Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Zunächst sollen die Nullstellen der Funktionen der angegebenen Schar berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{x+k}{\mathrm{e}^x} \qquad \mid \cdot \mathrm{e}^x \\
0 &= x+k \quad \Rightarrow x=-k
\end{aligned}
$$

Alle Funktionen der Schar haben also eine Nullstelle bei $x=-k$, für die in Material 1 abgebildeten Funtkionen ergibt sich damit von links nach rechts für die Werte von k : 3, 2, 1, 0, -1

Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Die Extrem- und Wendestellen der Schar sollen jeweils nur mit Hilfe des notwendigen Kriteriums bestimmt werden, so dass nur die ersten beiden Ableitungen benötigt werden:

$$f_{\mathrm{k}}(x) = \frac{x+k}{\mathrm{e}^x}$$

$$f'_{\mathrm{k}}(x) = \frac{1\cdot \mathrm{e}^x - (x+k)\cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1-x-k}{\mathrm{e}^x}$$

$$f''_{\mathrm{k}}(x) = \frac{-1\cdot \mathrm{e}^x - (1-x-k)\cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{-2+x+k}{\mathrm{e}^x}$$

Die möglichen Extremstellen ergeben sich aus den Nullstellen der ersten Ableitung:

$$0 = \frac{1-x-k}{\mathrm{e}^x} \quad \Rightarrow x_{\mathrm{E}} = 1-k$$

Entsprechend werden die möglichen Wendestellen über die Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmt:

$$0 = \frac{-2+x+k}{\mathrm{e}^x} \quad \Rightarrow x_{\mathrm{W}} = 2-k$$

HP
notwendig:
$f'(x_{\mathrm{HP}}) = 0$

hinreichend:
VZW von + nach - in f'/
$f''(x_{\mathrm{HP}}) < 0$

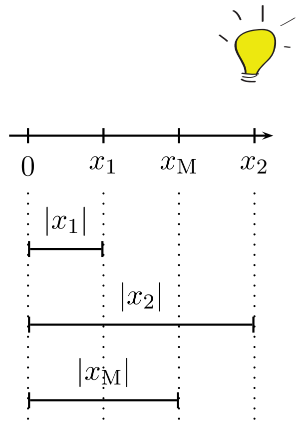
TP
notwendig:
$f'(x_{\mathrm{TP}}) = 0$

hinreichend:
VZW von - nach + in f'/
$f''(x_{\mathrm{TP}}) > 0$

WP
notwendig:
$f'(x_{\mathrm{WP}}) = 0$

hinreichend:
VZW in f''/
$f'''(x_{\mathrm{WP}}) \neq 0$

Abschließend soll noch gezeigt werden, dass die Extremstelle einer Funktion der Schar immer genau in der Mitte zwischen der Null- und der Wendestelle liegt:



$$\begin{aligned}|x_\mathrm{M}| &= |x_1| + \frac{(|x_2| - |x_1|)}{2}\\ &= |x_1| + \frac{|x_2|}{2} - \frac{|x_1|}{2}\\ &= \frac{|x_1|}{2} + \frac{|x_2|}{2}\\ &= \frac{|x_1| + |x_2|}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x_\mathrm{N} + x_\mathrm{W}}{2} &= \frac{-k + 2 - k}{2}\\ &= \frac{2 - 2k}{2}\\ &= 1 - k\\ &= x_\mathrm{E}\end{aligned}$$

Lösung zu Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Um die Zuordnungsvorschrift der Ortskurve der Hochpunkte zu bestimmen, muss zunächst die y-Koordinate der Hochpunkte ermittelt werden:

$$y_\mathrm{E} = f_\mathrm{k}(1 - k) = \frac{1 - k + k}{\mathrm{e}^{1-k}} = \mathrm{e}^{k-1}$$

Im nächsten Schritt wird der Scharparameter k aus den Gleichungen für x_E und y_E eliminiert:

$$\begin{aligned} & x_\mathrm{E} = 1 - k \quad \Rightarrow k = 1 - x_\mathrm{E}\\ \text{in } y_\mathrm{E}: \quad & y_\mathrm{E} = \mathrm{e}^{1-x_\mathrm{E}-1} = \mathrm{e}^{-x_\mathrm{E}}\end{aligned}$$

Alle Hochpunkte der Schar befinden sich damit auf einer Kurve mit der Zuordnungsvorschrift $y = \mathrm{e}^{-x}$.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Die zweite Ableitung $f''_\mathrm{k}(x) = \frac{x+k-2}{\mathrm{e}^x}$ ist eine Funktion der Schar, wobei der Scharparameter gegenüber dem der Ausgangsfunktion um 2 vermindert ist:

$$f''_\mathrm{k}(x) = \frac{x + k - 2}{\mathrm{e}^x} = \frac{x + k^*}{\mathrm{e}^x} = f_{\mathrm{k}^*}(x)$$

Für festes k ist

$$\begin{aligned}f''_\mathrm{k}(x) &= \frac{x + k - 2}{\mathrm{e}^x} = \frac{x - 2 + k}{\mathrm{e}^x} = \frac{x - 2 + k}{\underbrace{\mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^{-2}}_{=1} \cdot \mathrm{e}^x}\\ &= \frac{x - 2 + k}{\mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^{(x-2)}} = \frac{1}{\mathrm{e}^2} \cdot f_\mathrm{k}\,(x - 2)\end{aligned}$$

Der Graph von f_k'' entsteht also aus dem Graphen von f_k durch eine Verschiebung um 2 nach rechts (Argument) und eine Stauchung in y-Richtung mit dem Faktor $1/e^2$ (Vorfaktor).

Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Bei der Integration von Produkten muss immer zunächst entschieden werden, welcher Faktor abgeleitet und welcher Faktor integriert werden soll. Hier im Beispiel macht es Sinn, den Faktor mit der e-Funktion zu integrieren, den linearen Faktor abzuleiten:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+k}{e^x}\,dx &= \int \underbrace{(x+k)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'}\,dx\\ &= -(x+k)\cdot e^{-x} - \int 1\cdot\left(-e^{-x}\right)\,dx\\ &= -(x+k)\cdot e^{-x} - e^{-x} = -(x+k+1)\cdot e^{-x}\end{aligned}$$

Da in der Aufgabe lediglich nach EINER Stammfunktionenschar gefragt war, ist keine Integrationskonstante notwendig und es ergibt sich die angegebene Kontroll-Funktion $F_k(x) = -(x+k+1)\cdot e^{-x}$ als mögliche Lösung.

Produktintegration:

$$\int u\cdot v'\,dx = [u\cdot v] - \int u'\cdot v\,dx$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

In dieser Teilaufgabe soll untersucht werden, ob die Graphen der Schar mit der x-Achse eine Fläche einschließen und gegebenenfalls der Flächeninhalt bestimmt werden. Da alle Graphen der Schar eine Nullstelle bei $x = -k$ haben und $\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x) = 0$ gilt, muss der folgende Grenzwert untersucht werden:

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\int_{-k}^{u} \frac{x+k}{e^x}\,dx &= \lim_{u\to\infty}\left[-(x+k+1)\cdot e^{-x}\right]_{-k}^{u}\\ &= \lim_{u\to\infty} -(u+k+1)\cdot e^{-u} + (-k+k+1)\cdot e^{-(-k)}\\ &= e^k \qquad \text{da } \lim_{u\to\infty} e^{-u} = 0 \text{ gilt}\end{aligned}$$

Es gibt also einen Grenzwert, die Graphen der Schar schließen mit der x-Achse eine Fläche von $A = e^k$ FE ein.

Lösung zu Teilaufgabe 3 (4 BE)

Die Graphen der Schar sollen entlang der x-Achse so verschoben werden, dass sie durch den Ursprung verlaufen. Die Nullstelle bei $x = -k$ muss also auf $x = 0$ verschoben werden, was einer Verschiebung des Graphen um k nach rechts entspricht:

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{k}}(x) &= f_{\mathrm{k}}(x-k) = \frac{x-k+k}{\mathrm{e}^{x-k}} \\ &= x \cdot \mathrm{e}^{k-x} \end{aligned}$$

Lösung zu Teilaufgabe 4.1 (2 BE)

In der abgebildeten Graphik ist zu sehen, dass Hundewelpen innerhalb der ersten Lebensmonate zunächst täglich mehr an Gewicht zunehmen, bis eine maximale Gewichtszunahme erreicht ist. Von diesem Zeitpunkt an sinkt die Gewichtszunahme täglich und nähert sich mit zunehmendem Alter der x-Achse an, die Gewichtszu- bzw. abnahme der Tiere stagniert dann. Etwa ab einem Alter von 1,5 Jahren haben alle Hunde ihr Endgewicht erreicht.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2 (6 BE)

Der Hochpunkt des Graphen, der die Gewichtsentwicklung des Schäferhundes beschreibt, liegt bei $(3 \mid 165)$. Der Graph von g_{k} hat einen Hochpunkt bei $\left(1 \mid \mathrm{e}^{k-1}\right)$, für $k = 1$ liegt er also bei $(1 \mid 1)$. Der Graph von g_1 kann nun so verändert werden, dass sein Hochpunkt bei $(3 \mid 165)$ liegt: Um die x-Koordinate der Schäferhund-Funktion bei $x = 3$ zu realisieren, muss der Graph von g_1 zunächst um den Faktor 3 in x-Richtung gestreckt werden:

$$g_1^*(x) = \frac{x}{3} \cdot \mathrm{e}^{1-\frac{x}{3}}$$

Um den y-Wert des Hochpunktes auf $y = 165$ abzubilden, wird der Graph außerdem um den Faktor 165 in y-Richtung gestreckt:

$$g_1^{**}(x) = 165 \cdot \frac{x}{3} \cdot \mathrm{e}^{1-\frac{x}{3}}$$

Die Gewichtsentwicklung von Schäferhundwelpen kann näherungsweise durch den Graphen von $g_1^{**}(x) = 55x \cdot \mathrm{e}^{1-\frac{x}{3}}$ beschrieben werden.