Abitur 2010 Mathematik GK Geometrie V

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-3|2|-1), B(-1|-1|-3)$ und $S(3|7|-11)$ sowie die Geraden $g = AB$ und $h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

Teilaufgabe 1a (8 BE)

Zeigen Sie, dass die Geraden g und h echt parallel zueinander sind. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die die Geraden g und h enthält, in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3 = 0$]

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes vom Punkt S auf die Ebene E sowie den Abstand d des Punktes S von der Ebene E.

[Ergebnis: $F = B; d = 12$]

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel des Dreiecks ABS.

Teilaufgabe 1d (5 BE)

Berechnen Sie den Abstand $d(g,h)$ der Geraden g und h.

[Ergebnis: $d(g,h) = 3\sqrt{17}$]

Lässt man das Dreieck ABS um die Achse BS rotieren, so entsteht als Rotationskörper ein Kegel K_1.

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Berechnen Sie das Volumen von K_1.

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Untersuchen Sie, ob die Gerade h mit dem Kegel K_1 gemeinsame Punkte besitzt.

Teilaufgabe 2c (5 BE)

Eine Ebene E', die parallel zur Ebene E liegt, zerlegt den Kegel K_1 in einen Kegel K_2 und einen Kegelstumpf. Die Höhe des Kegelstumpfs beträgt ein Drittel der Höhe des Gesamtkegels K_1. Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens des Kegelstumpfs am Volumen des Kegels K_1.

Teilaufgabe 2d (4 BE)

Gegeben ist ein Punkt P, dessen Abstand von der Ebene E kleiner als 12 ist. Es soll entschieden werden, ob der Punkt P auf der Mantelfläche des Kegels K_1 liegt. Beschreiben Sie hierfür ein mathematisches Vorgehen unter der Annahme, dass die Koordinaten von P bekannt sind.

Lösung

Teilaufgabe 1a (8 BE)

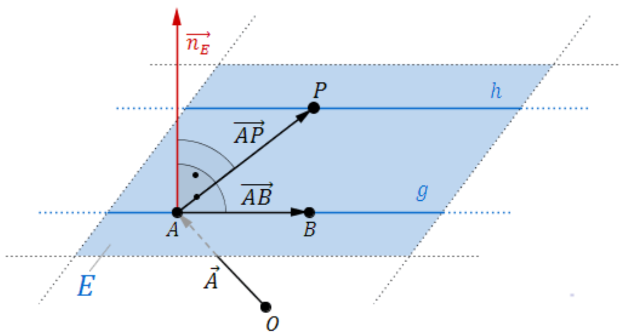
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-3|2|-1), B(-1|-1|-3)$ und $S(3|7|-11)$ sowie die Geraden $g = AB$ und $h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

Zeigen Sie, dass die Geraden g und h echt parallel zueinander sind. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die die Geraden g und h enthält, in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3 = 0$]

Lösung zu Teilaufgabe 1a

Geradengleichung aufstellen



$A(-3|2|-1),\ B(-1|-1|-3)$

$$h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor der Geraden h, $P(7|4|6)$ ist Aufpunkt von h

Richtungsvektor der Geraden g:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Geraden g:

> Erläuterung: *Geradengleichung*
>
> Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:
>
> $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$
>
> Wenn A als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{A}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g.

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung von Geraden

Auf Parallelität überprüfen:
(Sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander?)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Parallelität von zwei Geraden*

Zwei Geraden g und h sind parallel wenn der Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der einen Gerade durch den Richtungsvektor $\overrightarrow{u}$ der anderen Geraden ausgedrückt werden kann (ob also der eine ein Vielfaches vom anderen ist):

$$\overrightarrow{v} = k \cdot \overrightarrow{u} \quad , \; k \in \mathbb{R}$$

In diesem Fall ist $k = -1$.

$\Rightarrow g$ und h sind parallel

$\Rightarrow$ damit sind nur die Lagebeziehungen „identisch“ oder „echt parallel“ möglich

Überprüfen ob gilt: $g \neq h$

Erläuterung: *Echt parallele Geraden*

Zwei Geraden g und h sind echt parallel wenn sie parallel sind und nicht identisch sind, also $g \neq h$.

Man überprüft die echte Parallelität zweier Geraden, indem man einen Punkt der einen Gerade in die Geradengleichung der anderen Gerade einsetzt. Erfüllen die Koordinaten des Punktes die Geradengleichung nicht, so sind die Geraden echt parallel.

