Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1

Zuerst sollten die beiden Ereignisse mit Abkürzungen belegt werden.

T: Unfall ereignete sich tagsüber
U: Unfall geschah unter Alkoholeinfluss.

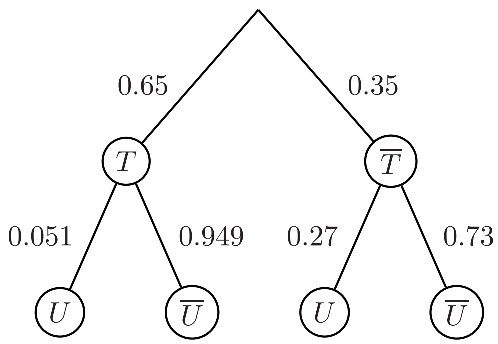
Mit diesem Benennungen kann man die Wahrscheinlichkeiten, die im Text gegeben sind, formal beschreiben.

$$P(T) = 65\% = 0,65, \qquad P_T(U) = 5,1\% = 0,051, \qquad P_{\overline{T}}(U) = 27\% = 0,27$$

Da die Wahrscheinlichkeiten $P(T), P_T(U)$ und $P_{\overline{T}}(U)$ gegeben sind, bietet es sich an, als erste Stufe des Baumdiagramms die Unterscheidung T oder $\overline{T}$ zu wählen.

Die drei bisher fehlenden Wahrscheinlichkeiten in nebenstehendem Baumdiagramm ergeben sich durch:

$$\begin{aligned} P\left(\overline{T}\right) &= 1 - P(T) = 0,35 \\ P_T\left(\overline{U}\right) &= 1 - P_T(U) = 0,949 \\ P_{\overline{T}}\left(\overline{U}\right) &= 1 - P_{\overline{T}}(U) = 0,73 \end{aligned}$$



Lösung zu Teilaufgabe 1.2

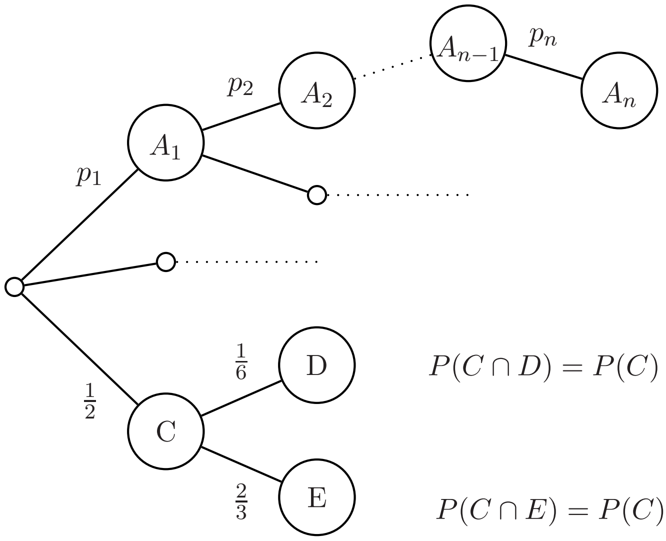
Das Ereignis A lässt sich folgendermaßen umformulieren: Der Unfall ereignete sich tagsüber und geschah nicht unter Alkoholeinfluss (Formal: $T \cap \overline{U}$). Mit der Pfadmultiplikationsregel lässt sich die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses aus dem aufgestellten Baumdiagramm bestimmen.

$$P(A) = P\left(T \cap \overline{U}\right) = P(T) \cdot P_T\left(\overline{U}\right) = 0,65 \cdot 0,949 \approx 0,6169 = 61,69\%$$

B ist nur ein anderer Name für das Ereignis U, das bereits in Teilaufgabe 1.1 benannt wurde. Deren Wahrscheinlichkeit ergibt sich unter Verwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit zu

$$\begin{aligned} P(B) = P(U) &= P(T \cap U) + P\left(\overline{T} \cap U\right) \\ &= 0,65 \cdot 0,051 + 0,35 \cdot 0,27 \\ &\approx 0,0332 + 0,0945 \\ &= 0,1277 = 12,77\%. \end{aligned}$$

Erläuterung: *Pfadmultiplikationsregel*



$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) =$
$P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$

$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$P(C \cap E) = P(C) \cdot P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Möchte man wissen, wie wahrscheinlich es ist in einem Baumdiagramm einen vollständigen Weg von der Wurzel bis zu einem Blatt abzulaufen, muss man die Wahrscheinlichkeiten an den Einzelpfaden multiplizieren. Wie im obersten Pfad des obigen Baumes zu entnehmen ist, bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Ereignisse A_1 bis A_n alle auftreten, gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten der Ereignisse A_i, $i \in \{1, \ldots n\}$ ist.

