Hessen-2009-Stochastik-C2-LK

1.

	Ehepaare	Keine Ehepaare	Haushalte
Mit Kindern	0,39	0,13	0,52
Ohne Kinder	0,41	0,07	0,48
Haushalte	0,8	0,2	1,00

- $P(A) = \frac{0{,}39}{0{,}52} = 0{,}75$
- $P(B) = \frac{0{,}39}{0{,}80} = 0{,}4875$

2. Es kann von einem Bernoulli-Experiment (p=0,25 ;n=100;k=20) ausgegangen werden, weil die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{0{,}13}{0{,}52} = 0{,}25$ sich bei jeder Ziehung wegen des großen Umfangs der Grundgesamtheit praktisch nicht verändert wird, auch wenn es eigentlich um ein Experiment ohne Zurücklegen handelt.
   In Näherung errechnet sich mit $\mu = np = 25$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 4{,}330$

   $$P(X = 20) = \Phi\left(\frac{20+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{20-0{,}5-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-4{,}5}{4{,}330}\right) - \Phi\left(\frac{-5{,}5}{4{,}330}\right) =$$

   $$\Phi(-1{,}04) - \Phi(-1{,}27) = (1-0{,}85083) - (1-0{,}89796) = 0{,}04713$$

   der exakte Binomialwert ist $B(100;0{,}25;20) = \binom{100}{20} \cdot 0{,}25^{20} \cdot 0{,}75^{80} \approx 0{,}0493$

3. Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest mit der Prüfhypothese $H_0: p = 0{,}8$ und der Alternativhypothese $H_1: p < 0{,}8$ mit n=662,3 und α=5%. Dann muss k berechnet werden aus $P(X \le k) = 0{,}05$. Aus der Tabelle entnimmt man $F(662;0{,}8;512) = 0{,}05$. Daraus ergibt sich ein Ablehnungsbereich von [0;512], d.h. wenn weniger als 513 Alleinerziehende zustimmen, ist die Prüfhypothese abgelehnt.

4.1. $\mu = 24300 \cdot 0{,}8 = 19440$ ist der Erwartungswert für die Anzahl der Ehepaare in der Stadt und $\sigma^2 = 24300 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 3880$. Die Tschebyscheffsche Abschätzung $P(|X - 19440| \ge 120) \le \frac{3888}{14400} \le 27\%$ bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Ehepaare in der Stadt mehr als 120 vom Erwartungswert abweicht, höchstens 27% ist. Das trifft für die tatsächliche Anzahl (19440-19320=120) gerade zu.

4.2. Mit der Binomialverteilung ergibt sich $P(|X - np| \ge c) \le \frac{np(1-p)}{c^2} \Leftrightarrow$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \ge \frac{c}{n}\right) \le \frac{p(1-p)}{c^2} \Leftrightarrow P(|H_n - p| \ge \varepsilon) \le \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \le \frac{1}{4n\varepsilon^2} \Leftrightarrow P(|H_n - p| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

mit $\frac{c}{n} = \varepsilon$ und $p(1-p) \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{b}(1-\frac{a}{b}) \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{b}(\frac{b-a}{b}) \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4ab - 4a^2 \le b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le b^2 - 4ab + 4a^2 \Leftrightarrow (b-2a)^2 \ge 0$