Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

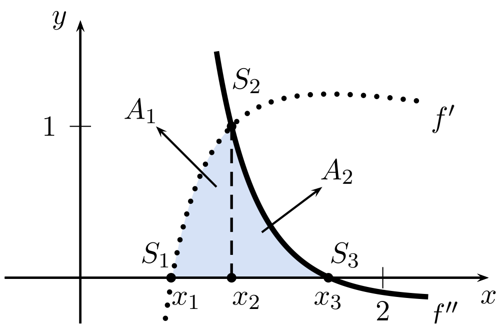
> Erläuterung: *Ableitungen*
>
> Die Funktionswerte der ersten Ableitung geben Aufschluss über das Steigungsverhalten der Ausgangsfunktion, die zweite Ableitung beschreibt das Krümmungsverhalten von f. Extremstellen in der Ausgangsfunktion entsprechen Nullstellen (mit VZW) in der ersten Ableitung, Wendepunkte in der Ausgangsfunktion entsprechen Stellen mit maximaler Steigung (=Extremstelle in f') und keiner Krümmung, die zweite Ableitung hat hier also eine Nullstelle.

Der Graph von A hat bei $x = x_1$ einen Tiefpunkt, der Graph von C hat an der gleichen Stelle eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von - nach +. Es gibt keine weiteren Extremstellen im Graphen von A und auch keine weiteren Nullstellen in C, der Graph von C entspricht also der Ableitung des Schaubildes von A. Die Nullstelle von B, $x = x_3$, entspricht einem Hochpunkt im Graphen von C, im Graphen von A lässt sich an dieser Stelle eine Wendestelle erahnen. Daraus ergibt sich die folgende Zuordnung:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow f \\ B &\rightarrow f'' \\ C &\rightarrow f' \end{aligned}$$

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Das beschriebene Flächenstück $S_1S_2S_3$ wird durch f' und f'' begrenzt und setzt sich aus zwei Teilflächen A_1 und A_2 zusammen:



$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\ \mathrm{d}x \\ A_2 &= \int_{x_2}^{x_3} f''(x)\ \mathrm{d}x \\ A_{\text{ges}} &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

Erläuterung: *Ableitungsregeln*

Kettenregel („innere mal äußere Ableitung")

$$\begin{aligned} f(x) &= u(v(x)) \\ f'(x) &= v'(x) \cdot u'(v(x)) \end{aligned}$$

Quotientenregel

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \\ f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[(v(x)]^2} \end{aligned}$$

Ableitung des natürlichen Logarithmus

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Für die ersten beiden Ableitungen von f erhält man:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\ln(x))^2 + \ln(x) \\ f'(x) &= \underbrace{\frac{1}{x} \cdot 2\ln(x)}_{\text{Kettenregel}} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2\ln(x) + 1}{x} \\ f''(x) &= \underbrace{\frac{\frac{2}{x} \cdot x - (2\ln(x) + 1)}{x^2}}_{\text{Quotientenregel}} \\ &= \frac{1 - 2\ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt, sie wird in diesem Aufgabenteil noch nicht benötigt.

Also gilt für den Flächeninhalt des durch S_1, S_2 und S_3 begrenzten Flächenstücks:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} f''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [f(x)]_{x_1}^{x_2} + \left[f'(x)\right]_{x_2}^{x_3} \\ &= (f(x_2) - f(x_1)) + \left(f'(x_3) - f'(x_2)\right) \end{aligned}$$

mit $x_1 = e^{-0{,}5}$, $x_2 = 1$ und $x_3 = e^{0{,}5}$:

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\left((\ln(1))^2 + \ln(1)\right)}_{\ln(1)=0} - \underbrace{\left(\left(\ln\left(e^{-0{,}5}\right)\right)^2 + \ln\left(e^{-0{,}5}\right)\right)}_{\ln(e^{-0{,}5})=-0{,}5} + \underbrace{\frac{2\ln\left(e^{0{,}5}\right)+1}{e^{0{,}5}}}_{\ln(e^{0{,}5})=0.5} - \underbrace{\frac{2\ln(1)+1}{1}}_{\ln(1)=0} \\ &= 0 \quad -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \quad + \frac{2}{\sqrt{e}} \quad -1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt also $\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{3}{4}\right)$ FE ($\approx$0,463 FE).

