sein kann, ist der Nenner $1 + m_B$ für alle Werte von m_B positiv.

Man untersucht deshalb nur das Vorzeichen des Zählers $1 - m_B$

$$1 - m_B > 0$$

$$\Rightarrow m_B < 1$$

$\Rightarrow$ Die Kugel A bewegt sich nach rechts, wenn die Kugel B weniger als 1 kg wiegt.

- 2.Fall: Kugel A bewegt sich nach links mit der Geschwindigkeit $0,9 \frac{m}{s}$

Masse m_B bestimmen:

Erläuterung:

Wenn die Kugel A sich nach dem Zusammenstoß nach links bewegt, dann hat sie eine negative Geschwindigkeit ($v = -0,9 \frac{m}{s}$)

$$\frac{1 - m_B}{1 + m_B} = -0,9 \quad | \cdot (1 + m_B)$$

$$1 - m_B = -0,9 - 0,9 \cdot m_B \quad | + 0,9 + m_B$$

$$1,9 = 0,1 \cdot m_B \quad | \cdot 10$$

$$19 = m_B$$

$\Rightarrow$ Die Kugel A bewegt sich nach links mit $0,9 \frac{m}{s}$, wenn die Kugel B 19 kg wiegt.