Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Um zu zeigen, dass die Punkte A, B und C die Ebene E aufspannen, muss zunächst überprüft werden, ob alle Punkte in der entsprechenden Ebene liegen. Hierfür werden die Punkte nacheinander in die Koordinatenform von E eingesetzt:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{A}(5\,|\,5\,|\,5) & 5+5+5=15 \quad \checkmark \\ \mathrm{B}(6\,|\,4\,|\,5) & 6+4+5=15 \quad \checkmark \\ \mathrm{C}(5\,|\,8\,|\,2) & 5+8+2=15 \quad \checkmark \end{array}$$

Um zu zeigen, dass die Punkte die Ebene wirklich aufspannen, muss abschließend noch gezeigt werden, dass die Punkt nicht alle drei auf einer Geraden liegen:

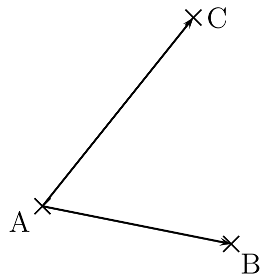
$$\mathrm{g_{AB}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

C in $\mathrm{g_{AB}}$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow s = 0 \\ \Rightarrow s = -3 \\ \Rightarrow ↯ \end{array}$$

Es gibt also kein s, das Gleichung (1) löst, Punkt C liegt nicht auf der Geraden durch die Punkte A und B. Die drei Punkte spannen also eine Ebene auf.

Zur eindeutigen Bestimmung einer Ebene sind drei Punkte nötig, die nicht auf einer Geraden liegen:



$$\mathrm{E}: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + r \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Wir setzen die Gerade g in die Ebene ein, um zu zeigen, dass g in E liegt:

$$\begin{aligned} (11-9r)+(0+9r)+(4+0r) &= 15 \\ 11-9r+9r+4 &= 15 \\ 15 &= 15 \quad \checkmark \end{aligned}$$

g liegt also in E.

Die Ebene

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten

$$S_x\,(A \mid 0 \mid 0)$$
$$S_y\,(0 \mid B \mid 0)$$
$$S_z\,(0 \mid 0 \mid C)\,.$$

Anschließend sollen das Spurdreieck von E und die Gerade g im Material eingezeichnet werden. Um die Spurpunkte der Ebene (=Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen) zu bestimmen, formen wir die Ebene in die Achsenabschnittsform um:

$$x + y + z = 15$$
$$\frac{x}{15} + \frac{y}{15} + \frac{z}{15} = 1$$

Die Spurpunkte der Ebene liegen damit bei $S_x\,(15 \mid 0 \mid 0)$, $S_y\,(0 \mid 15 \mid 0)$ und $S_z\,(0 \mid 0 \mid 15)$.
Um die Lage der Geraden g im Raum zu bestimmen, berechnen wir die Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen:

xy-Ebene:

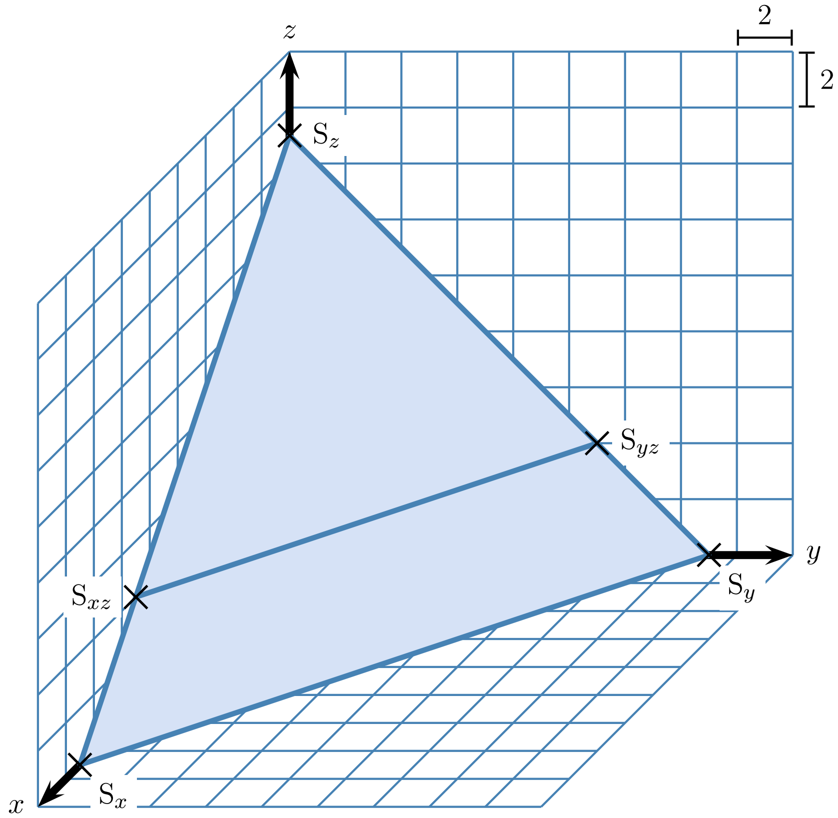
$z = 0 \quad \Rightarrow \lightning$ kein Schnittpunkt

xz-Ebene:

$y = 0 \quad \Rightarrow r = 0$ $\quad S_{xz}\,(11 \mid 0 \mid 4)$

yz-Ebene:

