Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Der Punkt A_{t} liegt auf der x_1-Achse, Punkt B_{t} liegt auf der x_2-Achse und Punkt C_{t} liegt auf der x_3-Achse. Die drei Punkte liegen also nicht auf einer Geraden und spannen daher eine Ebene auf. Da eine Ebene durch drei Punkte eindeutig festgelegt ist, spannen die drei Punkte genau eine Ebene H_{t} auf.

Parametergleichung der Ebene:

$$
\begin{aligned}
E:\ \overrightarrow{X} &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \\
E:\ \overrightarrow{X} &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + s \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
E:\ \overrightarrow{X} &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Normalenvektor der Ebene:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{n} &= \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2t \cdot 3t - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-t) - (-t) \cdot 3t \\ (-t) \cdot 0 - 2t \cdot (-t) \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{n} &= \begin{pmatrix} 6t^2 \\ 3t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für die Koordinatenform der Ebene E:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{X} \circ \begin{pmatrix} 6t^2 \\ 3t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6t^2 \\ 3t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \\
6t^2 x_1 + 3t^2 x_2 + 2t^2 x_3 &= 6t^3 \quad | : t^2 \\
6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6t
\end{aligned}
$$

Der Normalenvektor der Ebenenschar ist unabhängig vom Wert des Parameters t, alle Ebenen der Schar haben also die gleiche Orientierung im Raum. Lediglich das Absolutglied der Koordinatenform hängt von t ab, so dass die Ebenen echt parallel zueinander verlaufen.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Die Koordinatenform der Ebene ist eine Gleichung, die für alle Punkte der Ebene erfüllt wird. Um die Ebene zu finden, die den Punkt $P(2|-2|3)$ enthält, muss also der Wert von t gefunden werden, für den dieser Punkt die Gleichung

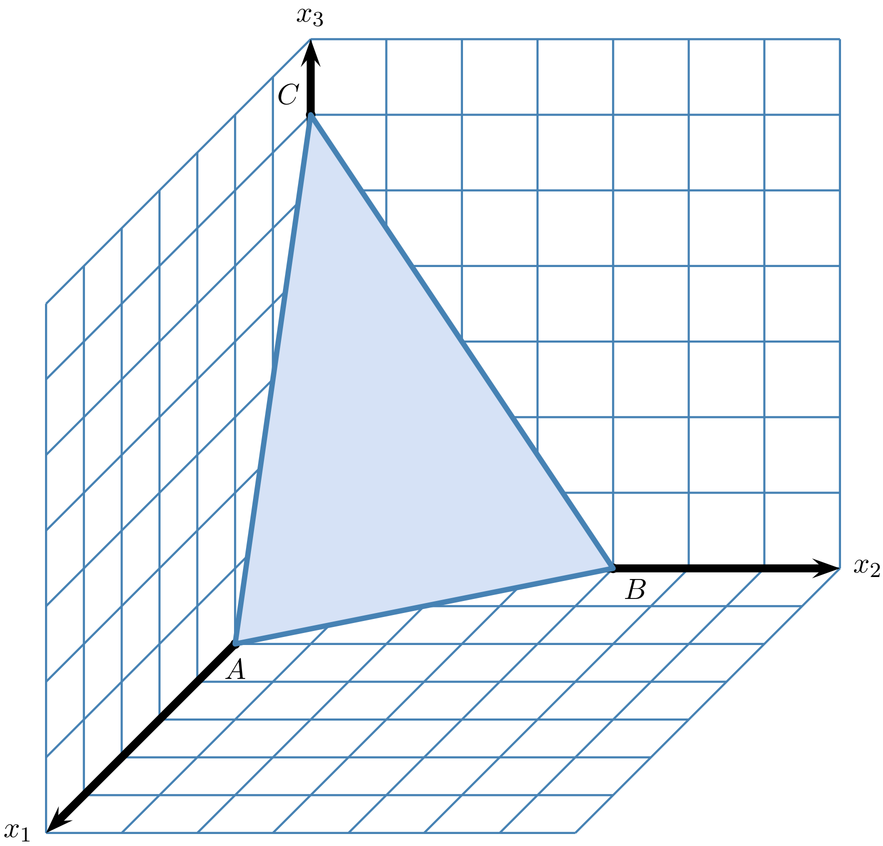
$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6t$$

erfüllt:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6t \\ 6 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 &= 6t \\ t &= 2 \end{aligned}$$

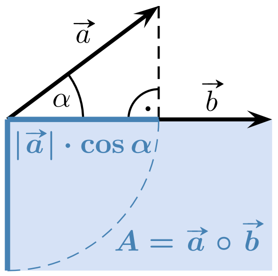
Für $t = 2$ ergeben sich für die Punkte $A - C$ die Koordinaten

$A(2|0|0)$
$B(0|4|0)$
$C(0|0|6)$.



