Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (7 BE)

Zum Zeitpunkt t = 0 werden einmalig 20 mg eines Medikaments direkt in die Blutbahn eines Patienten gespritzt. Die Funktion f mit $f(t) = 20 \cdot e^{-0{,}1054 \cdot t}$ beschreibt näherungsweise die im Blut vorhandene Medikamentenmenge in mg. Dabei gibt t die Zeit in Minuten an.

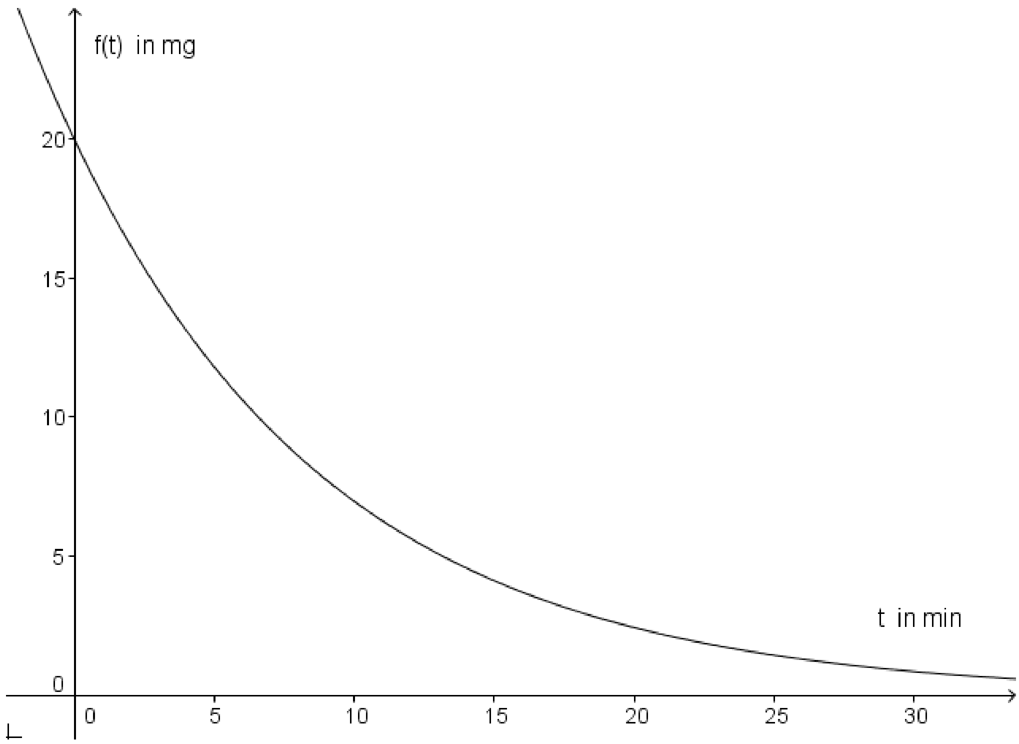
Zunächst soll eine in Material 1 gegebene Tabelle vervollständigt werden

t	0	5	10	15	20	25	30
f(t)	20			≈ 4,12			≈ 0,85

Diese Arbeit leistet ein zur Verfügung stehender Taschenrechner leicht und sicher :

t	0	5	10	15	20	25	30
f(t)	20	≈ 11,8	≈ 6,97	≈ 4,12	≈ 2,43	≈ 1,43	≈ 0,85

Ein geeignetes Koordinatensystem zur graphischen Darstellung hat den Definitionsbereich $0 \le x \le 30$ und den Wertebereich $0 \le y \le 20$



Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Um den Zeitpunkt zu bestimmen, zu dem sich nur noch die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Medikamentenmenge im Blut befindet, muss die folgende Gleichung gelöst werden :

$$20 \cdot e^{-0,1054 \cdot t} = 10 \qquad \big| \div 20$$

$$e^{-0,1054 \cdot t} = 0,5 \qquad \big| \text{ logarithmieren}$$

$$\ln\left(e^{-0,1054 \cdot t}\right) = \ln(0,5) \qquad \big| \text{ 3. Logarithmengesetz}$$

$$-0,1054 \cdot t \cdot \ln(e) = \ln(0,5) \qquad \big| \ln(e) = 1$$

$$-0,1054 \cdot t = \ln(0,5) \qquad \big| \div (-0,1054)$$

$$t = \frac{\ln(0,5)}{-0,1054}$$

$$t \approx 6,58$$

Nach rund 6,58 Minuten befindet sich nur noch die Hälfte der anfänglichen Medikamentenmenge im Blut.

Lösung zu Teilaufgabe 2,1 (6 BE)

In Aufgabe 2 wird zunächst der Begriff der medizinischen Wirkung w(T) definiert:

Unter der medizinischen Wirkung eines Medikaments bis zum Zeitpunkt T (in Minuten) versteht man den Ausdruck

$$w(T) = \int_0^T f(t)\,dt$$

wobei die Funktion f die Menge des Medikaments im Blut in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) beschreibt.

