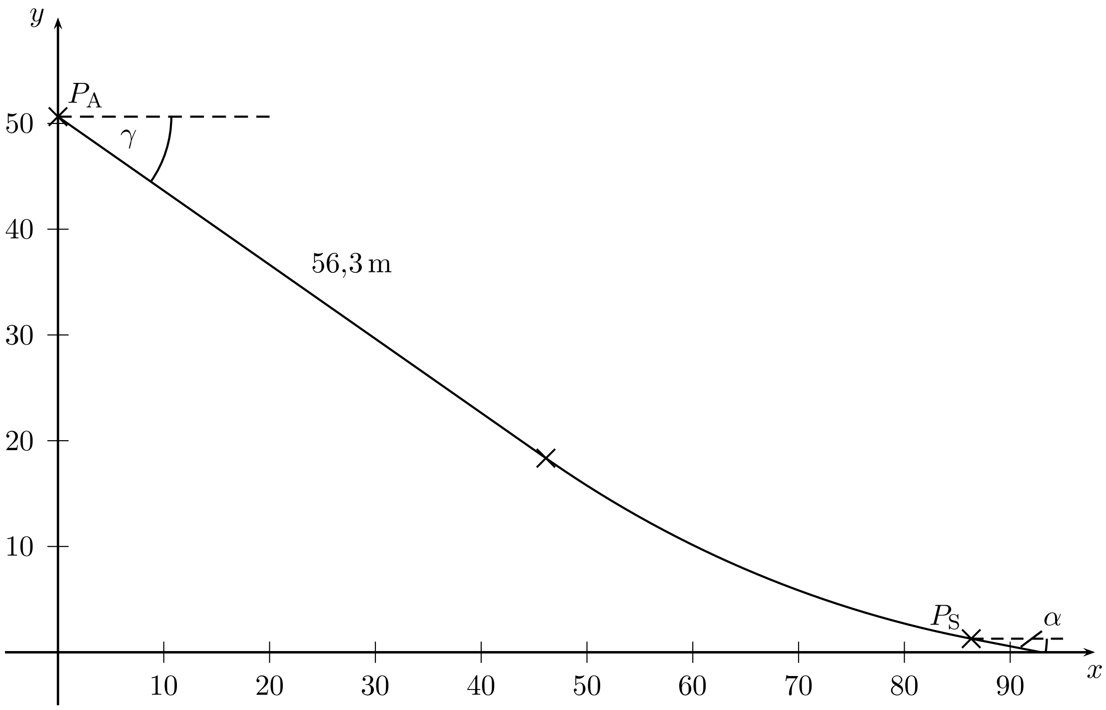
Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

In der Aufgabe waren die folgenden Angaben gegeben:

- Startpunkt des linearen Anlaufs $P_{\text{A}}\,(0 \mid 50{,}64)$
- Länge des linearen Anlaufs 56,3 m
- Neigungswinkel des linearen Anlaufs $\gamma = 35°$
- Mittelpunkt des kreisförmigen Übergangsbogens $M\,(106{,}36 \mid 104{,}35)$
- Startpunkt des Schanzentischs $P_{\text{S}}\,(86{,}32 \mid 1{,}28)$
- Länge des linearen Anlaufs 6,7 m
- Neigungswinkel des linearen Anlaufs $\alpha = 11°$

Zunächst sollte der Verlauf der Willinger Mühlenkopfschanze skizziert werden:



Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Eine Gerade entspricht dem Graphen einer linearen Funktion mit der Zuordnungsvorschrift

$$y = mx + b.$$

m ist dabei die Steigung der Geraden, b ihr Schnittpunkt mit der y-Achse.

Der geradlinige Teil des zu beschreibenden Anlaufs der Skisprungschanze startet im Punkt $P_{\mathrm{A}}\,(0 \mid 50{,}64)$. Daraus folgt für die gesuchte Zuordnungsvorschrift

$$b = 50{,}64.$$

Außerdem ist der Neigungswinkel $\gamma = 35^\circ$ bekannt. Wegen

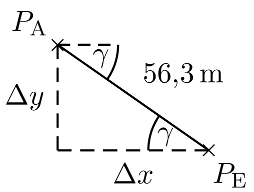
$$m = \tan(\alpha)$$

und $m < 0$ ist außerdem $m \approx -0{,}7$.

Damit gilt für die Gleichung des geradlinigen Anlaufs:

$$y = -0{,}7x + 50{,}64$$

Um den Endpunkt des Anlaufs zu berechnen, betrachten wir die folgende Skizze:



Satz des Pythagoras: $\Delta x^2 + \Delta y^2 = (56{,}3\,\mathrm{m})^2$

Trigonometrie: $\Delta x = 56{,}3\,\mathrm{m} \cdot \cos(35^\circ)$

Wegen $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -0{,}7$ ist $\Delta y = 0{,}7\Delta x$. Für bekannten x-Wert kann der y-Wert auch mit Hilfe der Zuordnungsvorschrift der Geraden berechnet werden.

Sowohl über den Satz des Pythagoras als auch durch die Verwendung der trigonometrischen Beziehungen ergeben sich für den Endpunkt des linearen Anlaufs die Koordinaten $P_{\mathrm{E}}\,(46{,}12 \mid 18{,}35)$.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3 (7 BE)

Steigung m_1 wurde bereits in Teilaufgabe 1.1 berechnet, für m_2 gilt:

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{104{,}35 - 18{,}35}{106{,}36 - 46{,}12} \approx 1{,}43 \end{aligned}$$

Für das Produkt $m_1 \cdot m_2$ gilt damit

$$m_1 \cdot m_2 = 0{,}7 \cdot 1{,}43 \approx -1,$$

das Produkt der beiden Steigungen entspricht also ungefähr -1. Die Gerade, die den linearen Anlauf beschreibt, verläuft daher orthogonal zu der Geraden durch M und P_{E}.