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Erläuterung: *Produktintegration/partielle Integration*

$$\begin{aligned} & (u(x)\cdot v(x))' &= \; & u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ \Leftrightarrow \; & u'(x)\cdot v(x) &= \; & (u(x)\cdot v(x))' - u(x)\cdot v'(x) \\ \Leftrightarrow \; & \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x &= \; & \int (u(x)\cdot v(x))' - u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \; & \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x &= \; & \int (u(x)\cdot v(x))'\,\mathrm{d}x - \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \; & \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x &= \; & (u(x)\cdot v(x)) - \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Stammfunktion des natürlichen Logarithmus:

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v}\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{x\ln(x)}_{uv} - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{uv'}\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x \\
\int \ln(x)\,\mathrm{d}x &= x\ln(x) - x
\end{aligned}$$

Stammfuktion von $h(x) = (\ln(x))^2$:

$$\begin{aligned}
\int (\ln(x))^2\,\mathrm{d}x &= \int \underbrace{\ln(x)}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v}\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{(x\ln(x) - x)}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} - \int \underbrace{(x\ln(x) - x)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\,\mathrm{d}x \\
&= x\,(\ln(x))^2 - x\ln(x) - \int (\ln(x) - 1)\,\mathrm{d}x \\
&= x\,(\ln(x))^2 - x\ln(x) - (x\ln(x) - x - x) \\
\int (\ln(x))^2\,\mathrm{d}x &= x\,(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x
\end{aligned}$$

Als Stammfunktion der Funktion f erhält man so:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\ln(x))^2 + \ln(x) \\
F(x) &= \int (\ln(x))^2 + \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= x\,(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + x\ln(x) - x \\
F(x) &= x\,(\ln(x))^2 - x\ln(x) + x
\end{aligned}$$

Da hier nur nach der Angabe **einer** Stammfunktion gefragt ist, ist die angegebene Lösung ausreichend. Wäre die Aufgabenstellung „bestimmen Sie die/alle Stammfunktionen von f“, müsste die Stammfunktion noch um eine Integrationskonstante (meistens c) ergänzt werden. Da Konstanten durch das Ableiten wegfallen, ist die Stammfunktion F zu einer gegebenen Funktion f nicht eindeutig bestimmt, sofern keine weitere Angabe gemacht wird („bestimmen Sie die Stammfunktion von f, die durch den Punkt ... geht). **Eine** Stammfunktion ist aber beispielsweise diejenige Stammfunktion mit der Integrationskonstanten $c = 0$.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Um den Inhalt der Fläche zu berechnen, die von f und der x-Achse eingeschlossen wird, müssen zunächst die Nullstellen der Funktion f bekannt sein:

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{!}{=} 0 \\ 0 &= (\ln(x))^2 + \ln(x) \\ &= \underbrace{\ln(x)}_{=0 \text{ für } x=1} \cdot \underbrace{(\ln(x)+1)}_{=0 \text{ für } x=e^{-1}} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt der gesuchten Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{e^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| [F(x)]_{e^{-1}}^{1} \right| \\ &= \left| F(1) - F\left(e^{-1}\right) \right| \\ &= \left| \left(1 \cdot (\ln(1))^2 - 1 \cdot \ln(1) + 1\right) - \left(e^{-1} \cdot \left(\ln\left(e^{-1}\right)\right)^2 - e^{-1} \cdot \ln\left(e^{-1}\right) + e^{-1}\right) \right| \\ &= \left| 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} \right| \\ &= \left| 1 - \frac{3}{e} \right| \\ &= \frac{3}{e} - 1 \quad \text{weil } 1 - \frac{3}{e} < 0 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt also $\left(\frac{3}{e} - 1\right)$ FE ($\approx 0{,}1$ FE).