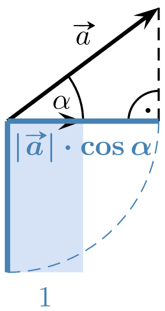
Erläuterung: *Abstände*

Das Skalarprodukt ist definiert als das Produkt des Betrags des einen Vektors mit dem Betrag der senkrechten Projektion des anderen Vektors:



$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Ist der Betrag des ersten Vektors gerade $\left|\vec{b}\right| = 1$, entspricht das Ergebnis der Skalarmultiplikation der Länge der senkrechten Projektion des zweiten Vektors auf den ersten:

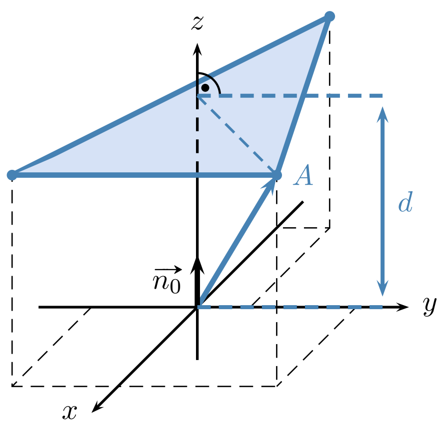


$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot 1 \cdot \cos\alpha \\ &= |\vec{a}| \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

Diese Tatsache kann man sich zu Nutze machen, um den Abstand beispielsweise des Ursprungs von einer Ebene zu bestimmen. Abstände werden immer senkrecht gemessen, also in Richtung des Normalenvektors einer Ebene. Der Abstand einer Ebene vom Ursprung entspricht daher der senkrechten Projektion des Stützvektors auf den Normaleneinheitsvektor (=Normalenvektor der Länge 1):

$$\begin{aligned} d &= \left|\vec{n_0} \circ \overrightarrow{OA}\right| \\ &= \left|\frac{1}{|n|} \cdot \vec{n} \circ \overrightarrow{OA}\right| \end{aligned}$$

$$\text{mit } |\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$



Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Den Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung berechnet man über das Skalarprodukt zwischen Normaleneinheitsvektor und Ortsvektor der Ebene:

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{t}} &= \left|\overrightarrow{n_0} \circ \overrightarrow{OA}\right| \\ &= \left|\frac{1}{|\overrightarrow{n}|} \cdot \overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{OA}\right| \\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\frac{6t}{7}\right| \end{aligned}$$

Der Abstand der Ebenenschar vom Koordinatenursprung beträgt also in Anhängigkeit von t $\frac{6|t|}{7}$ LE.

Dieser Abstand $\frac{6|t|}{7}$ LE des Koordinatenursprungs von der Ebene kann alternativ auch über das Lotfußpunktverfahren berechnet werden:

Die Gerade $g: \ \overrightarrow{X} = r \cdot \overrightarrow{n}$ steht senkrecht auf der Ebene und verläuft durch den Ursprung.

Eingesetzt in die Koordinatengleichung der Ebene ergibt sich der Wert des Parameters r für den Lotfußpunkt F_{t} der senkrechten Projektion von O auf H_{t}:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6t \\ 6 \cdot (6r) + 3 \cdot (3r) + 2 \cdot (2r) &= 6t \\ r &= \frac{6t}{49} \end{aligned}$$

in g :

$$\overrightarrow{OF} = \frac{6t}{49} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{36t}{49} \\ \frac{18t}{49} \\ \frac{12t}{49} \end{pmatrix}$$

Der Abstand des Ursprungs von der Ebene beträgt dann $d = \left|\overrightarrow{OF}\right|$:

$$d_{\mathrm{t}} = \left|\begin{pmatrix} \frac{36t}{49} \\ \frac{18t}{49} \\ \frac{12t}{49} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{36t}{49}\right)^2 + \left(\frac{18t}{49}\right)^2 + \left(\frac{12t}{49}\right)^2} = \frac{6|t|}{7}$$

Der Parameter t soll jetzt so bestimmt werden, dass der Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung $d = 6$ beträgt:

$$\begin{aligned} 6 &= \left|\frac{6t}{7}\right| \\ t &= \pm 7 \end{aligned}$$

Nimmt der Parameter t die Werte +7 oder -7 an, beträgt der Abstand also gerade 6 LE.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Mit Hilfe der Formel

$$F = 0{,}5 \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right| \cdot \sin\alpha \tag{1}$$

für ein Dreieck ABC mit dem Winkel α bei A soll für das Dreieck aus Aufgabe 1 der Ausdruck

$$F_{\mathrm{t}} = 3{,}5t^2$$

für den Flächeninhalt für beliebiges t hergeleitet werden.

