# Abitur 2010 Mathematik GK Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto 1 - \dfrac{2k}{e^x + k}$ mit dem maximalen Definitionsbereich $D_k$. Der Graph von $f_k$ wird mit $G_k$ bezeichnet.

**Teilaufgabe 1a** (5 BE)

Geben Sie den Definitionsbereich $D_k$ an. Bestimmen Sie das Verhalten von $f_k$ für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von $G_k$ an.

**Teilaufgabe 1b** (4 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $G_k$.

[zur Kontrolle: $f_k'(x) = \dfrac{2k\,e^x}{(e^x + k)^2}$]

**Teilaufgabe 1c** (4 BE)

Zeigen Sie, dass $G_k$ die $x$-Achse nur im Punkt $S_k(\ln k|0)$ schneidet.
Die Tangente an $G_k$ im Punkt $S_k$ wird mit $t_k$ bezeichnet. Begründen Sie, dass alle Tangenten $t_k$ parallel zueinander sind.

**Teilaufgabe 1d** (4 BE)

Zeigen Sie, dass sich die Graphen $G_1$ und $G_8$ nicht schneiden.

**Teilaufgabe 1e** (6 BE)

Berechnen Sie $f_1(-1)$, $f_1(1)$, $f_8(3)$. Zeichnen Sie die Graphen $G_1$ und $G_8$, deren Asymptoten sowie die Tangenten $t_1$ und $t_8$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

**Teilaufgabe 1f** (3 BE)

Begründen Sie, dass durch jeden Punkt der $x$-Achse ein Graph $G_k$ verläuft.

**Teilaufgabe 1g** (5 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $F_k : x \mapsto 2 \cdot \ln\,(e^x + k) - x$ mit $x \in D_k$ eine Stammfunktion von $f_k$ ist.

**Teilaufgabe 1h** (5 BE)

$G_8$ und die Koordinatenachsen begrenzen im IV. Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt.





**Teilaufgabe 2** (4 BE)

Lässt man für den Parameter $k$ auch negative Werte zu, so unterscheiden sich die Graphen $G_k$ mit $k \in \mathbb{R}^-$ von den Graphen $G_k$ mit $k \in \mathbb{R}^+$. Geben Sie zwei grundsätzliche Unterschiede an und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

## Lösung

### Teilaufgabe 1a (5 BE)

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto 1 - \dfrac{2k}{e^x + k}$ mit dem maximalen Definitionsbereich $D_k$. Der Graph von $f_k$ wird mit $G_k$ bezeichnet.

Geben Sie den Definitionsbereich $D_k$ an. Bestimmen Sie das Verhalten von $f_k$ für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von $G_k$ an.

### Lösung zu Teilaufgabe 1a

***Definitionsbereich bestimmen***

$$f_k(x) = 1 - \frac{2k}{e^x + k}, \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

Nullstellen des Nenners bestimmen:

$$e^x + k = 0$$

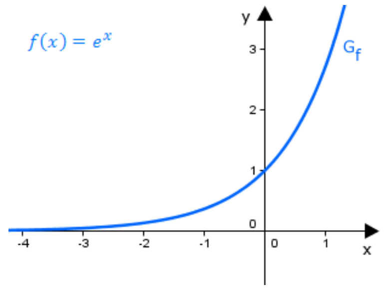
$$\underbrace{e^x}_{>0} = \underbrace{-k}_{<0}$$





Erläuterung: *Wertemenge der Exponentialfunktion*

Die Exponentialfunktion $e^x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stets positiv.




Da $k \in \mathbb{R}^+$ eine positive Zahl ist, ist $-k$ eine negative Zahl.
Somit hat die Gleichung $e^x = -k$ keine Lösung.