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Zur Bestimmung der Extremstellen einer Funktion werden die ersten beiden Ableitungen benötigt. Die Ableitungen der Schar werden analog zu den Ableitungen der Funktion aus Aufgabenteil 1 bestimmt:

$$\begin{aligned} f_\mathrm{k}(x) &= (\ln(x))^2 - k \cdot \ln(x) \\ f'_\mathrm{k}(x) &= \frac{2\ln(x) - k}{x} \\ f''_\mathrm{k}(x) &= \frac{2 - 2\ln(x) + k}{x^2} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist eine Nullstelle in der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} f'_\mathrm{k}(x) &\overset{!}{=} 0 \\ 0 &= \frac{2\ln(x) - k}{x} \\ 0 &= 2\ln(x) - k \\ \\ x &= e^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

Um nachzuweisen, dass tatsächlich eine Extremstelle vorliegt (und kein Sattelpunkt), muss außerdem noch gezeigt werden, dass f' an der entsprechenden Stelle einen Vorzeichenwechsel aufweist. Am einfachsten weist man dies über die zweite Ableitung nach (ist der Wert in f'' ungleich Null, hat f' an dieser Stelle eine Steigung ungleich Null, wechselt also das Vorzeichen):

$$\begin{aligned} f''_\mathrm{k}\left(e^{\frac{k}{2}}\right) &= \frac{2 - 2\ln\left(e^{\frac{k}{2}}\right) + k}{\left(e^{\frac{k}{2}}\right)^2} \\ &= \frac{2 - k + k}{e^k} \\ &= \frac{2}{e^k} \quad > 0 \text{ weil } e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Der Wert der zweiten Ableitung kann für kein $k \in \mathbb{R}$ Null ergeben, jede Kurve der Schar hat also für $x = e^{\frac{k}{2}}$ eine Extremstelle. Da die e-Funktion nur positive y-Werte annehmen kann, ist der Wert der zweiten Ableitung außerdem für jedes k positiv. Daraus folgt, dass jede Kurve der Schar für $x = e^{\frac{k}{2}}$ einen Tiefpunkt besitzt. (Ein positiver Wert in f'' bedeutet eine positive Steigung in f', also einen Vorzeichenwechsel von - nach + $\rightarrow$ Tiefpunkt.)

Die y-Werte der Tiefpunkte erhält man durch Einsetzen in die Ausgangsfunktion:

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{k}}\left(e^{\frac{k}{2}}\right) &= \left(\ln\left(e^{\frac{k}{2}}\right)\right)^2 - k \cdot \ln\left(e^{\frac{k}{2}}\right) \\ &= \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} \\ &= -\frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{k}}\left(e^{\frac{k}{2}}\right) &= -\frac{k^2}{4} \\ &= -\frac{(-k)^2}{4} \\ &= f_{-\mathrm{k}}\left(e^{\frac{-k}{2}}\right) \end{aligned}$$

haben die Tiefpunkte eines Funktionenpaares die gleiche y-Koordinate.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

Nullstellen für $|k| = 1$:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1: \quad x_{1,\mathrm{k}=-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}; & x_{1,\mathrm{k}=+1} = 1 & \rightarrow \quad \frac{x_{1,\mathrm{k}=+1}}{x_{1,\mathrm{k}=-1}} = e \\ x_2: \quad x_{2,\mathrm{k}=-1} = 1; & x_{2,\mathrm{k}=+1} = e & \rightarrow \quad \frac{x_{2,\mathrm{k}=+1}}{x_{2,\mathrm{k}=-1}} = e \end{array}\right\} \text{Faktor } e$$

Nullstellen für $|k| = 2$:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1: \quad x_{1,\mathrm{k}=-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}; & x_{1,\mathrm{k}=+2} = 1 & \rightarrow \quad \frac{x_{1,\mathrm{k}=+2}}{x_{1,\mathrm{k}=-2}} = e^2 \\ x_2: \quad x_{2,\mathrm{k}=-2} = 1; & x_{2,\mathrm{k}=+2} = e^2 & \rightarrow \quad \frac{x_{2,\mathrm{k}=+2}}{x_{2,\mathrm{k}=-2}} = e^2 \end{array}\right\} \text{Faktor } e^2$$

Durch die Division der beiden Nullstellen eines Funktionenpaares erhält man den Faktor, der die erste Nullstelle der ersten Funktion auf die erste Nullstelle der zweiten Funktion des Paares abbildet. Für die betrachteten Beispiele sieht man, dass dieser Faktor für die Nullstellen eines Funktionenpaares identisch ist, nämlich $\cdot e$ für $|k| = 1$ und $\cdot e^2$ für $|k| = 2$.