Hier wird der Ortsvektor der Geraden g in die Geradengleichung von h eingesetzt

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{r} -10 = -2\lambda \\ -2 = 3\lambda \\ -7 = 2\lambda \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \lambda = 5 \\ \lambda = -\frac{2}{3} \\ \lambda = -\frac{7}{2} \end{array} \Rightarrow \text{Widerspruch!}$$

$\Rightarrow g$ und h sind echt parallel

Ebenengleichung in Normalenform

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Ortsvektor (des Aufpunkts) der Ebene } E$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{Richtungsvektor der Geraden } g \text{ ist ein Richtungsvektor der Ebene } E$$

Zweiter Richtungsvektor der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Richtungsvektor*

Um eine Ebene mithilfe von Richtungsvektoren aufzustellen zu können, werden 2 Richtungsvektoren benötigt, die in unterschiedliche Richtungen zeigen.
Hier zeigen die Richtungsvektoren der Geraden in dieselbe Richtung.

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \text{(Verbindungsvektor von } A \text{ und } P\text{)}$$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E aus den beiden Richtungsvektoren bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot (-7) - (-2) \cdot (-2) \\ (-2) \cdot (-10) - 2 \cdot (-7) \\ 2 \cdot (-2) - (-3) \cdot (-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ -34 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ -34 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor vereinfachen:

> Erläuterung: *Vereinfachen*
>
> Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
> Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.
>
> Hier wird der Normalenvektor durch 17 geteilt.
>
> Das erleichtert das Weiterrechnen <u>wesentlich</u>.

$$\overrightarrow{n_E} = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ -34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Normalenform E^N der Ebene E:

> Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*
>
> Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.
>
> $$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{P}\right] \circ \overrightarrow{n_E} = 0$$
>
> Hier:
>
> $$E^N : \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$
>
> Kann auch geschrieben werden:
>
> $$\overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E^N : \overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$E^N : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3$

$E^N : x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3 = 0$

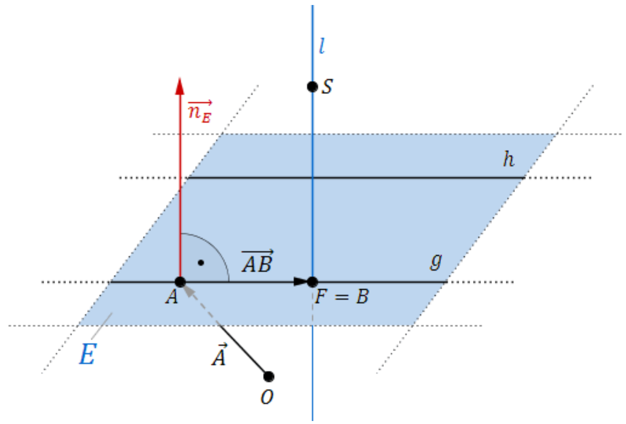
Teilaufgabe 1b (6 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes vom Punkt S auf die Ebene E sowie den Abstand d des Punktes S von der Ebene E.

[Ergebnis: $F = B; d = 12$]

Lösung zu Teilaufgabe 1b

Lotfußpunkt auf eine Ebene



$S(3|7|-11)$

$$E^N : x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{(s. Teilaufgabe 1a)}$$

Gleichung der Lotgeraden aufstellen:

Erläuterung: *Lotgerade auf einer Ebene*

Eine Gerade l ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:

$l: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

Die Lotgerade l geht durch den Punkt S und steht senkrecht zur Ebene E. Der Ortsvektor des Aufpunkts ist somit $\overrightarrow{S}$ und der Richtungsvektor ist gleich dem Normalenvektor der Ebene $\overrightarrow{n_E}$, da dieser senkrecht zur Ebene E steht.

$l: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{S} + \lambda \cdot \overrightarrow{n_E} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

$$l: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Schnitt Ebene und Gerade

Ebene E mit Lotgerade l schneiden:

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $l: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E^N in einem Punkt F, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von l) die Normalenform der Ebene E^N.

Man setzt l in E^N ein und löst nach λ auf.