Der Nenner von $f_k(x)$ hat keine Nullstellen

$\Rightarrow$ Nenner hat keine Nullstellen

$\Rightarrow D_k = \mathbb{R}$

***Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs***

Grenzwert gegen $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{2k}{\underbrace{e^x}_{\to 0} + k} = 1 - \frac{2k}{k} = 1 - 2 = -1$$

Grenzwert gegen $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{2k}{\underbrace{e^x + k}_{\to +\infty}} = 1 - 0 = 1$$

***Asymptoten bestimmen***

Asymptoten:

Erläuterung: *Asymptoten*

Aus den zuvor berechneten Grenzwerten, folgt:

$y = -1$ ist waagerechte Asymptote, da $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$y = 1$ ist waagerechte Asymptote, da $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$y = -1$ und $y = 1$ (waagerechte Asymptoten)

**Teilaufgabe 1b** (4 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $G_k$.

[zur Kontrolle: $f_k'(x) = \dfrac{2k\,e^x}{(e^x + k)^2}$]

Lösung zu Teilaufgabe 1b

***Monotonieverhalten einer Funktion***

$$f_k(x) = 1 - \frac{2k}{e^x + k}\,, \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

Erste Ableitung bilden:

$$f'(x) = \left(1 - \frac{2k}{e^x + k}\right)'$$

Erläuterung: *Ableitung einer Summe*

$$f(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

Hier ist $u(x) = 1$ *und* $v(x) = \frac{2k}{e^x+k}$ .
Dann ist $u'(x) = 0$ *und* $v'(x) = \left(\frac{2k}{e^x+k}\right)'$

$$= 0 - \left(\frac{2k}{e^x + k}\right)'$$





Erläuterung: *Quotientenregel der Differenzialrechnung*

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Hier ist $u(x) = 2k$ *und* $v(x) = e^x + k$ .
Dann ist $u'(x) = 0$ *und* $v'(x) = e^x$

Erinnerung: die Ableitung der Exponentialfunktion $e^x$ ist gleich der Funktion selbst.

$$= -\frac{0 \cdot (e^x + k) - 2k \cdot e^x}{(e^x + k)^2}$$

$$= \frac{2k\,e^x}{(e^x + k)^2}$$

Vorzeichen der ersten Ableitung bestimmen:

Ansatz: $f'(x) > 0 \iff \dfrac{2k\,e^x}{(e^x + k)^2} > 0$

Erläuterung: *Vorzeichen eines Bruches, Wertemenge der Exponentialfunktion*

Die erste Ableitung ist ein Bruch.

Ein Bruch ist positiv wenn Zähler und Nenner entweder beide positiv oder beide negativ sind (z.B. $\frac{3}{5} > 0$ oder $\frac{-3}{-5} > 0$).

Ein Bruch ist negativ wenn Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben (z.B. $\frac{-3}{5} < 0$ oder $\frac{3}{-5} < 0$)

In diesem Fall ist:

der Zähler $2k\,e^x$ positiv für alle $x \in \mathbb{R}$ da $k \in \mathbb{R}^+$ eine positive Zahl ist und die Exponentialfunktion $e^x > 0$ stets positiv ist;

der Nenner $(e^x + k)^2$ positiv für alle $x \in \mathbb{R}$ da er eine "quadratische "Funktion ist;

Die erste Ableitung ist somit positiv für alle $x \in \mathbb{R}$

$2\underbrace{k}_{>0}\underbrace{e^x}_{>0} > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ positives Vorzeichen des Zählers

$(e^x + k)^2 > 0$ für $x \in D_k$ $\Rightarrow$ positives Vorzeichen des Nenners

$\Rightarrow f'(x) > 0$ für $x \in D_k$ $\Rightarrow$ Ableitung für alle $x$ positiv.

Erläuterung: *Monotonieverhalten einer Funktion*

Für stetige Funktionen besteht eine Beziehung zwischen Monotonie und Ableitung, da die Ableitung die Steigung der Funktion angibt.

Es gilt:

$f'(x) > 0$ : Die Funktion steigt in diesem Bereich streng monoton.

$f'(x) < 0$ : Die Funktion fällt in diesem Bereich streng monoton.

Da $f'(x) > 0$ für alle $x \in D_k$, gilt:

$\Rightarrow G_k$ ist streng monoton steigend auf ganz $D_k$.





## Teilaufgabe 1c (4 BE)

Zeigen Sie, dass $G_k$ die $x$-Achse nur im Punkt $S_k(\ln k|0)$ schneidet.
Die Tangente an $G_k$ im Punkt $S_k$ wird mit $t_k$ bezeichnet. Begründen Sie, dass alle Tangenten $t_k$ parallel zueinander sind.