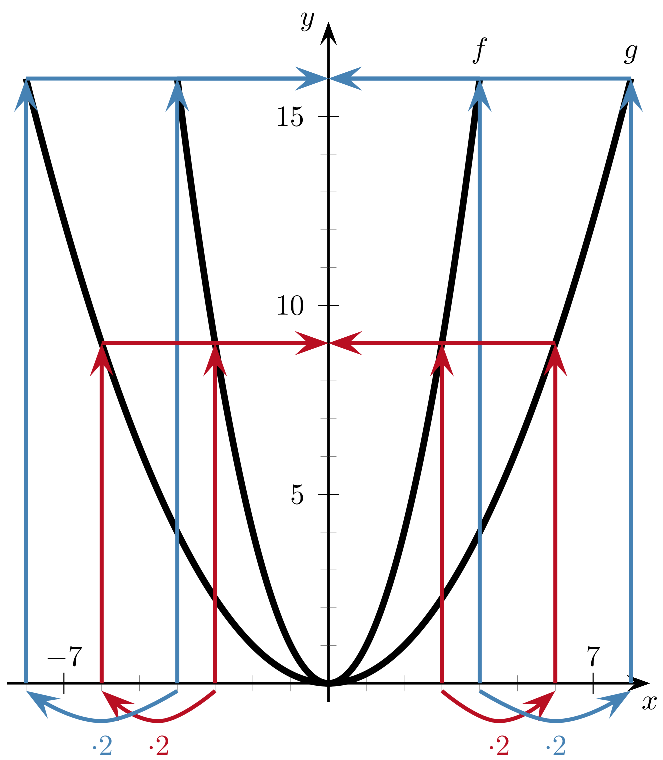
Erläuterung: *Streckung von Funktionsgraphen*

In der folgenden Wertetabelle für die Graphen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = (0{,}5 \cdot x)^2$ stehen immer Punkte mit gleichen y-Werten in einer Spalte:

x-Werte von f	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x-Werte von g	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
y-Werte	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Die x-Werte, die in die Zuordnungsvorschrift von g eingesetzt werden, sind immer doppelt so groß wie die x-Werte, die in f eingesetzt werden.

Auch aus den Graphen der beiden Funktionen kann man diesen Zusammenhang ablesen:



Es scheint, als könnte man den Graphen von f einfach „auseinander ziehen“ und erhielte den Graphen von g. Es ist

$$f(x) = g(2x),$$

der Graph von f, mit dem Faktor 2 in x-Richtung gestreckt, ergibt den Graphen von g, ebenso wie der Graph von g durch Streckung mit dem Faktor 0,5 in x-Richtung auf den Graphen von f abgebildet wird.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3

Aus

$$\begin{aligned} f_1\left(e^1 \cdot x\right) &= f_{-1}(x) \\ f_2\left(e^2 \cdot x\right) &= f_{-2}(x) \end{aligned}$$

folgt, dass der Graph von f_1 durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor e aus dem Graphen von f_{-1} entsteht. Ebenso wird der Graph von f_{-2} durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor e^2 auf den Graphen von f_2 abgebildet.

Beweis der Verallgemeinerung $f_\text{k}\left(e^k \cdot x\right) = f_{-\text{k}}(x)$:

$$\begin{aligned} f_\text{k}(x) &= (\ln(x))^2 - k \cdot \ln(x) \\ f_\text{k}\left(e^k \cdot x\right) &= \left(\ln(e^k \cdot x)\right)^2 - k \cdot \ln(e^k \cdot x) \quad \mid \text{1. Logarithmengesetz} \\ &= \left(\ln\left(e^k\right) + \ln(x)\right)^2 - k \cdot \left(\ln\left(e^k\right) + \ln(x)\right) \quad \mid \text{1. binomische Formel} \\ &= \left(\ln\left(e^k\right)\right)^2 + 2 \cdot \ln\left(e^k\right) \cdot \ln(x) + (\ln(x))^2 - k\ln\left(e^k\right) - k\ln(x) \\ &= k^2 + 2k\ln(x) + (\ln(x))^2 - k^2 - k\ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + k\ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 - (-k)\ln(x) \\ &= f_{-\text{k}}(x) \end{aligned}$$