Die Strecke $\overline{MP_{\text{E}}}$ entspricht dem Radius des kreisförmigen Übergangsbogens. Da für jeden Punkt auf dem Kreisbogen der Radius senkrecht auf der Tangente steht, entspricht die Gerade durch P_{A} und P_{E}, also der lineare Anlauf, der Tangente an den Kreis im Punkt P_{E}.

Lösung zu Aufgabe 2 (8 BE)

Ein knick- und sprungfreier Übergang zwischen zwei Funktionsstücken bedeutet immer, dass die beiden Funktionen im Übergangspunkt sowohl im Funktionswert (sprungfrei) als auch in der Tangentensteigung (knickfrei) übereinstimmen müssen. Für die Parabel p_3 muss daher gelten:

$$p_3\left(x_{\text{E}}\right) = y_{\text{E}} \tag{1}$$

$$p_3'\left(x_{\text{E}}\right) = -\tan\left(35°\right) \tag{2}$$

$$p_3\left(x_{\text{S}}\right) = y_{\text{S}} \tag{3}$$

$$p_3'\left(x_{\text{S}}\right) = -\tan\left(11°\right) \tag{4}$$

Für $P_{\text{E}}\,(46{,}12 \mid 18{,}35)$ werden Gleichungen (1) und (2) überprüft:

$$\begin{aligned} p_3\left(46{,}12\right) &= -0{,}000028053 \cdot 46{,}12^3 + 0{,}011864312 \cdot 46{,}12^2 - 1{,}61556349 \cdot 46{,}12 + 70{,}3757036 \\ &\approx 18{,}35 \quad \checkmark \\ p_3'\left(46{,}12\right) &= -0{,}000084159 \cdot 46{,}12^2 + 0{,}023728624 \cdot 46{,}12 - 1{,}61556349 \\ &\approx -0{,}7 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Für Punkt P_{E} erfüllt die Parabel p_3 also die geforderten Bedingungen.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1 (10 BE)

Die Kreisgleichung $y_{\text{Kreis}}(x)$ war bereits in der Aufgabenstellung gegeben. Mit Hilfe der Kettenregel lässt sich $y'_{\text{Kreis}}(x)$ berechnen:

$$y_{\text{Kreis}}(x) = y_{\text{m}} - \sqrt{R^2 - (x - x_{\text{m}})^2}$$

$$\begin{aligned} y'_{\text{Kreis}}(x) &= \underbrace{-2 \cdot (x - x_{\text{m}})}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \overbrace{\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - (x - x_{\text{m}})^2}}\right)}^{\text{äußere Ableitung}} \\ &= \frac{x - x_{\text{m}}}{\sqrt{R^2 - (x - x_{\text{m}})^2}} \end{aligned}$$

Im angegebenen Kästchen wurde von Gleichung (1) nach Gleichung (2) diese erste Ableitung $y'_{\text{Kreis}}(x)$ eingesetzt. In Gleichung (3) wurde $z = x - x_{\text{m}}$ substituiert, dabei wurden auch die Grenzen umgerechnet, so dass das Integral nun von $z_1 = x_1 - x_{\text{m}}$ bis $z_2 = x_2 - x_{\text{m}}$ ausgewertet wird und nicht wie in Gleichung (1) und (2) von x_1 bis x_2.
Wegen

$$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = 1$$

ist dx=dz, das Differential wird einfach ersetzt.

In Gleichung (4) wurde die Klammer unter Wurzel quadriert und anschließend die beiden Terme addiert. Wegen $1 = {}^{R^2-z^2}/_{R^2-z^2}$ ergibt sich unter der Wurzel der Quotient ${}^{R^2}/_{R^2-z^2}$.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2 (7 BE)

Mit Hilfe der angegebenen Gleichung (7) für die Länge eines Kreisbogens soll die Länge des kreisförmigen Übergangsbogens zwischen Anlauf und Schanzentisch der Mühlenkopfschanze berechnet werden.

Zunächst wird der Radius des entsprechenden Kreises berechnet:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x - x_{\text{m}})^2 + (y - y_{\text{m}})^2} \\ &= \sqrt{(86{,}32 - 106{,}36)^2 + (1{,}28 - 104{,}35)^2} \\ &\approx 105 \end{aligned}$$

Dabei ist es egal, welcher Punkt auf dem Kreis für $(x \mid y)$ eingesetzt wird. Hier wurde P_S eingesetzt, über die Koordinaten von P_E hätte sich aber das gleiche Ergebnis ergeben.

Die Werte der φ_i ergeben sich aus den Abszissen des Start- und des Endpunktes des Keisbogens:

$$x_1 = 46{,}12 \qquad x_2 = 86{,}32$$

$$z_1 = 46{,}12 - 106{,}36 = -60{,}24 \qquad z_1 = 86{,}32 - 106{,}36 = -20{,}04$$

$$\varphi_1 = \arccos\left(-\frac{60{,}24}{105}\right) \approx 2{,}18 \qquad \varphi_1 = \arccos\left(-\frac{20{,}04}{105}\right) \approx 1{,}76$$

Damit ergibt sich für die Länge des Kreisbogens nach Gleichung (7)

$$L_\mathrm{Bogen} = 105 \cdot (2{,}18 - 1{,}76) \approx 44.$$

Der Übergangsbogen hat also eine Länge von etwa 44 m.