Zunächst werden die einzelnen Größen bestimmt:

$$\begin{aligned} \left|\overline{AB}\right| &= \left|\overrightarrow{AB}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{(-t)^2 + (2t)^2 + 0^2} = t\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\overline{AC}| &= \left|\overrightarrow{AC}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{(-t)^2 + 0^2 + (3t)^2} = t\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix}}{t\sqrt{5} \cdot t\sqrt{10}} \\
&= \frac{t^2}{5t^2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{10}
\end{aligned}
$$

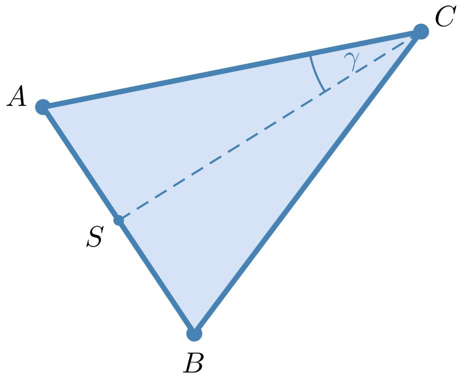
$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \\
&= \sqrt{\frac{98}{100}} \\
&= \frac{7\sqrt{2}}{10}
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in Gleichung (1) ergibt das

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{t}} &= 0{,}5 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \sin\alpha \\
&= 0{,}5 \cdot t\sqrt{5} \cdot t\sqrt{10} \cdot \frac{7}{10}\sqrt{2} \\
&= t^2 \cdot \frac{\sqrt{50}}{2} \cdot \frac{7}{10}\sqrt{2} \\
&= \frac{7}{2}t^2
\end{aligned}
$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Das Dreieck soll durch eine Gerade durch den Punkt C geteilt werden. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Strecke $\overline{AB}$ sei S:



Der Punkt S muss dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ entsprechen: Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird über $\frac{g \cdot h}{2}$ berechnet. Für jeden beliebigen Punkt S auf der Strecke $\overline{AB}$ ist die Höhe h_{AB} des Dreiecks konstant, so dass der Punkt S gerade die Grundseite halbieren muss, wenn er die Fläche des Dreiecks halbieren soll.

Für den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ gilt $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 0{,}5\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0{,}t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, also $M(0{,}5t|t|0)$.

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt

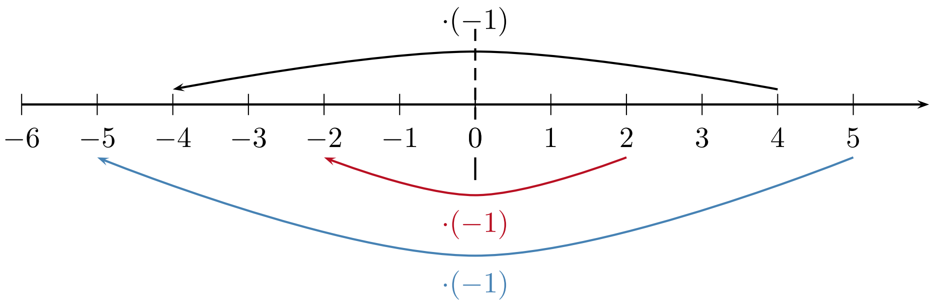
$$\begin{aligned} A_{\text{ASC}} &= 0{,}5 \cdot \left|\overline{AC}\right| \cdot \left|\overline{AS}\right| \cdot \sin\alpha \\ &= 0{,}5 \cdot t\sqrt{5} \cdot 0{,}5 \cdot t\sqrt{10} \cdot \frac{7}{10}\sqrt{2} \\ &= \frac{7}{4}t^2 = \frac{1}{2}A_{\text{ABC}} \end{aligned}$$

Für die Gerade ergibt sich

$$\begin{aligned} g: \vec{X} &= \overrightarrow{OC} + r \cdot \overrightarrow{CM} \\ g: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5t \\ t \\ -3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

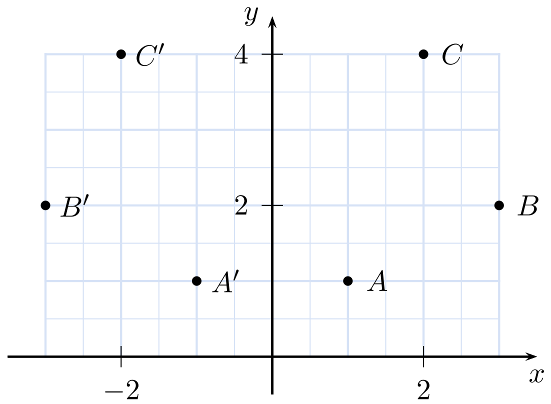
Erläuterung: *Lineare Abbildungen, Matrizen I*