$E \cap l$:

$$l: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + \lambda \\ x_2 &= 7 + 2\lambda \qquad \text{in} \qquad E^N: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3 = 0 \ \text{ einsetzen:} \\ x_3 &= -11 - 2\lambda \end{aligned}$$

$(3 + \lambda) + 2 \cdot (7 + 2\lambda) - 2 \cdot (-11 - 2\lambda) - 3 = 0$

$3 + \lambda + 14 + 4\lambda + 22 + 4\lambda - 3 = 0$

$9\lambda = -36$

$\lambda = -4$

$\lambda = -4$ in die Geradengleichung einsetzen:

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{B}$$

$\Rightarrow$ Der Fußpunkt F des Lotes vom Punkt S auf die Ebene E ist $B(-1|-1|-3)$

Abstand Punkt - Ebene

Betrag des Normalenvektors bestimmen:

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E aufstellen:

Erläuterung: *Hesse-Normalenform der Ebene*

Die Hesse-Normalenform E^{HNF} einer Ebene E entsteht durch Teilung der Normalenform der Ebene E mit dem Betrag des Normalenvektors $|\overrightarrow{n_E}|$.

Beispiel:

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{n_E}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$$E^{HNF}: \frac{1}{3}\,(x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3) = 0$$

Abstand des Punktes S von der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Abstand Punkt - Ebene*

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Hesse-Normalenform E^{HNF} der Ebene E (zwischen Betragsstriche), bestimmt man den Abstand $d(P, E)$ des Punktes zur Ebene.

Beispiel:

$$E^{\text{HNF}}: \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4) = 0$$

$P(1|3|-6)$

$$d(P, E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) - 4) \right| = \left| -\frac{9}{3} \right| = 3$$

$$d(S, E) = \left| \frac{1}{3} \cdot (3 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 11 - 3) \right| = 12$$

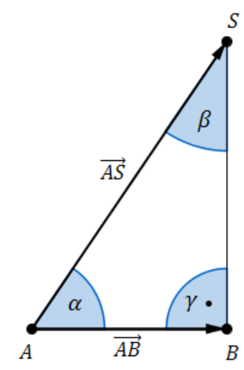
$\Rightarrow$ Der Abstand des Punktes S zur Ebene E beträgt 12 LE (Längeneinheiten).

Teilaufgabe 1c (5 BE)

Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel des Dreiecks $A\,B\,S$.

Lösung zu Teilaufgabe 1c

Innenwinkel eines Dreiecks



$A(-3|2|-1),\ B(-1|-1|-3),\ S(3|7|-11)$

Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}$ und ihre Länge bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \vec{S} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$$

$$\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{6^2 + 5^2 + (-10)^2} = \sqrt{161}$$

Winkel α zwischen den beiden Vektoren bestimmen:

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AS}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AS}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{161}} = \frac{12 - 15 + 20}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{161}} = \frac{17}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{161}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{17}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{161}}\right) \approx 71{,}04^\circ$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180°.

Es gilt also in diesem Fall:

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Aus Teilaufgabe 1b ist bekannt: B ist der Lotfußpunkt des Lotes vom Punkt S auf die Ebene E. Da A und B Punkte auf der Geraden g sind und somit auf der Ebene E liegen (nach Teilaufgabe 1a) ist der Winkel γ zwischen den Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BS}$ gleich 90°.

$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \beta = 90 - \alpha = 90 - 71{,}04 = 18{,}96^\circ$

$\Rightarrow$ Die Innenwinkel des Dreiecks ABS sind $\alpha = 71{,}04^\circ$, $\beta = 18{,}96^\circ$ und $\gamma = 90^\circ$

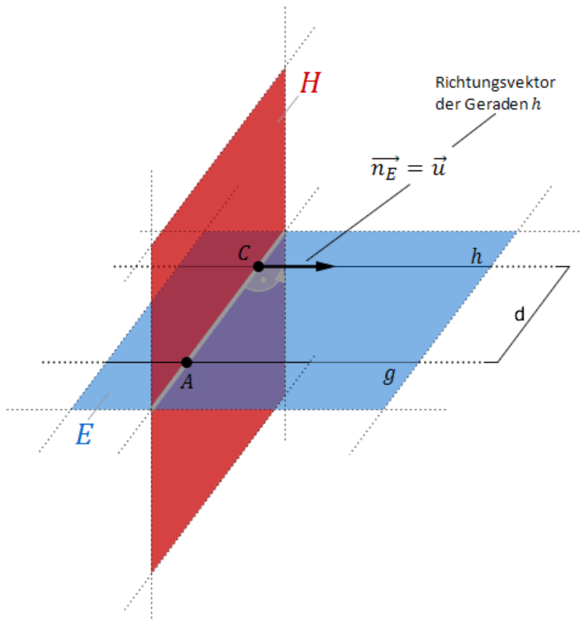
Teilaufgabe 1d (5 BE)

Berechnen Sie den Abstand $d(g, h)$ der Geraden g und h.