Mit Hilfe dieser Definition soll die medizinische Wirkung des Medikaments aus Aufgabe 1 für T = 30 bestimmt werden. Diese Aufgabe läuft auf die Berechnung eines bestimmten Integrals hinaus :

$$w(30) = \int_0^{30} 20 \cdot e^{-0{,}1054 \cdot t} dt$$

ausführliche Herleitung einer Stammfunktion $F(t)$ für $f(t) = 20 \cdot e^{-0{,}1054 \cdot t}$

$$F(t) = \int 20 \cdot e^{-0{,}1054 \cdot t}\, dt$$

$$\mathit{Substitution}: \quad u(t) = -0{,}1054 \cdot t = u$$

$$\mathit{Ableitung}: \quad u'(t) = \frac{du}{dt} = -0{,}1054 \rightarrow dt = \frac{du}{-0{,}1054}$$

einsetzen bzw. ersetzen:

$$\int 20 \cdot e^{-0{,}1054 \cdot t}\, dt = \int 20 \cdot e^{u} \cdot \frac{du}{-0{,}1054} = \frac{20}{-0{,}1054} \cdot \int e^{u}\, du$$

$$= \frac{20}{-0{,}1054} e^{u} + C$$

$$\mathit{Resubstitution}: \quad F(t) = \frac{20}{-0{,}1054} \cdot e^{-0{,}1054 \cdot t} + C$$

das heißt : $F(t) = \dfrac{20}{-0{,}1054} \cdot e^{-0{,}1054 \cdot t} + C$ ist die gesuchte Stammfunktion.

Mit ihrer Hilfe lässt sich jetzt der gesuchte Wert w(30) berechnen :

$$w(30) = \int_0^{30} 20 \cdot e^{-0{,}1054 \cdot t}\,dt$$

$$= \left[\frac{20}{-0{,}1054} \cdot e^{-0{,}1054 \cdot t} \right]_0^{30}$$

$$= \left(\frac{20}{-0{,}1054} \cdot e^{-0{,}1054 \cdot 30} \right) - \left(\frac{20}{-0{,}1054} \cdot e^{-0{,}1054 \cdot 0} \right)$$

$$\approx \left(\frac{20}{-0{,}1054} \cdot 0{,}0423 \right) - \left(\frac{20}{-0{,}1054} \cdot 1 \right)$$

$$\approx -8{,}0343 + 189{,}7533$$

$$\approx 181{,}719$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

In diesem Teil geht es um die Erläuterung vorgegebener Rechenschritte im Sachzusammenhang. In der folgenden Tabelle sind in der linken Spalte die Vorgaben in der rechten Spalte die Erläuterungen dargestellt.

(1)	$\int_0^{35} f(t)\,dt \approx 185{,}01$	Es wird die medizinische Wirkung bis zum Zeitpunkt T = 35 Minuten berechnet
(2)	$\lim_{T \to \infty} w(T) = \lim_{T \to \infty} \int f(t)\,dt \approx 189{,}75$	Die maximal mögliche medizinische Wirkung wird bestimmt
(3)	$\frac{185{,}01}{189{,}75} \approx 0{,}98 = 98\%$	Nach 35 Minuten sind bereits 98 % der maximal möglichen medizinischen Wirkung erzielt.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Vorinformation :
Das Medikament kann auch über eine Tropfinfusion verabreicht werden. Dabei gelangt jede Minute eine gleichbleibende Menge von c = 3 mg des Medikaments in den Blutkreislauf, wobei über die Nieren in jeder Minute k = 10 % des im Blut vorhandenen Medikaments abgebaut werden.

Für die im Blut befindliche Menge h des Medikaments in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten gilt allgemein mit den obigen Bezeichnungen:

$$h(t) = \frac{c}{k} \cdot \left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$$

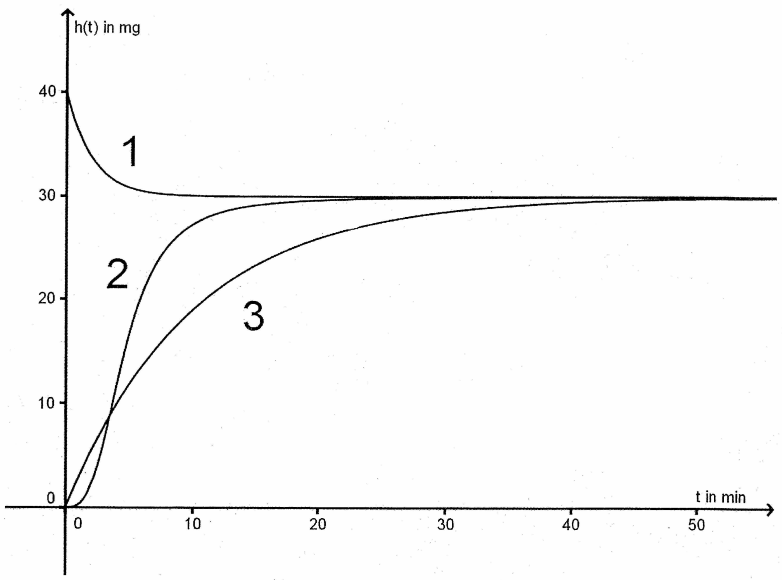
Setzt man für c und k die gegebenen Werte ein, so erhält man

$$h(t) = \frac{c}{k} \cdot \left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$$

$$= \frac{3}{0{,}1} \cdot \left(1 - e^{-0{,}1 \cdot t}\right)$$

$$= 30 \cdot \left(1 - e^{-0{,}1 \cdot t}\right)$$

Material 2



Welcher der drei Graphen 1, 2 oder 3 stellt die korrekte Beschreibung der Funktion $h(t) = 30 \cdot \left(1 - e^{-0{,}1 \cdot t}\right)$ dar ?