Durch die Multiplikation mit einer Zahl wird eine Zahl auf eine andere Zahl abgebildet. Beispielsweise bildet die 1 jede Zahl auf sich selbst ab, die 2 jede Zahl auf ihr Doppeltes usw. Insbesondere bildet die (-1) auf die Gegenzahl ab, sie spiegelt also eine Zahl am Ursprung, wenn man sich die Zahlen auf dem Zahlenstrahl vorstellt:



Wenn man sich nicht nur in einer Dimension aufhält, sondern in die Ebene ($\mathbb{R}^2$) oder in den Raum ($\mathbb{R}^3$) geht, reicht es nicht mehr aus, Abbildungen durch eine Multiplikation mit einer einzelnen Zahl zu beschreiben, weil ja verschiedene Koordinaten (x_1 und x_2 im $\mathbb{R}^2$ bzw. x_1, x_2 und x_3 im $\mathbb{R}^3$) verschieden „angefasst“ werden müssen.

Um beispielsweise im folgenden Bild die Punkte A, B und C an der y-Achse zu spiegeln, muss die x-Koordinate des jeweiligen Punktes auf ihre Gegenzahl abgebildet werden, die y-Koordinate dagegen muss erhalten bleiben:



$$A \to A' \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B \to B' \quad : \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C \to C' \quad : \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Bedingung „...an der y-Achse zu spiegeln, muss die x-Koordinate des jeweiligen Punktes auf ihre Gegenzahl abgebildet werden, die y-Koordinate dagegen muss erhalten bleiben“ kann so formuliert werden:

$$x : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Lineare Abbildungen, Matrizen II*

Die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix ist wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1k} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2k} \cdot x_n \\ \cdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nk} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Die erste Spalte der Matrix wirkt also auf die erste Koordinate des Vektors, die zweite Spalte auf die zweite Koordinate usw.
Die Einheitsvektoren werden also auf die entsprechenden Spalten der Matrix abgebildet, so wird beispielsweise der Einheitsvektor in x_3-Richtung auf die 3. Spalte der Matrix abgebildet. In den Spalten der Matrix stehen also die Bilder der Einheitsvektoren, was für die Spiegelung an der y-Achse beispielsweise die Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt:

$$A \to A' : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B \to B' : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C \to C' : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Begriff der *linearen* Abbildung bezeichnet dabei eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

$$M \cdot (a \cdot \vec{x}) = a \cdot M \cdot \vec{x}; \qquad M \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = M \cdot \vec{x} + M \cdot \vec{y}$$

Vergleicht man also das Bild eines Vektors $\vec{x}$ mit dem Bild eines Vielfachen des Vektors $a \cdot \vec{x}$, so unterscheiden sich diese Bilder gerade um den Faktor a. Ebenso setzt sich das Bild einer Summe aus zwei Vektoren aus den Bildern der einzelnen Summanden zusammen.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Die gesuchte Matrix M soll die folgenden Abbildungen liefern:

$$A_1 \to A_2 \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$B_1 \to B_2 \quad : \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$C_1 \to C_2 \quad : \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Auf Grund der Linearität der Abbildung folgt aus Gleichungen (3) und (4):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Abbildungsmatrix M setzt sich aus den Bildern der Einheitsvektoren zusammen:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Alle Ebenen der Schar H_t liegen parallel zueinander und unterscheiden sich lediglich in ihrem Abstand zum Koordinatenursprung. Die Multiplikation der Ebenengleichung mit der Matrix $N = \frac{u}{t} \cdot E$ lässt sich in zwei Schritte zerlegen:

- Durch Multiplikation mit $\frac{1}{t} \cdot E$ wird die Ebene H_t auf die Ebene H_1 normiert.
- Im nächsten Schritt wird durch Multiplikation mit $u \cdot E$ die Ebene H_1 auf die Ebene H_u abgebildet:

$$H_\text{t} \xrightarrow{\frac{1}{t} \cdot E} H_1 \xrightarrow{u \cdot E} H_\text{u}.$$

Die Abbildung lässt sich daher geometrisch als zentrische Streckung der Ebenen am Koordinatenursprung verstehen.

Rechnerisch lässt sich die Abbildung wie folgt begründen:

$$\frac{u}{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} t - r \cdot t - s \cdot t \\ 2r \cdot t \\ 3s \cdot t \end{pmatrix}}_{\text{Parameterform der Ebene } H_\text{t}} = \frac{u}{t} \cdot \begin{pmatrix} t - r \cdot t - s \cdot t \\ 2r \cdot t \\ 3s \cdot t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u - r \cdot u - s \cdot u \\ 2r \cdot u \\ 3s \cdot u \end{pmatrix}}_{\text{Parameterform der Ebene } H_\text{u}}$$