Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1

Erläuterung: *Definitions- und Wertebereich*

Der Definitionsbereich ist die Menge der Zahlen, für die die Funktion ausgewertet werden darf. Der Wertebereich ist die Menge der Zahlen, die als Funktionswerte der Funktion angenommen werden können.

Weder der ganzrationale Faktor $(x+1)^2$ noch der Faktor e^x besitzen eine Einschränkung des Definitionsbereichs und somit auch die Funktion f nicht. Die Auswertung des Faktors $(x+1)^2$ kann alle nicht-negativen, reellen Zahlen liefern; der Faktor e^x alle positiven. Das Produkt der beiden kann somit wieder alle nicht-negativen liefern.

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertebereich: $\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

Zur Bestimmung der Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen) muss der Funktionsterm mit 0 gleichgesetzt werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (x+1)^2 \cdot e^x &= 0 \qquad e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ (x+1)^2 &= 0 \\ x+1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Es ergibt sich der Achsenschnittpunkt $(-1|0)$.

Zur Bestimmung des Schnittpunktes mit der y-Achse muss die Funktion an der Stelle $x = 0$ ausgewertet werden.

$$f(0) = (0+1)^2 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Es ergibt sich der Achsenschnittpunkt $(0|1)$.

Zur Bestimmung der Extremstellen einer Funktion werden die ersten beiden Ableitungen benötigt.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2 \cdot e^x \\ \\ f'(x) &= 2(x+1) \cdot e^x + (x+1)^2 e^x \\ &= (2x+2+(x+1)^2) \cdot e^x \\ &= (2x+2+x^2+2x+1) \cdot e^x \\ &= (x^2+4x+3) \cdot e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x+4)\cdot e^x + (x^2+4x+3)\cdot e^x \\ &= (2x+4+x^2+4x+3)\cdot e^x \\ &= (x^2+6x+7)\cdot e^x \end{aligned}$$

Mögliche Hoch- und Tiefpunkte des Graphen befinden sich an den Stellen, an denen die Ableitungsfunktion den Wert 0 annimmt (notwendige Bedingung).

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ (x^2+4x+3)\cdot e^x &= 0 \qquad e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ (x^2+4x+3) &= 0 \\ (x+1)\cdot(x+3) &= 0 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

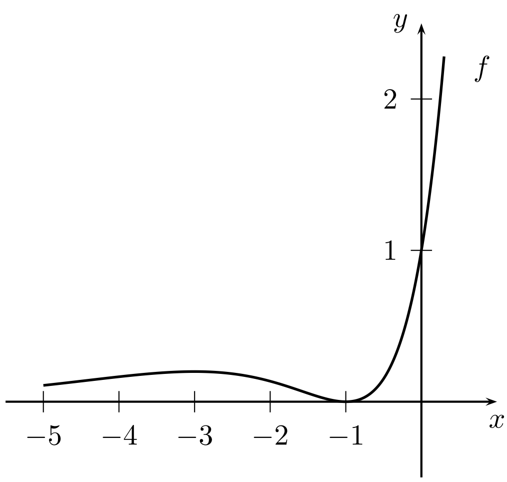
Damit tatsächlich ein Extremum vorliegt, muss es an den berechneten Stellen ein Vorzeichenwechsel in der Ableitungsfunktion geben. Dies lässt sich bspw. mit der zweiten Ableitung überprüfen. Besitzt diese an den entsprechenden Stellen nicht den Wert 0, so besitzt die erste Ableitung eine Steigung ungleich 0, weshalb ein Vorzeichenwechsel stattfinden muss (hinreichende Bedingung).

$$\begin{aligned} f''(-1) &= ((-1)^2+6\cdot(-1)+7)\cdot e^{-1} \\ &= 2\cdot e^{-1} > 0 \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit der Tiefpunkt $T(-1|0)$.

$$\begin{aligned} f''(-3) &= ((-3)^2+6\cdot(-3)+7)\cdot e^{-3} \\ &= -2\cdot e^{-3} < 0 \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit der Hochpunkt $H(-3|f(-3)) = H(-3|4e^{-3})$.
Als Graph für die Funktion f ergibt sich:



Lösung zu Teilaufgabe 2

Erläuterung: *Rekonstruktionsaufgabe*

Bei einer Rekonstruktionsaufgabe sind Informationen über den Typ einer Funktion und Eigenschaften einer Funktion vorgegeben. Ziel der Aufgabe ist es, den Funktionsterm aufzustellen.

Es wird eine ganzrationale Funktion zweiten Grades (quadratische Funktion) gesucht. Der allgemeine Funktionsterm einer solchen Funktion ist

$$p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Da wir für das Umsetzen einer der Bedingungen auch die Ableitung benötigen, geben wir diese hier bereits an.

$$p'(x) = 2ax + b$$

Über die Funktion ist bekannt, dass ihr Graph durch den Punkt $S_y(0|1)$ gehen soll. Hieraus können wir die Gleichung

$$p(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c = 1$$

herleiten. Außerdem weiß man, dass $T(-1|0)$ ein Tiefpunkt der Funktion sein soll. Hieraus lassen sich zwei Gleichungen extrahieren, da man nicht nur den Punkt als solchen kennt, sondern auch weiß, dass an der Stelle $x = -1$ die Ableitung den Wert 0 annehmen muss.

$$p(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + 1 = 0$$

Der Wert $c = 1$, der aus der ersten Gleichung bekannt ist, wurde direkt in die zweite Gleichung eingesetzt.

$$p'(-1) = 2a \cdot (-1) + b = -2a + b = 0$$

Aus der zweiten und dritten Gleichung ergibt sich nun ein Lineares Gleichungssystem.

$$\left.\begin{aligned} a - b &= -1 \\ -2a + b &= 0 \end{aligned}\right\} \overset{TR}{\Longrightarrow} a = 1, \quad b = 2 \tag{1}$$

Einsetzen der errechneten Werte für die Parameter a, b und c liefert das gesuchte Ergebnis.

