Abitur 2010 Mathematik GK Geometrie VI

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $A(7|5|1)$, $B(2|-5|6)$ und die Gerade $g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

Teilaufgabe 1a (2 BE)

Zeigen Sie, dass der Punkt B nicht auf der Geraden g liegt.

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Die Ebene E enthält den Punkt B und die Gerade g. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene E?
[mögliches Ergebnis: $2x_1 - x_2 - 9 = 0$]

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Der Punkt C ist Fußpunkt des Lotes vom Punkt B auf die Gerade g. Berechnen Sie die Koordinaten von C.
[Ergebnis: $C(2|-5|1)$]

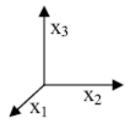
Teilaufgabe 1d (4 BE)

M ist der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$. K ist die Kugel mit Mittelpunkt M und Radius $\frac{1}{2}\overline{AB}$. Begründen Sie, dass die Gerade g die Kugel K in den Punkten A und C schneidet.

Durch Verschiebung der Punkte A, B und C um den Vektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ entstehen die Punkte A', B' und C'. Verbindet man die entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke ABC und $A'B'C'$, so entsteht das Prisma $ABCA'B'C'$

Teilaufgabe 2a (6 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A' und zeichnen Sie das Prisma $ABCA'B'C'$ in ein Koordinatensystem ein. (vgl. Skizze; Platzbedarf: ganze Seite; Ursprung in Blattmitte)
[Ergebnis: $A'(3|7|1)$]



Teilaufgabe 2b (7 BE)

Zeigen Sie, dass der Verschiebungsvektor AA' zur Grundfläche ABC senkrecht steht, und bestimmen Sie das Volumen des Prismas.

Teilaufgabe 2c (6 BE)

Das Rechteck $AA'B'B$ ist eine Seitenfläche des Prismas. Die Diagonalen des Rechtecks schneiden sich im Punkt N. Begründen Sie, dass alle Ecken des Prismas auf einer Kugel um N liegen.

Teilaufgabe 2d (4 BE)

Geben Sie zwei Punkte an, die zusammen mit C eine Ebene festlegen, die das Prisma in zwei volumengleiche Teile teilt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

Teilaufgabe 1a (2 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $A(7|5|1)$, $B(2|-5|6)$ und die Gerade $g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

Zeigen Sie, dass der Punkt B nicht auf der Geraden g liegt.

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Lagebeziehung Punkt - Gerade

$A(7|5|1)$

$B(2|-5|6)$

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so erfüllen die Punktkoordinaten die Geradengleichung.

Hier wird der Punkt B in die Geradengleichung von g eingesetzt.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 2 &= 7 + \lambda \\ -5 &= 5 + 2\lambda \\ 6 &= 1 \end{aligned} \quad \text{Widerspruch!}$$

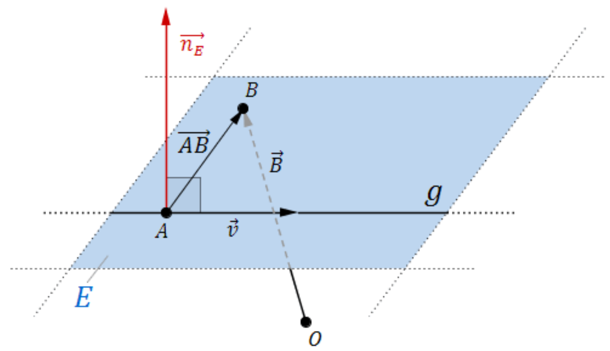
$\Rightarrow$ Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden g

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Die Ebene E enthält den Punkt B und die Gerade g. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene E?
[mögliches Ergebnis: $2x_1 - x_2 - 9 = 0$]

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Ebene aus Punkt und Gerade



$A(7|5|1)$

$B(2|-5|6)$

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ Ortsvektor (des Aufpunkts) der Ebene E

$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor der Geraden g ist ein Richtungsvektor der Ebene E

Zweiter Richtungsvektor der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Richtungsvektor*

Man wählt einen Punkt auf der Geraden g, z.B. A, und verbindet diesen mit dem Punkt B, den die Ebene E enthalten soll.