Nimmt man an die Ereignisse C, D und E haben die Bedeutungen:
C: Münzwurf führt zu Zahl.
D: Würfelwurf führt zu einer 5.
E: Würfelwurf führt zu einer Zahl kleiner 5.

Dann ergeben sich aus der Pfadmultiplationsregel beim Wurf einer Münze und eines Würfels die Wahrscheinlichkeiten (siehe auch Baumdiagramm):
$P(\text{Zahl und } 5) = P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{12}$
$P(\text{Zahl und 1 bis } 4) = P(C \cap E) = P(C) \cdot P(E) = \frac{1}{3}$

Lösung zu Teilaufgabe 1.3

Vergleicht man die Wahrscheinlichkeiten in der Formel mit den Rechnungen aus der vorigen Teilaufgabe 1.2, stellt man fest, dass

$$P(C) = \frac{0,35 \cdot 0,27}{0,65 \cdot 0,051 + 0,35 \cdot 0,27} = \frac{P\left(\overline{T} \cap U\right)}{P(U)}$$

gilt.

Stellt man die Pfadmultiplikationsregel

$$P(U) \cdot P_U\left(\overline{T}\right) = P\left(\overline{T} \cap U\right)$$

nach

$$P_U\left(\overline{T}\right) = \frac{P\left(\overline{T} \cap U\right)}{P(U)}$$

um, erhält man das Ergebnis, dass in der Gleichung die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_U\left(\overline{T}\right)$ bestimmt wird.
Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Unfall nachts ereignete, wenn man nur die Unfälle unter Alkoholeinfuss betrachtet, ungefähr 74% beträgt.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Die Bedingungen für eine Bernoullikette sind erfüllt, da

- ein einzelner Versuch nur genau 2 Ausgänge hat: Entweder der Fahrer ist ein junger Erwachsener oder er ist keiner.
- die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg (in unserem Fall: eine Akte mit einem jungen Erwachsenen als Unfallverursacher) über die Versuche hinweg gleich bleibt. Genau genommen, ist dies in diesem Beispiel nicht perfekt erfüllt, da ein bereits gezogener Unfall nicht in der Registratur verbleibt und sich somit, die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg verändert. Allerdings ist diese Veränderung bei einer großen Registratur vernachlässigbar.

Der vorliegende Versuch ist somit eine Bernoullikette und kann durch eine Binomialverteilung (Zufallsgröße X: Anzahl der Akten, bei denen junge Erwachsene als Unfallverursacher auftreten) beschrieben werden. Die Kenngrößen der Verteilung sind:

- Anzahl der Versuche: $n = 50$
- Erfolgswahrscheinlichkeit eines einzelnen Versuchs: $p = \frac{1}{4}$

Die gefragten Wahrscheinlichkeiten bestimmen sich unter diesen Voraussetzungen zu

$$\begin{aligned} P(D) = P(X \leq 9) &= B(50;0,25;0) + B(50;0,25;1) + \ldots + B(50;0,25;9) \\ &= F(50;0,25;9) \\ &= 0,1637 \\ &= 16,37\% \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P(E) = P(X > 12) &= 1 - P(X \leq 12) \\ &= 1 - \big(B(50;0,25;0) + B(50;0,25;1) + \ldots + B(50;0,25;12)\big) \\ &= 1 - F(50;0,25;12) \\ &= 1 - 0,5110 \\ &= 0,4890 \\ &= 48,9\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten $F(n; p; k)$ können aus der Tabelle zur kumulativen Binomialverteilung abgelesen oder mit der Summenfunktion des Taschenrechners über die Bernoulliformel berechnet werden.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Die Bedeutung der vorgegebenen Zeilen ist wie folgt:

(I) Die Wahrscheinlichkeit mindestens 1 Erfolg in der Bernoullikette zu haben, also hier mindestens 1 Akte mit einem jungen Erwachsenen als Unfallverursacher zu ziehen, soll größer als 80% sein.