## Lösung zu Teilaufgabe 1c

***Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen***

$f_k(x) = 1 - \frac{2k}{e^x + k}, \quad k \in \mathbb{R}^+$

Schnittpunkt mit der $x$-Achse:

Erläuterung: *Nullstellen*

Der Ansatz um die Nullstellen (die Schnittpunkte einer Funktion mit der $x$-Achse) zu bestimmen, lautet stets:

$f(x) = 0$

Die Gleichung muss anschließend nach $x$ aufgelöst werden.

$f_k(x) = 0 \iff 1 - \frac{2k}{e^x + k} = 0$

$1 = \frac{2k}{e^x + k} \mid \cdot (e^x + k)$

$e^x + k = 2k \mid -k$

$e^x = k \mid$ logarithmieren

$\ln e^x = \ln k$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Der Logarithmus wird auf beiden Seiten der Gleichung $e^x = k$ angewendet.

$\ln e^x = \ln k$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt:

$\ln e^{f(x)} = f(x)$ für beliebige Funktion $f(x)$

Somit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$x = \ln k$

Erinnerung: Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert!
(in diesem Fall ist $k > 0$, in allen anderen Fällen muss man ggfs. die Variable oder den Parameter im Logarithmus einschränken auf nur positive Werte)

$x = \ln k$

$\Rightarrow S_k(\ln k|0)$ einziger Schnittpunkt von $G_k$ mit der $x$-Achse, da $f(\ln k) = 1 - \dfrac{2k}{e^{\ln k} + k} = 1 - 1 = 0$ und $G_k$ streng monoton steigend (siehe Teilaufgabe 1b)

***Funktionenschar***

$f_k'(x) = \dfrac{2k\, e^x}{(e^x + k)^2}$ (siehe Teilaufgabe 1b)

Erläuterung: *Lineare Funktion*

Zwei (oder mehrere) Geraden sind parallel, wenn sie die gleiche Steigung $m$ haben.

Beispiel:

$y = 2x$ und $y = 2x + 1$ sind parallel (Steigung $m = 2$)

Zu zeigen: Steigung $m_k$ der Tangente $t_k$ im Punkt $S_k$ ist gleich für alle $k$





Erläuterung: *Tangentensteigung*

Die Steigung $m$ der Tangente $t$ an dem Graphen $G_f$ einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $S(x_S|y_S)$ ist gleich dem Wert der ersten Ableitung der Funktion an der Stelle $x_S$.

$m = f'(x_S)$

$$m_k = f_k'(x_{S_k}) = f_k'(\ln k) = \frac{2k\, e^{\ln k}}{(e^{\ln k} + k)^2} = \frac{2k \cdot k}{(k + k)^2} = \frac{2k^2}{4k^2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Alle Tangenten $t_k$ sind parallel zueinander, da sie alle dieselbe Steigung $m_k = \dfrac{1}{2}$ für alle $k \in \mathbb{R}^+$ haben.

**Teilaufgabe 1d** (4 BE)

Zeigen Sie, dass sich die Graphen $G_1$ und $G_8$ nicht schneiden.

**Lösung zu Teilaufgabe 1d**

***Schnittpunkt zweier Funktionen***

$$f_k(x) = 1 - \frac{2k}{e^x + k}\,, \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

$$f_1(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

$$f_8(x) = 1 - \frac{16}{e^x + 8}$$

$G_1$ mit $G_8$ schneiden:

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar $(x, y)$, einen gemeinsamen Punkt, besitzen.

Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach $x$ auf.

$$f_1(x) = f_8(x) \iff 1 - \frac{2}{e^x + 1} = 1 - \frac{16}{e^x + 8}$$

$1-\dfrac{2}{e^x+1}=1-\dfrac{16}{e^x+8} \;|-1$

$-\dfrac{2}{e^x+1}=-\dfrac{16}{e^x+8} \;|\cdot[-(e^x+8)]$

$\dfrac{2e^x+16}{e^x+1}=16 \;|\cdot(e^x+1)$

$2e^x+16=16e^x+16 \;|-2e^x-16$

$0=14e^x$

$\Rightarrow$ Keine Lösung, da $e^x>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow G_1$ und $G_8$ schneiden sich in keinem Punkt

**Teilaufgabe 1e** (6 BE)

Berechnen Sie $f_1(-1)$, $f_1(1)$, $f_8(3)$. Zeichnen Sie die Graphen $G_1$ und $G_8$, deren Asymptoten sowie die Tangenten $t_1$ und $t_8$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