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist dann ein Richtungsvektor der Ebene E.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{(Verbindungsvektor von } A \text{ und } B\text{)}$$

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E aus den beiden Richtungsvektoren bestimmen:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Kreuzprodukt zweier Vektoren*

Das Kreuzprodukt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 0 \cdot (-10) \\ 0 \cdot (-5) - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-10) - 2 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor vereinfachen:

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor und/oder Normierung sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 5 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich

$$\overrightarrow{n_E} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenform E^N der Ebene E:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{n_E} = 0$$

Hier (B ist Aufpunkt):

$$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Kann auch geschrieben werden:

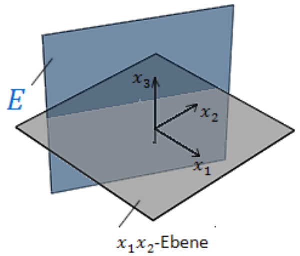
$$\overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E^N : \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E^N : 2x_1 - x_2 = 9$$

$$E^N : 2x_1 - x_2 - 9 = 0$$

Lagebeziehung Gerade und Ebene



Die Ebene E ist parallel zur x_3-Achse, da der Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene senkrecht zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der x_3-Achse steht.

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, ist gleich 0.

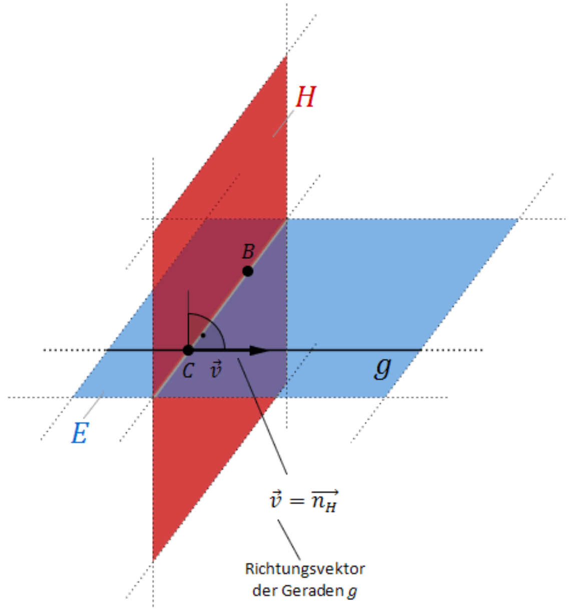
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Der Punkt C ist Fußpunkt des Lotes vom Punkt B auf die Gerade g. Berechnen Sie die Koordinaten von C.
[Ergebnis: $C(2|-5|1)$]

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Lotfußpunkt auf eine Gerade



$B(2|-5|6)$

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist Richtungsvektor der Geraden } g$$

Erläuterung: *Hilfsebene*

Um den Punkt C des Lotes von B auf g zu bestimmen, bildet man zuerst eine Hilfsebene, die durch B geht und senkrecht zu g steht. Diese Ebene scheidet somit die Gerade g im Lotfußpunkt C.

Hilfsebene H durch B senkrecht zu g aufstellen:

Erläuterung: *Ebenengleichung*

Eine Ebene H ist durch einen Punkt P und einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_H}$ eindeutig bestimmt. Die Ebenengleichung (in Normalenform) lautet:

$H^N: \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{n_H} = 0$

Hier ist der Normalenvektor gleich dem Richtungsvektor der Geraden g, da die Ebene senkrecht zu ihr stehen soll:

$\overrightarrow{n_H} = \overrightarrow{v}$

$$H^N: \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$H^N: x_1 + 2x_2 + 8 = 0$

Hilfsebene H mit Gerade g schneiden: $H \cap g$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene H^N in einem Punkt C, dann erfüllt die Geradengleichung für einen bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene H^N.

Man setzt g in H^N ein und löst nach λ auf.