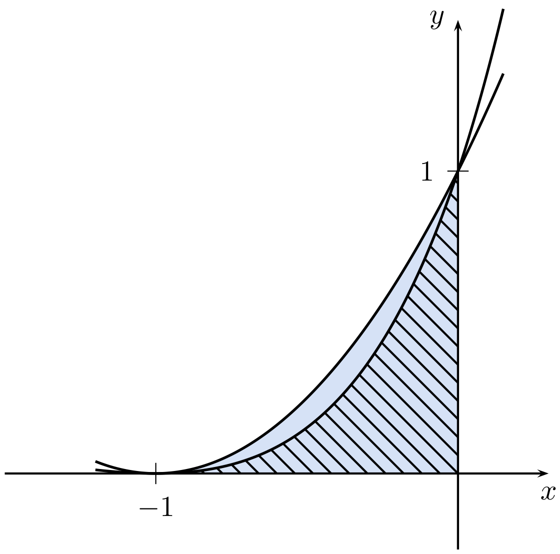
$$p(x) = 1x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Lösung zu Teilaufgabe 3

Indem man die Funktionen f und p an derselben Stelle im vorgegebenen Intervall $[-1; 0]$ auswertet und die Funktionswerte vergleicht, kann man entscheiden, welcher der beiden Graphen der oberhalb gelegene sein muss.

$$f(-0,5) = (-0,5+1)^2 \cdot e^{-0,5} < (-0,5+1)^2 = p(-0,5)$$

Bei der Ungleichung wurde die Tatsache verwendet, dass $0 < e^{-0,5} < 1$ gilt. Der obere Graph muss somit derjenige der Funktion p sein.
Nun steht noch die Aufgabe offen, das Verhältnis der beiden Flächen unter den Graphen zu bestimmen.



Zuerst bestimmt man den Flächeninhalt A_1 der größeren Fläche, also der Fläche, die der Graph der Funktion p mit der x-Achse im Intervall $[-1; 0]$ einschließt. Diese Fläche ist in der Skizze blau unterlegt.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-1}^{0} p(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x+1)^2\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{1}{3}(0+1)^3 - \left(\frac{1}{3}(-1+1)^3\right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Nun muss noch der Flächeninhalt A_2 der kleineren Fläche bestimmt werden. Dies entspricht dem schraffierten Bereich in der Skizze. Um das zur Bestimmung des Flächeninhalts benötigte Integral bestimmen zu können, muss man die Funktion in drei Summanden zerlegen, deren Stammfunktionen mittels der vorgegebenen Formeln bestimmt werden können.

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \cdot e^x\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x^2+2x+1) \cdot e^x\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} x^2 \cdot e^x\,dx + \int_{-1}^{0} 2x \cdot e^x\,dx + \int_{-1}^{0} e^x\,dx \\
&= [(x^2-2x+2)e^x]_{-1}^{0} + [2(x-1)e^x]_{-1}^{0} + [e^x]_{-1}^{0} \\
&= 2 - 5e^{-1} + (-2) - (-4)e^{-1} + 1 - e^{-1} \\
&= 1 - 2e^{-1}
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des prozentualen Anteils der kleineren Fläche an der größeren dividiert man A_1 durch A_2:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1-2e^{-1}}{\frac{1}{3}} = 3 - 6e^{-1} \approx 0,7927 = 79,27\%$$

Lösung zu Teilaufgabe 4

Die Bedeutung der vorgegebenen Zeilen ist wie folgt:

1.1 Es wird die Differenzfunktion d der beiden Funktionen p und f gebildet. Diese Funktion liefert als Funktionswert den vertikalen Abstand der beiden Graphen an der übergebenen x-Stelle.

1.2 Im Intervall $[-1; 0]$ liefert die Funktion d nur positive Werte. Da die Differenz $p - f$ gebildet wurde, bedeutet dies, dass in diesem Intervall der Graph von p immer oberhalb dem Graphen von f verläuft.

1.3 Die Funktion d hat Nullstellen bei $x = -1$ und $x = 0$. Anschaulich bedeutet dies, dass sich die Graphen der beiden Funktionen an diesen x-Stellen schneiden.

2.1 Es wird die Ableitung d' der Differenzfunktion gebildet. Deren Funktionswerte sagen etwas darüber aus, wie stark die Graphen der Funktionen p und f auseinander bzw. aufeinander zu laufen.

2.2 Die Funktion d' hat Nullstellen bei $x = -1$ und $x \approx -0,3$. Da an der Stelle $x = -1$ die Differenzfunktion d ebenfalls eine Nullstelle besitzt, handelt es sich hier um ein lokales Minimum der Differenzfunktion. An der Stelle $x \approx -0,3$ befindet sich ein lokales Maximum der Differenzfunktion.

3 Die Funktion d liefert an der Stelle $x = -0,3$ den Funktionswert $0,127$. Die Graphen p und f haben somit im Intervall $[-1; 0]$ einen maximalen Abstand von 0,127 LE.