$x = 0 \quad \Rightarrow r = \frac{11}{9}$ $\quad S_{yz}\,(0 \mid 11 \mid 4)$



Lösung zu Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Wir bestimmen zunächst eine Parametergleichung der beschriebenen Ebene. Da die Ebene die Gerade enthalten soll, können der Aufhängepunkt und der Richtungsvektor der Geraden übernommen werden. Die Ebene soll außerdem senkrecht auf der xy-Ebene stehen, der zweite Richtungsvektor der Ebene verläuft also entlang der z-Achse. Damit gilt für die Ebene F:

$$\mathrm{F}: \quad \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um die Gleichung in Koordinatenform umzuformen, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. Elimination der Parameter:

$$\begin{array}{rclrrr} x & = & 11 & -9r & +0s & \left.\right\} \oplus \\ y & = & 0 & +9r & +0s & \\ z & = & 4 & +0r & +1s & \\ \hline x+y & = & 11 & & & \end{array}$$

2. Anwenden des Zusammenhangs $\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \circ \overrightarrow{n}$ mit $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$: Stützvektor der Ebene und $\overrightarrow{n}$: Normalenvektor der Ebene:

   - Berechnung eines Normalenvektors der Ebene mit Hilfe des Skalarproduktes ($\overrightarrow{n}$ steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der Ebene, also müssen die beiden Skalarprodukte Null ergeben):

$$\left.\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} -9n_1 + 9n_2 = 0$$

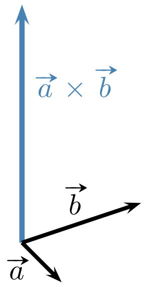
$$\left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} n_3 = 0$$

   Für den Normalenvektor der Ebene gilt also $n_1 = n_2$ und $n_3 = 0$.

Darstellung einer Ebene in

- Parameterform
  $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + r \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$
- Koordinatenform
  $\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \circ \overrightarrow{n}$
- Normalenform
  $\left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \circ \overrightarrow{n} = 0$

Das Ergebnis der Vektormultiplikation ist ein Vektor, der senkrecht auf den beiden Ausgangsvektoren steht.



Die Bedingung $n_1 = n_2$ wird von unendlich vielen Koordinaten n_1 und n_2 erfüllt Da der Normalenvektor der Ebene lediglich über seine Richtung, nicht aber über seine Länge definiert ist, erhält man an dieser Stelle immer eine Gleichung, die nicht eindeutig lösbar ist. Es wird dann immer ein Parameter frei gewählt, die restlichen Parameter ergeben sich durch Rechnung (wegen $n_3 = 0$ muss in dieser Aufgabe nur noch eine Koordinate berechnet werden). Für $n_1 = 1$ ergibt sich für den Normalenvektor der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Berechnung eines Normalenvektors mit Hilfe des Kreuzproduktes:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \cdot 1 & - & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & - & (-9) \cdot 1 \\ -9 \cdot 0 & - & 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als (mögliche) Koordinatenform der Ebene F:

$$\vec{X} \circ \vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \circ \vec{n}$$

$$\vec{X} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 11$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Um den Sachverhalt mit Hilfe eines Gleichungssystems zu beschreiben, werden zunächst die Variablen festgelegt:

x Weißwein
y Rotwein
z Roséwein

Damit ergibt sich für die Zusammensetzung der Sortimente A und B:

$$\begin{array}{llllllll} \text{A} & 2x & + & 2y & + & 2z & = & 30 \\ \text{B} & 3x & + & 3y & & & = & 33 \end{array}$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Da zur Bestimmung der Preise der drei Weinsorten nur zwei Gleichungen vorliegen, ist das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar, im abgebildeten Kästchen ist eine allgemeine Lösung des Gleichungssystems notiert. Es sollen zwei mögliche Preislisten angegeben werden. Hierfür wird für t ein beliebiger Wert zwischen 0 und 11 gewählt. Hier soll beispielhaft eine Preisliste für $t = 3$ und $t = 7$ angegeben werden:

	$t = 3$	$t = 7$
Weißwein	8 €	4 €
Rotwein	3 €	7 €
Roséwein	4 €	4 €

Lösung zu Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Das beschriebene Sonderangebot ergänzt die bestehenden Gleichungen aus Aufgabe 2.1 um eine dritte Gleichung:

$$\begin{array}{llllllll} \text{C} & 4x & + & 5y & + & 2z & = & 57 \end{array}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichungen A und B ist bereits bekannt. Durch Gleichung C wird die Lösung des gesamten Gleichungssystems auf eine exakte Lösung reduziert.

Hierfür wird die allgemeine Lösung in Gleichung C eingesetzt und t ermittelt:

$$\begin{aligned} 4 \cdot t + 5 \cdot (11 - t) + 2 \cdot 4 &= 57 \\ 4t + 55 - 5t + 8 &= 57 \\ t &= 6 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

	$t = 6$
Weißwein	5 €
Rotwein	6 €
Roséwein	4 €

Lösung zu Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

Umformen der Gleichungen A und B ergibt

$$\begin{array}{lccccccc} \text{A} & x & + & y & + & z & = & 15 \\ \text{B} & x & + & y & & & = & 11, \end{array}$$

Gleichung A entspricht also gerade der Koordinatenform der Ebene E, Gleichung B der Koordinatenform von F. Alle Punkte der Ebene E entsprechen also den Lösungen von Gleichung A, alle Punkte der Ebene F den Lösungen von Gleichung B. Die Schnittgerade g der beiden Ebenen entspricht der allgemeinen Lösung des Gleichungssystems aus Gleichung A und B, die in dem Kästchen aus Aufgabe 2.2 angegeben ist.

Lösung zu Teilaufgabe 2.5 (2 BE)

Die dritte Gleichung aus Teilaufgabe 2.3 entspricht einer weiteren Ebene, die zu den beiden ersten Ebenen weder parallel verläuft noch mit einer der beiden Ebenen identisch ist. Diese drei Ebenen schneiden sich in genau einem Punkt, der Lösung des Gleichungssystems aus Teilaufgabe 2.3.