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{r} x_1 = 7 + \lambda \\ x_2 = 5 + 2\lambda \\ x_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 = 7 + \lambda \\ x_2 = 5 + 2\lambda \\ x_3 = 1 \end{array} \quad \text{in} \quad H^N: x_1 + 2x_2 + 8 = 0 \quad \text{einsetzen:}$$

$7 + \lambda + 2 \cdot (5 + 2\lambda) + 8 = 0$

$7 + \lambda + 10 + 4\lambda + 8 = 0$

$5\lambda + 25 = 0$

$\lambda = -5$

$\lambda = -5$ in die Geradengleichung einsetzen:

$$\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten $C(2|-5|1)$

Alternative Lösung

Lotfußpunkt über die Lotfußpunktsformel bestimmen:

Erläuterung: *Lotfußpunktsformel*

Formel für die Bestimmung des Lotfußpunktes C eines Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g:

$\left[\overrightarrow{g} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{v}$

„Gerade g minus Punkt P mal Richtungsvektor v der Geraden g ist gleich Null“

Hier ist P der Punkt B.

$$\left[\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

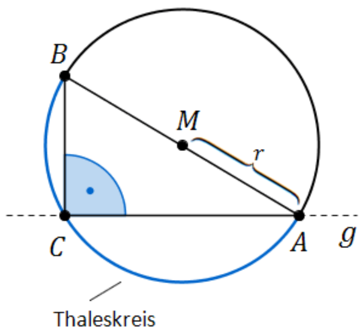
Skalarmultiplikation ausführen, nach λ auflösen und das gefunden λ in die Geradengleichung einsetzen, um den Lotfußpunkt zu berechnen.

Teilaufgabe 1d (4 BE)

M ist der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$. K ist die Kugel mit Mittelpunkt M und Radius $\frac{1}{2}\overline{AB}$. Begründen Sie, dass die Gerade g die Kugel K in den Punkten A und C schneidet.

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Lagebeziehung Punkt und Kugel



Begründung:

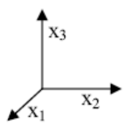
$r = \overline{MB} = \overline{MA}$, da M Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ und der Kugel K.

C ist Fußpunkt des Lotes vom Punkt B auf die Gerade g (siehe Teilaufgabe 1c).
$\Rightarrow$ $\overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{CA}$ bilden einen rechten Winkel
$\Rightarrow$ C liegt auf dem Thaleskreis

Teilaufgabe 2a (6 BE)

Durch Verschiebung der Punkte A, B und C um den Vektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ entstehen die Punkte A', B' und C'. Verbindet man die entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke ABC und $A'B'C'$, so entsteht das Prisma $ABCA'B'C'$

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A' und zeichnen Sie das Prisma $ABCA'B'C'$ in ein Koordinatensystem ein. (vgl. Skizze; Platzbedarf: ganze Seite; Ursprung in Blattmitte) [Ergebnis: $A'(3|7|1)$]



Lösung zu Teilaufgabe 2a

Verschiebung um einen Vektor

$A(7|5|1)$

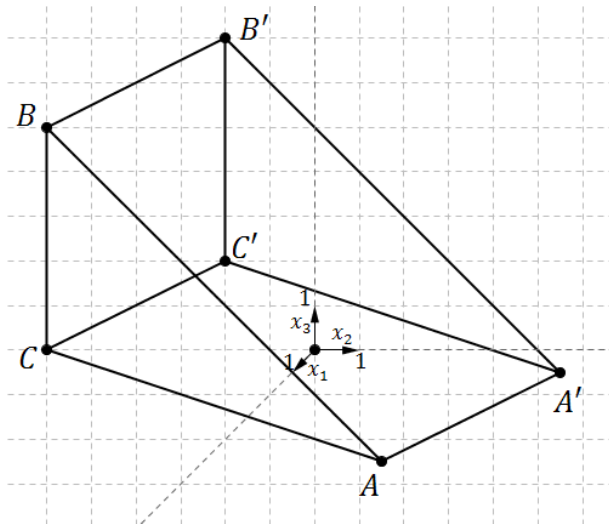
$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Verschiebungsvektor