[Ergebnis: $d(g, h) = 3\sqrt{17}$]

Lösung zu Teilaufgabe 1d

Abstand paralleler Geraden



$A(-3|2|-1), B(-1|-1|-3)$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$$

Hilfsebene H durch A senkrecht zu h:

> Erläuterung: *Ebenengleichung*
>
> Eine Ebene H ist durch einen Punkt P und einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_H}$ eindeutig bestimmt. Die Ebenengleichung (in Normalenform) lautet:
>
> $$H^N : \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{OP}\right] \circ \overrightarrow{n_H} = 0$$
>
> Hier ist der Normalenvektor gleich dem Richtungsvektor der Geraden h, da die Ebene senkrecht zu ihr stehen soll:
>
> $$\overrightarrow{n_H} = \vec{u}$$

$$H : \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$H : -2x_1 + 3x_2 + 2x_2 - 10 = 0$$

Ebene H mit Gerade h schneiden:

> Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*
>
> Schneidet eine Gerade $h : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \lambda \cdot \vec{u}$ eine Ebene H^N in einem Punkt C, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von h) die Normalenform der Ebene H^N.
>
> Man setzt h in H^N ein und löst nach λ auf.

$H \cap h$:

$$h : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} x_1 = 7 - 2\lambda \\ x_2 = 4 + 3\lambda \\ x_3 = 6 + 2\lambda \end{array} \quad \text{in} \quad H^N : -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10 = 0 \;\; \text{einsetzen:}$$

$$-2 \cdot (7 - 2\lambda) + 3 \cdot (4 + 3\lambda) + 2 \cdot (6 + 2\lambda) - 10 = 0$$

$$-14 + 4\lambda + 12 + 9\lambda + 12 + 4\lambda - 10 = 0$$

$$17\lambda = 0$$

$$\lambda = 0$$

$\lambda = 0$ in die Geradengleichung einsetzen:

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Ebene H schneidet die Gerade h im Punkt $C(7|4|6)$

Abstand der Geraden g und h bestimmen:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$d(g,h) = \left|\overrightarrow{AC}\right|$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$= \sqrt{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{100 + 4 + 49} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$$

$\Rightarrow$ Der Abstand zwischen den Geraden g und h ist gleich $3\sqrt{17}$ LE (Längeneinheiten)

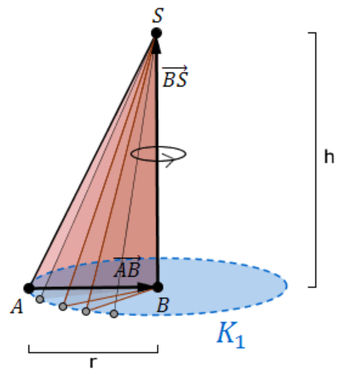
Teilaufgabe 2a (4 BE)

Lässt man das Dreieck ABS um die Achse BS rotieren, so entsteht als Rotationskörper ein Kegel K_1.

Berechnen Sie das Volumen von K_1.

Lösung zu Teilaufgabe 2a

Länge eines Vektors



$A(-3|2|-1), B(-1|-1|-3), S(3|7|-11)$

Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BS}$ und ihre Länge bestimmen:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$ LE (Längeneinheiten)

$\left|\overrightarrow{BS}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{4^2 + 8^2 + (-8)^2} = \sqrt{144} = 12$ LE (Längeneinheiten)

Volumen eines Kegels

Volumen des Kegels K_1 bestimmen:

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*

Das Volumen eines Kegels ist gegeben durch:

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

wobei G die Grundfläche ist und h die Höhe des Kegels.

Hier ist G die Kreisfläche mit Radius $r = \overline{AB}$ und $h = \overline{BS}$ die Drehachse

$r = \overline{AB} = \sqrt{17}$ LE (Längeneinheiten)

$h = \overline{BS} = 12$ LE (Längeneinheiten)

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{17}\right)^2 \cdot \pi \cdot 12$

$= 68\pi$ VE (Volumeneinheiten)

Teilaufgabe 2b (3 BE)

Untersuchen Sie, ob die Gerade h mit dem Kegel K_1 gemeinsame Punkte besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe 2b

