Abitur 1985 Mathematik LK Infinitesimalrechnung II

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ definierte Funktion

$$f : x \mapsto \frac{1 - x^2}{2(2 - x)}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen, und untersuchen Sie das Verhalten von f in der Umgebung von $x = 2$. **(4 BE)**

   (b) Zeigen Sie, dass für $x \neq 2$ gilt:

$$\frac{1 - x^2}{2(2 - x)} = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{2(2 - x)}.$$

   Begründen Sie, dass G_f für $|x| \to \infty$ eine Asymptote hat. Für welche Werte von x verläuft G_f oberhalb dieser Asymptote? **(5 BE)**

   (c) Zeigen Sie für $h \in \mathbb{R}^+$: $f(2 + h) - 2 = 2 - f(2 - h)$.
   Deuten Sie diese Beziehung geometrisch. **(6 BE)**

   (d) Weisen Sie nach, dass die Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente auf der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten liegen. **(5 BE)**

   (e) Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der erhaltenen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm, Querformat, Ursprung 10 cm vom linken und 7 cm vom unteren Blattrand entfernt). **(5 BE)**

   (f) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3}{2(2 - x)}\,dx$.

   Kennzeichnen Sie in der Zeichnung von Teilaufgabe 1e das Flächenstück, dessen Inhalt damit berechnet wurde. **(6 BE)**

2. Gegeben ist weiter die Funktion $g :\mapsto \arccos \dfrac{3}{2(2 - x)}$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion g im Bereich $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}\setminus]\frac{1}{2}; \frac{7}{2}[$ definiert ist. **(4 BE)**

   (b) Untersuchen Sie das Verhalten von g an den Grenzen von $\mathbb{D}_g$. **(3 BE)**

   (c) Bestätigen Sie: $g'(x) = \dfrac{-3}{|2 - x| \cdot \sqrt{4(2 - x)^2 - 9}}$.

   Untersuchen Sie das Verhalten von g' an den Grenzen $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{7}{2}$.
   Warum kann aus $g'(x) < 0$ in $\mathbb{D}_{g'}$ nicht auf die Monotonie von g in $\mathbb{D}_{g'}$ geschlossen werden? **(8 BE)**

   (d) Skizzieren Sie unter Verwendung der erhaltenen Ergebnisse den Graphen von g in ein neues Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm). **(4 BE)**