Punkt A' bestimmen:

$$\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A'(3|7|1)$

Skizze

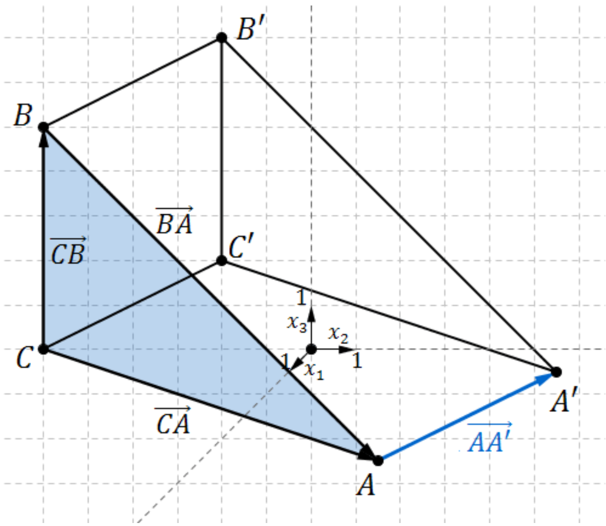


Teilaufgabe 2b (7 BE)

Zeigen Sie, dass der Verschiebungsvektor $A\,A'$ zur Grundfläche $A\,B\,C$ senkrecht steht, und bestimmen Sie das Volumen des Prismas.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

Lagebeziehung von Vektoren



$A(7|5|1),\ A'(3|7|1),\ B(2|-5|6),\ C(2|-5|1)$

$$\overrightarrow{A\,A'} = \overrightarrow{A'} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{C\,A} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B\,A} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt bilden:

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\overrightarrow{C\,A} \circ \overrightarrow{A\,A'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -20 + 20 + 0 = 0$$

$$\overrightarrow{B\,A} \circ \overrightarrow{A\,A'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -20 + 20 + 0 = 0$$

Erläuterung: *Lagebeziehung zwischen Vektoren*

Die Vektoren $\overrightarrow{C\,A}$ und $\overrightarrow{B\,A}$ spannen die Ebene $A\,B\,C$ auf.
Da der Vektor $\overrightarrow{A\,A'}$ senkrecht zu beiden Vektoren steht, steht er auch senkrecht zur Grundfläche $A\,B\,C$.

$\Rightarrow$ Der Verschiebungsvektor $\overrightarrow{A\,A'}$ steht senkrecht zur Grundfläche $A\,B\,C$

Alternative Lösung

Gleichung der Ebene aus den Punkten A, B und C aufstellen (bzw. begründen, dass die Ebene, die die 3 Punkte aufspannen, die Ebene E ist aus Teilaufgabe 1b).
Normalenvektor der Ebene mit Vektor $\overrightarrow{A\,A'}$ vergleichen.

Volumen eines Prismas

Länge der Vektoren $\overrightarrow{C\,A}$, $\overrightarrow{C\,B}$ und $\overrightarrow{A\,A'}$ bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{5^2+10^2+0^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{0^2+0^2+5^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left|\overrightarrow{AA'}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{(-4)^2+2^2+0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Volumen bestimmen:

> Erläuterung: *Volumen eines Prismas*
>
> Für das Volumen eines Prismas gilt: „V = Grundfläche G mal Höhe h“
>
> Die Grundfläche G besteht in diesem Fall aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC und die Höhe h ist gleich der Länge der Strecke $[AA]'$

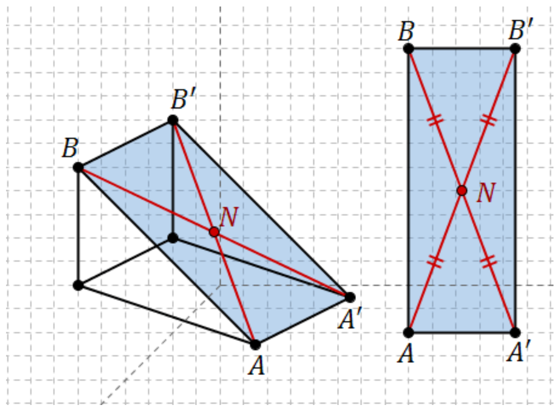
$$V = G \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}2\sqrt{5} = 125$$

Teilaufgabe 2c (6 BE)

Das Rechteck $AA'B'B$ ist eine Seitenfläche des Prismas. Die Diagonalen des Rechtecks schneiden sich im Punkt N. Begründen Sie, dass alle Ecken des Prismas auf einer Kugel um N liegen.