**Lösung zu Teilaufgabe 1e**

***Funktionswert berechnen***

$f_k(x)=1-\dfrac{2k}{e^x+k}\,,\qquad k\in\mathbb{R}^+$

$f_1(x)=1-\dfrac{2}{e^x+1}$

$f_8(x)=1-\dfrac{16}{e^x+8}$

$f_1(-1)=1-\dfrac{2}{e^{-1}+1}\approx -0,46$

$f_1(1)=1-\dfrac{2}{e^1+1}\approx 0,46$

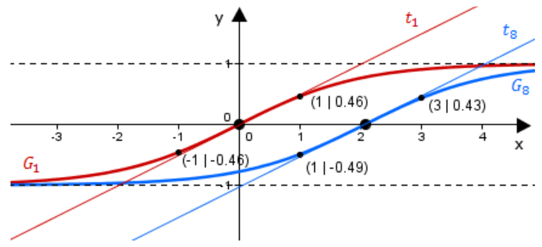
$f_8(1)=1-\dfrac{16}{e^1+8}\approx -0,49$

$f_8(3)=1-\dfrac{16}{e^3+8}\approx 0,43$

***Skizze***








**Teilaufgabe 1f** (3 BE)

Begründen Sie, dass durch jeden Punkt der $x$-Achse ein Graph $G_k$ verläuft.

**Lösung zu Teilaufgabe 1f**

***Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen***

$f_k(x)=1-\dfrac{2k}{e^x+k}\,,\qquad k\in\mathbb{R}^+$

Aus Teilaufgabe 1c) ist der Schnittpunkt mit der $x$-Achse gegeben durch $S_k(\ln k|0)$

$\Rightarrow$ Durch jeden Punkt auf der $x$-Achse verläuft ein Graph $G_k$, da $\ln k$ alle Werte aus $\mathbb{R}$ annimmt für $k\in\mathbb{R}^+$

**Teilaufgabe 1g** (5 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $F_k : x \mapsto 2\cdot\ln\,(e^x+k)-x$ mit $x\in D_k$ eine Stammfunktion von $f_k$ ist.

**Lösung zu Teilaufgabe 1g**

***Nachweis einer Stammfunktion***

$f_k(x)=1-\dfrac{2k}{e^x+k}\,,\qquad k\in\mathbb{R}^+$

$F_k(x)=2\cdot\ln\,(e^x+k)-x\,,\quad x\in D_k$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, dann gilt: $F' = f$

Zu zeigen: $F_k'(x) = f_k(x)$

Erste Ableitung $F_k'(x)$ bestimmen:

$F_k'(x) = [2 \cdot \ln\,(e^x + k) - x]'$

Erläuterung: *Ableitung einer Summe, Ableitung eines Produktes*

$f(x) = a \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot u'(x)$

$f(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

Hier ist $a \cdot u(x) = 2 \cdot \ln\,(e^x + k)$ *und* $v(x) = x$ .
Dann ist $u'(x) = [\ln\,(e^x + k)]'$ *und* $v'(x) = 1$

$= 2 \cdot [\ln\,(e^x + k)]' - 1$

Erläuterung: *Kettenregel der Differenzialrechnung*

Kettenregel:

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Formel für Logarithmusfunktionen:

$f(x) = \ln(v(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$

Hier ist $v(x) = e^x + k$.
Dann ist $v'(x) = e^x$.

Erinnerung: die Ableitung der Exponentialfunktion $e^x$ ist gleich die Funktion selbst.

$= 2 \cdot \left[\dfrac{1}{e^x + k} \cdot e^x\right] - 1$

$= \dfrac{2e^x}{e^x + k} - 1$ | Terme zusammenfassen





$= \dfrac{2e^x - (e^x + k)}{e^x + k}$

$= \dfrac{e^x - k}{e^x + k}$ | $-k$ im Zähler schreiben als $k - 2k$

$= \dfrac{e^x + k - 2k}{e^x + k}$ | Bruch aufteilen

$= \dfrac{e^x + k}{e^x + k} - \dfrac{2k}{e^x + k}$

$= 1 - \dfrac{2k}{e^x + k}$

$= f_k(x)$

$\Rightarrow F_k'(x) = f_k(x)$

Erläuterung: *Stammfunktion*

Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, dann gilt: $F' = f$

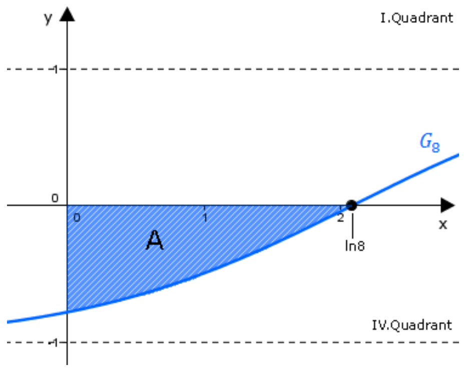
$\Rightarrow F_k(x)$ ist eine Stammfunktion von $f_k$