Am einfachsten beantwortet der Taschenrechner diese Frage. Man betrachtet einen charakteristischen Funktionswert, zum Beispiel $h(10)$. Es ergibt sich

$$h(10) = 30 \cdot \left(1 - e^{-0{,}1 \cdot 10}\right)$$

$$\approx 30 \cdot 0{,}6321$$

$$\approx 19$$

Damit ist klar, dass nur Graph 3 in Frage kommt, weil die Funktionswerte der beiden anderen Graphen an der Stelle t = 10 wesentlich größer sind.

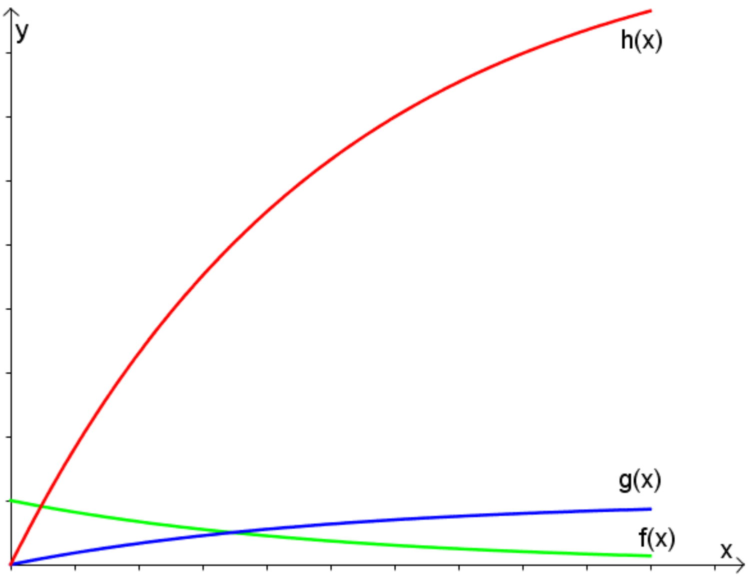
Alternativ ist auch eine Begründung über Eigenschaften und Steigungsverhalten von Funktionsgraphen möglich (siehe Skizze unten).

Der grüne Graph f(x) ist eine monoton fallende Funktion und entspricht in seinem Verlauf der Funktion $e^{-0,1\cdot t}$

Der blaue Graph ist eine monoton steigende Funktion und entspricht einer Funktion vom Typ $1-e^{-0,1\cdot t}$

Der rote Graph stellt eine Streckung des blauen Graphen dar, wie sie durch eine Multiplikation mit einer konstanten Zahl z.B. 30 erzielt werden kann

Damit kann nur Graph 3 richtig sein, weil er in seinem Verlauf der roten Funktion h(x) entspricht.



Lösung zu Teilaufgabe 3.2 (6 BE)

Um zu zeigen, dass H mit $H(t)=30\cdot\left(t+10\cdot e^{-0,1\cdot t}\right)$ eine Stammfunktion von h ist, genügt es, die Ableitung von H zu betrachten.

$$\begin{aligned} H'(t) &= 30\cdot\left(1+(-0,1)\cdot 10\cdot e^{-0,1\cdot t}\right) \\ &= 30\cdot\left(1-e^{-0,1\cdot t}\right) \\ &= h(t) \end{aligned}$$

Die medizinische Wirkung berechnet sich analog zu Aufgabe 2.1 zu

$$w(30) = \int_0^{30} 30 \cdot \left(1 - e^{-0,1 \cdot t}\right) dt$$

$$= 30 \cdot \left[\left(t + 10 \cdot e^{-0,1 \cdot t}\right)\right]_0^{30}$$

$$= 30 \cdot \left[\left(30 + 10 \cdot e^{-3}\right) - \left(0 + 10 \cdot e^{0}\right)\right]$$

$$\approx 30 \cdot (30,498 - 10)$$

$$= 30 \cdot 20,498$$

$$= 614,94$$

Lösung zu Teilaufgabe 4 (5 BE)

Zur Einsatzmöglichkeit „Spritze“ gehört der Graph von Aufgabe 1.1. Das Medikament steht sofort zur Verfügung, wird allerdings sehr schnell im Körper abgebaut. Die gesamte medizinische Wirkung liegt schon kurz nach der Verabreichung vor.

Zur Einsatzmöglichkeit „Tropf“ gehört Graph 3 aus Aufgabe 3.1. Hier kann man nach verhältnismäßig kurzer Zeit eine nahezu konstante Konzentration des Medikaments im Blut erreichen, die auch über einen längeren Zeitraum anhalt.