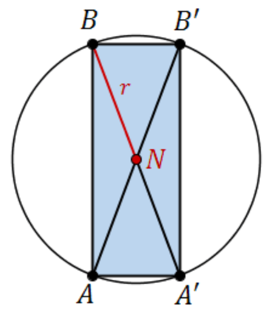
Lösung zu Teilaufgabe 2c

Lagebeziehung Punkt und Kugel

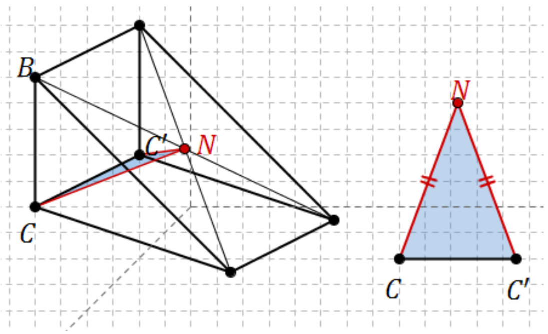


Begründung für die Punkte A, A', B und B':

Die Seitenfläche $AA'BB'$ ist ein Rechteck. Die Diagonalen schneiden sich im Punkt N und halbieren sich somit. D.h. die Strecken $[NA]$, $[NA']$, $[NB]$ und $[NB']$ sind gleich lang.



Die Punkte A, A', B und B' liegen also auf einem Kreis um N mit einem Radius der Länge $[NB]$, also auch auf einer Kugel um N mit einem Radius der Länge $[NB]$.



Begründung für die Punkte C und C' (durch Rechnung):

Mittelpunkt N bestimmen:

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{2} \cdot \left[\overrightarrow{A'} + \overrightarrow{B}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad N\left(\frac{5}{2}|1|\frac{7}{2}\right)$$

Erläuterung: *Lösungsweg*

Man zeigt durch Rechnung, dass die Vektoren $\overrightarrow{NB}$ und $\overrightarrow{NC}$ gleiche Länge haben, also $\left|\overrightarrow{NB}\right| = \left|\overrightarrow{NC}\right|$

Da aus Symmetriegründen die Strecken $[NC]$ und $[NC']$ gleich lang sind, ist gezeigt, dass der Abstand aller Eckpunkte des Prismas zum Punkt N gleich ist.

Vektoren $\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{NC}$ und ihre Länge bestimmen:

$$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -6 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -6 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{NB}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -6 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-6)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{170}$$

$$\left|\overrightarrow{NC}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -6 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-6)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{170}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{NB}\right| = \left|\overrightarrow{NC}\right|$$

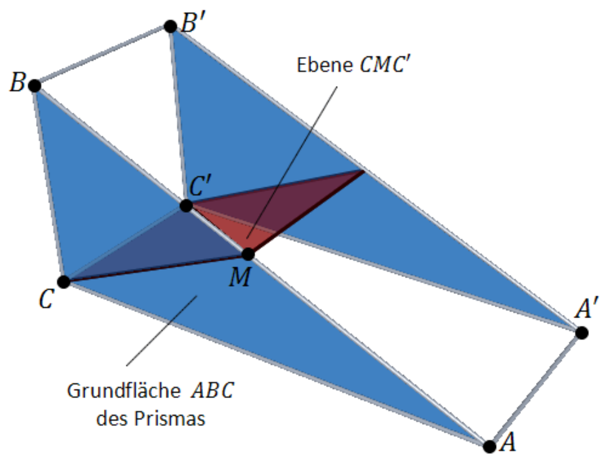
$\Rightarrow$ C und C' liegen auf derselben Kugel um N, auf der auch die anderen Eckpunkte des Prismas liegen