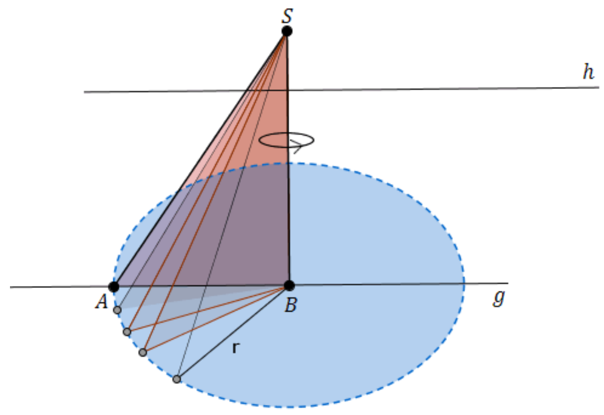
Lagebeziehung Gerade - Kreis

Radius der Grundfläche des Kegels K_1 (siehe Teilaufgabe 2a):
$r = \overline{AB} = \sqrt{17}$

Abstand der Geraden g und h (siehe Teilaufgabe 1d):
$d(g,h) = 3\sqrt{17}$

$\overline{AB} < d(g,h)$

Erläuterung: *Lagebeziehung*



Die Geraden g und h sind parallel und der Kegel K_1 ist durch Rotieren des Dreiecks ABS um die Achse BS entstanden.
Der Radius der Grundfläche des Kegels K_1 müsste mindestens so lang sein wie der Abstand der Geraden damit es Schnittpunkte zwischen der Geraden h und dem Kegel K_1 geben würde.

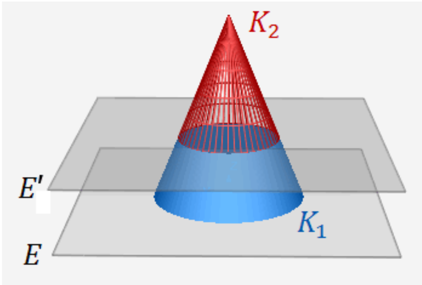
$\Rightarrow$ Es gibt keine Schnittpunkte zwischen der Geraden h und dem Kegel K_1.

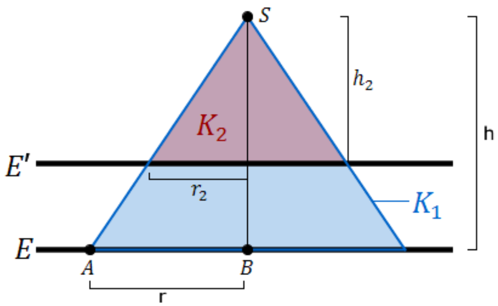
Teilaufgabe 2c (5 BE)

Eine Ebene E', die parallel zur Ebene E liegt, zerlegt den Kegel K_1 in einen Kegel K_2 und einen Kegelstumpf. Die Höhe des Kegelstumpfs beträgt ein Drittel der Höhe des Gesamtkegels K_1. Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens des Kegelstumpfs am Volumen des Kegels K_1.

Lösung zu Teilaufgabe 2c

Volumen eines Kegels





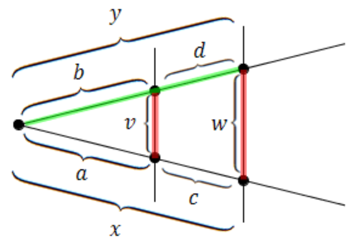
Höhe des Kegels K_1 (siehe Teilaufgabe 2a):
$h = \overline{BS} = 12$ LE (Längeneinheiten)

Höhe des Kegels K_2:
$h_2 = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ LE (Längeneinheiten)

Radius des Kegels K_1 (siehe Teilaufgabe 2a):
$r = \overline{AB} = \sqrt{17}$ LE (Längeneinheiten)

Radius des Kegels K_2:

Erläuterung: *Strahlensatz*



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten folgende Beziehungen (zwischen den Strecken):

1) $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ und $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

2) $\frac{v}{w} = \frac{a}{x}$ bzw. $\frac{v}{w} = \frac{b}{y}$

In diesem Fall (wenn S de Punkt ist aus dem der Strahl kommt)gilt nach 2):

$$\frac{r_2}{r} = \frac{h_2}{h}$$

$$\frac{r_2}{r} = \frac{h_2}{h}$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{h_2}{h} \cdot r = \frac{8}{12} \cdot \sqrt{17} = \frac{2\sqrt{17}}{3} \text{ LE (Längeneinheiten)}$$

Volumen des Kegels K_2 bestimmen:

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*

Das Volumen eines Kegels ist gegeben durch:

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

wobei G die Grundfläche ist und h die Höhe des Kegels.