(II) $P(X \geq 1)$ wurde durch $1 - P(X = 0)$ ersetzt, da kein Erfolg das Gegenereignis zu mindestens 1 Erfolg ist. Die Wahrscheinlichkeit für keinen Erfolg (es werden n ältere Erwachsene als Unfallverursacher gezogen) beträgt $\left(1 - \frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

(III) Auflösen der Ungleichung nach n führt zu der Lösung $n \geq 5,59$.

Das Ergebnis bedeutet, dass mindestens 6 Akten ($n = 6$ ist die erste natürliche Zahl, die die Bedingung $n \geq 5,59$ erfüllt) gezogen werden müssen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens eine Akte zieht, die einen jungen Erwachsenen als Unfallverursacher benennt.

Lösung zu Teilaufgabe 3

Man hat in der Aufgabe einen Hypothesentest zu entwerfen. In diesem Fall muss man zuerst die verwendeten Hypothesen festlegen. Da man davon ausgeht, dass sich der Anteil der unter Alkoholeinfluss fahrenden Schülerinnen auf unter 30% verändert hat, wird diese Annahme als Alternativhypothese $H_1 : p < 0,3$ festgelegt. Für die Nullhypothese H_0 ergibt sich entsprechend: $H_0 : p \geq 0,3$.
Die Aussage, dass die Vermutung auf dem Signifikanzniveau von 5% getestet werden soll, ist gleichbedeutend mit der Tatsache, dass der Test so angelegt werden muss, dass die Wahrscheinlichkeit für den α-Fehler den Wert 5% nicht übersteigt.
Der α-Fehler (auch Fehler 1.Art) besteht darin, dass man die Nullhypothese ablehnt, obwohl sie in Wirklichkeit korrekt ist. Ob man sich aufgrund des Testergebnisses für oder gegen die Nullhypothese entscheidet, hängt von der sogenannten kritischen Zahl k ab. Geben k oder weniger Schüler an, bereits unter Alkoholeinfluss gefahren zu sein, halten wir die Alternativhypothese für richtig bzw. lehnen die Nullhypothese ab. Sind es mehr als k Schüler, dreht sich die Entscheidung herum. Dieses k muss nun so gewählt werden, dass die Forderung (Signifikanzniveau 5%) erfüllt wird.
Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des α-Fehlers wird die Auswahl der 100 Schüler als Bernoullikette aufgefasst. Da im Falle des α-Fehlers die Nullhyothese korrekt ist, weiß man, dass man bei jedem Schüler eine Chance von 30% hat, dass er bereits unter Alkoholeinfluss gefahren ist.
Die Kenngrößen der zugehörigen Binomialverteilung sind somit:

- Anzahl der Versuche: $n = 100$
- Erfolgswahrscheinlichkeit eines einzelnen Versuchs: $p = 0,3$

Man begeht den α-Fehler, wenn bis zu k Schülern angeben, bereits unter Alkoholeinfluss gefahren zu sein. Die Wahrscheinlichkeit bei oben beschriebener Bernoullikette bis zu k Erfolge zu haben, beträgt:

$$P(X \leq k) = B(100; 0,3; 0) + B(100; 0,3; 1) + \ldots + B(100; 0,3; k) = F(100; 0,3; k)$$

Der Wert für k muss nun so gewählt werden, dass $F(100; 0,3; k) \leq 0,05$ gilt. Der größte Wert für k, der diese Bedingung erfüllt, lässt sich aus der Tabelle zur kumulativen Binomialverteilung ablesen. Es ist 22.

Mit den vorangegangenen Überlegungen lässt sich folgende Entscheidungsregel für den durchzuführenden Hypothesentest formulieren:

> Geben weniger als 23 der 100 Schüler an, bereits unter Alkoholeinfluss gefahren zu sein, glaubt man, dass der Anteil der Schüler, die unter Alkoholeinfluss fahren, auf unter 30% gesunken ist. Es kann bei diesem Testausgang vermutet werden, dass die Aufklärungskampagne erfolgreich war.