Teilaufgabe 2d (4 BE)

Geben Sie zwei Punkte an, die zusammen mit C eine Ebene festlegen, die das Prisma in zwei volumengleiche Teile teilt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Teilaufgabe 2d

Volumen eines Prismas



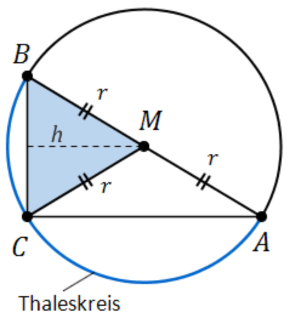
Die Punkte C, C' und M (Mittelpunkt der Strecke $[AB]$, siehe Teilaufgabe 1d) bilden eine Ebene, die das Prisma in zwei volumengleiche Teile teilt.

Begründung:

Erläuterung: *Volumen eines Körpers*

Wenn die Grundfläche G des Prismas in zwei inhaltsgleiche Flächen geteilt wird und die Höhe h der zwei Teilkörper die gleiche ist, dann haben diese auch dasselbe Volumen $V = \frac{G}{2} \cdot h$.

Die Grundfläche ABC des Prismas wird durch die Ebene CMC' bzw. durch die Strecke $[CM]$ in zwei inhaltsgleiche Dreiecke CMB und CAM geteilt.

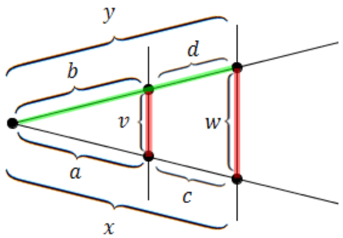


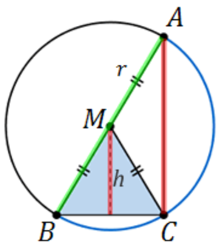
Für die Fläche der verschiedenen Dreiecke gilt:

$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CB} \cdot \overline{CA}$

$A_{CMB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CB} \cdot h$ (h Höhe des Dreiecks CMB)

Erläuterung: *Strahlensatz*





Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten folgende Beziehungen (zwischen den Strecken):

1. $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ und $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$
2. $\dfrac{v}{w} = \dfrac{a}{x}$ bzw. $\dfrac{v}{w} = \dfrac{b}{y}$

In diesem Fall (wenn B der Punkt ist aus dem der Strahl kommt) gilt nach 2):

$$\frac{h}{\overline{C\,A}} = \frac{\overline{B\,M}}{\overline{B\,A}}$$

Da sich die Punkte A, B und C auf dem Thaleskreis um M befinden (siehe Teilaufgabe 1d), gilt:

$$\frac{h}{\overline{C\,A}} = \frac{r}{2r}$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot \overline{C\,A}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{C\,B} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{C\,A}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \overline{C\,B} \cdot \overline{C\,A}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot A_{A\,B\,C}$$

$$\Rightarrow \quad A_{C\,A\,M} = A_{C\,M\,B}$$

Alternative Lösung

Die Grundfläche $A\,B\,C$ der Prismas wird durch die Ebene $C\,M\,C$ bzw. durch die Strecke $[C\,M]$ in zwei inhaltsgleiche Dreiecke $C\,M\,B$ und $C\,A\,M$ geteilt.

$\measuredangle B\,M\,C = \mu$; $\measuredangle C\,M\,A = 180° - \mu$

Für die Flächen der beiden Teildreiecke gilt:

$$A_{B\,C\,M} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M\,B} \cdot \overline{M\,C} \cdot \sin(\measuredangle B\,M\,C) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin\mu$$

$$A_{C\,A\,M} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M\,C} \cdot \overline{M\,A} \cdot \sin(\measuredangle C\,M\,A) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin(180° - \mu)$$

Wegen $\sin\mu = \sin(180° - \mu)$ (gilt für $0 \leq \mu \leq 180°$) sind die Flächen der beiden Teildreiecke inhaltsgleich.