Hier ist G die Kreisfläche mit Radius r_2 und $h = h_2$

$V_{K_2} = \frac{1}{3} \cdot r_2^2 \cdot \pi \cdot h_2$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2\sqrt{17}}{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8$

$= \frac{544}{27}\pi$ VE (Volumeneinheiten)

Volumen der Teilkörper

Volumen des Kegels K_1 (siehe Teilaufgabe 2a):
$V_{K_1} = 68\pi$ VE (Volumeneinheiten)

Volumen $V_{K\,S}$ des Kegelstumpfs bestimmen:

$V_{K\,S} = V_{K_1} - V_{K_2} = 68\pi - \frac{544}{27}\pi = \frac{1292}{27}\pi$ VE (Volumeneinheiten)

Prozentualer Anteil bestimmen:

$\frac{V_{K\,S}}{V_{K_1}} = \frac{\frac{1292}{27}\pi}{68\pi} = \frac{19}{27} \approx 70,4\%$

$\Rightarrow$ Das Volumen des Kegelstumpfs beträgt ca. $70,4\%$ des Kegelvolumens

Teilaufgabe 2d (4 BE)

Gegeben ist ein Punkt P, dessen Abstand von der Ebene E kleiner als 12 ist. Es soll entschieden werden, ob der Punkt P auf der Mantelfläche des Kegels K_1 liegt. Beschreiben Sie hierfür ein mathematisches Vorgehen unter der Annahme, dass die Koordinaten von P bekannt sind.

Lösung zu Teilaufgabe 2d

Abstand Punkt - Ebene

Gegeben:

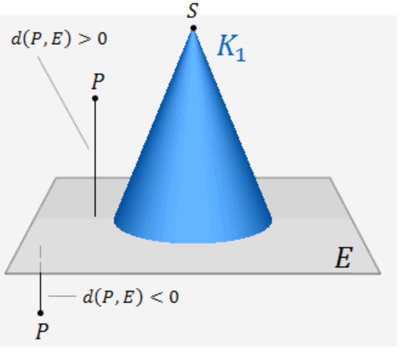
$P(p_1|p_2|p_3)$

$d(P, E) < 12$

Gesuchtes Verfahren:

1. Überprüfen ob P auf der selben Seite der Ebene E liegt wie der Punkt S. Also ob gilt:

Erläuterung: *Lage des Punktes*



Liegt der Punkt P auf der anderen Seite der Ebene E, so kann dieser in keinem Fall auf der Mantelfläche der Kugel K_1 liegen.

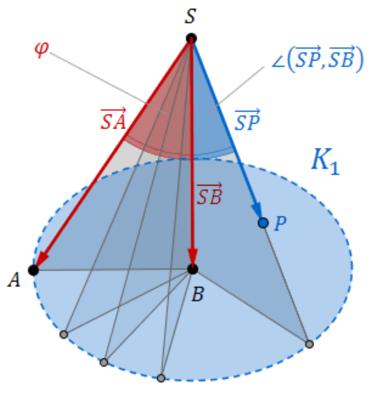
Da der Abstand vom Punkt S zur Ebene E gleich 12 ist (siehe Teilaufgabe 1b), also positiv, muss auch der Abstand zwischen P und E positiv sein, damit P uns S auf derselben Seite liegen.

$d(P, E) > 0$

Winkel zwischen zwei Vektoren

2. Überprüfen ob der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{SP}$ und $\overrightarrow{SB}$ gleich ist wie der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{SA}$ und $\overrightarrow{SB}$

Erläuterung: *Öffnungswinkel eines Kegels*



Die Mantellinien (Verbindungsstrecken zwischen Basiskreispunkte und Spitze) bilden zusammen mit der Drehachse (Höhe) einen Winkel φ, der sogenannte „halbe Eröffnungswinkel".

Ein Punkt P liegt genau dann auf der Mantelfläche des Kegels, wenn der Winkel zwischen der Verbindungsstrecke $[SP]$ und der Drehachse gleich dem halben Eröffnungswinkel.

$$\measuredangle\left(\overrightarrow{SP},\overrightarrow{SB}\right)=\measuredangle\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right)$$

$\Rightarrow$ Ein Punkt P, dessen Abstand von der Ebene E kleiner als 12 ist, liegt auf der Mantelfläche des Kegels K_1 genau dann wenn beide Bedingungen erfüllt sind.