**Teilaufgabe 1h** (5 BE)

$G_8$ und die Koordinatenachsen begrenzen im IV. Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt.

**Lösung zu Teilaufgabe 1h**

***Flächenberechnung***




$f_8(x) = 1 - \dfrac{16}{e^x + 8}$

$F_8(x) = 2 \cdot \ln\,(e^x + 8) - x$
(Stammfunktion von $f_8$, siehe Teilaufgabe 1g)

Fläche $A$ die $G_8$ und die Koordinatenachsen im IV.Quadranten einschließt:

> Erläuterung: *Bestimmtes Integral*
>
> Die Fläche die der Graph $G_8$ und die Koordinatenachsen im IV.Quadranten einschließt, ist gegeben durch das bestimmte Integral:
>
> $A = -\displaystyle\int_0^{\ln 8} f_8(x)d\,x$
>
> Da die Fläche unterhalb der $x$-Achse liegt, muss ein Minuszeichen vor dem Integral gesetzt werden.
>
> Die obere Grenze $\ln 8$ des Integrals, ist die Stelle an der der Graph $G_8$ die $x$-Achse schneidet. Dieser Wert wurde in Teilaufgabe 1c) berechnet ($k = 8$ in $S_k$ einsetzen).

$A = -\displaystyle\int_0^{\ln 8} f_8(x)d\,x$





> Erläuterung: *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*
>
> Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, dann ist $F' = f$ und es gilt:
>
> $\displaystyle\int_a^b f(x)d\,x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$= -[F_8(x)]_0^{\ln 8}$

$= -[2 \cdot \ln\,(e^x + 8) - x]_0^{\ln 8}$

$= -\left[\left(2 \cdot \ln(\underbrace{e^{\ln 8}}_{=8} + 8) - \ln 8\right) - \left(2 \cdot \ln(\underbrace{e^0}_{=1} + 8) - 0\right)\right]$

$= -2 \cdot \ln 16 + \ln 8 + 2 \cdot \ln 9$

$= -2 \cdot \ln 2^4 + \ln 2^3 + 2 \cdot \ln 3^2$

> Erläuterung: *Logarithmus einer Potenz*
>
> $\ln\,(s^t) = t \cdot \ln s$

$= -8 \cdot \ln 2 + 3 \ln 2 + 4 \cdot \ln 3$

$= -5 \ln 2 + 4 \ln 3$

$\approx 0,93$ FE (Flächeneinheiten)

$\Rightarrow$ Die gesuchte Fläche hat den Inhalt $0,93$ FE

**Teilaufgabe 2** (4 BE)

Lässt man für den Parameter $k$ auch negative Werte zu, so unterscheiden sich die Graphen $G_k$ mit $k \in \mathbb{R}^-$ von den Graphen $G_k$ mit $k \in \mathbb{R}^+$. Geben Sie zwei grundsätzliche Unterschiede an und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

**Lösung zu Teilaufgabe 2**

***Eigenschaften einer Funktion***

Unterschiede zwischen $G_k$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und $G_k$ mit $k \in \mathbb{R}^-$ :

1. Für $k \in \mathbb{R}^-$ schneidet der Graph $G_k$ die $x$-Achse nicht mehr im Punkt $S_k(\ln(k)|0)$, da $\ln k$ nicht existiert ($k$ ist eine negative Zahl und der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert). Die Funktion $f_k$ hat an der Stelle $ln(-k)$ eine Definitionslücke.

2. Für $k \in \mathbb{R}^-$ ist der Graph $G_k$ nicht mehr streng monoton steigend, da $f_k'(x) < 0$ für alle $x \in D_k = ]-\infty; \ln(-k)[\cup]\ln(-k); +\infty[$